CADERNO 1

1. $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{CD}=\overline{AD}\times\overline{CD}\times\cos\left(\widehat{\overrightarrow{AD},\,\overrightarrow{CD}}\right)=4\times6\times\cos\left(180^\circ-40^\circ\right)\Leftrightarrow 24\times\cos\left(140^\circ\right)\approx-18{,}39$

Resposta: $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{CD}\approx-18{,}39$

2. Sabe-se que $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AC}=\overline{AC}^2$.

Seja $\alpha=C\hat{B}A$.

$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=-7{,}5\Leftrightarrow 6\times2{,}5\times\cos\alpha=-7{,}5\Leftrightarrow\cos\alpha=-\dfrac{7{,}5}{15}\Leftrightarrow\cos\alpha=-\dfrac{1}{2}$

Pelo Teorema de Carnot, $\overline{AC}^2=\overline{AB}^2+\overline{BC}^2-2\times\overline{AB}\times\overline{BC}\times\cos\alpha$, ou seja:

$\overline{AC}^2=6^2+2{,}5^2-2\times6\times2{,}5\times\left(-\dfrac{1}{2}\right)\Leftrightarrow\overline{AC}^2=36+6{,}25+15\Leftrightarrow\overline{AC}^2=57{,}25$

Resposta: $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AC}=57{,}25$

3.

3.1. $\overrightarrow{CV}=V-C=\left(-\dfrac{3\sqrt{3}}{2},-\dfrac{3}{2},6\right)$ e $\overrightarrow{OC}=C-O=\left(\dfrac{3\sqrt{3}}{2},\dfrac{3}{2},0\right)$

$\overrightarrow{CV}\cdot\overrightarrow{OC}=\left(-\dfrac{3\sqrt{3}}{2},-\dfrac{3}{2},6\right)\cdot\left(\dfrac{3\sqrt{3}}{2},\dfrac{3}{2},0\right)=-\dfrac{27}{4}-\dfrac{9}{4}+0=-\dfrac{36}{4}=-9$

Resposta: $\overrightarrow{CV}\cdot\overrightarrow{OC}=-9$

3.2. A base da pirâmide é um hexágono regular, logo o triângulo $[BCO]$ é equilátero.

$\overline{OC}=\sqrt{\left(\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(\dfrac{3}{2}\right)^2+0}=\sqrt{\dfrac{27}{4}+\dfrac{9}{4}}=3$

Seja h a altura do triângulo $[BCO]$.

$h=\sqrt{3^2-\left(\dfrac{3}{2}\right)^2}=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$

$A_{\text{base}}=6\times\dfrac{3\times\dfrac{3\sqrt{3}}{2}}{2}=\dfrac{27\sqrt{3}}{2}$

$$V = A_{\text{base}} \times \overline{OV} = \frac{27\sqrt{3}}{2} \times 6 = 81\sqrt{3} \approx 140,3$$

Resposta: O volume da pirâmide é, aproximadamente, 140,3 unidades de volume.

4.

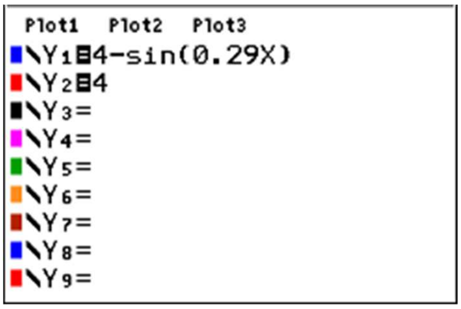
4.1. $f(x) = 4 - \sin(0,29x)$

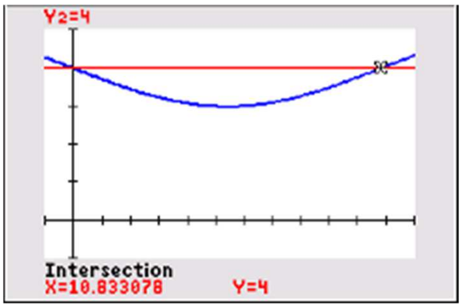
$f(0) = 4 - \sin(0) = 4$

Resposta: A altura de cada coluna é de 4 metros.

4.2. $f(x) = f(0) \;\Leftrightarrow\; f(x) = f(0)$

Pode fazer-se uma resolução gráfica da equação, começando por inserir a expressão da função e o valor de $f(0)$.





A diferença entre as abcissas dos pontos de interseção das representações gráficas visualizadas representa a distância entre as colunas.

Os pontos têm coordenadas $(0,\ 4)$ e, aproximadamente, $(11,\ 4)$.

Conclui-se que a distância é, aproximadamente, 11 metros.

Resposta: A distância entre as colunas *A* e *B* é, aproximadamente, 11 metros.

FIM (Caderno 1)

CADERNO 2

5. Declive da reta *r*: $m=\tan(\pi-\theta)=-\frac{5}{3}$, logo $\tan(\theta)=\frac{5}{3}$.

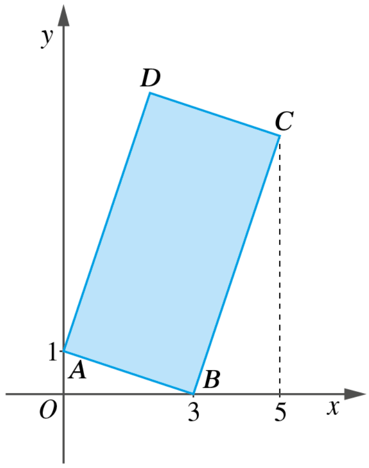
Sabe-se que $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\cos\theta$ e $1+\tan^2(\theta)=\frac{1}{\cos^2(\theta)}$.

$1+\tan^2(\theta)=1+\frac{25}{9}=\frac{34}{9}$, logo $\frac{1}{\cos^2(\theta)}=\frac{34}{9}$. Daqui resulta que $\cos\theta=\frac{3}{\sqrt{34}}=\frac{3\sqrt{34}}{34}$.

Resposta: Opção correta **(A)** $\frac{3\sqrt{34}}{34}$

6.

6.1. $\overrightarrow{AB}=B-A=(3,\,-1)$



Declive da reta *AB*: $m=-\frac{1}{3}$

Declive da reta *AD*: $-\frac{1}{m}=3$

Equação da reta *AD*, na forma reduzida, é do tipo:

$y=3x+b$

Como passa no ponto $A(0,\,1)$, então $b=1$.

Equação reduzida da reta *AD*: $y=3x+1$

Resposta: $y=3x+1$

6.2. $\overline{AB}=\sqrt{(3-0)^2+(0-1)^2}=\sqrt{10}$

Equação da reta *BC*: $y=3x+b$

$0=3\times3+b\Leftrightarrow b=-9$

Assim, a equação da reta *BC* é $y=3x-9$.

O ponto *C* tem abcissa 5 e pertence à reta $y=3x-9$, logo a sua ordenada é:

$y=3\times5-9=6$

Coordenadas do ponto C: $(5,6)$

$\overline{BC} = \sqrt{(5-3)^2 + (6-0)^2} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$

Perímetro do retângulo [$ABCD$]: $2\left(\overline{AB} + \overline{BC}\right) = 2\left(\sqrt{10} + 2\sqrt{10}\right) = 6\sqrt{10}$

Resposta: $6\sqrt{10}$

6.3. Raio da circunferência: $\overline{AB} = \sqrt{(3-0)^2 + (0-1)^2} = \sqrt{10}$

Equação da circunferência: $(x-3)^2 + y^2 = 10$

O ponto de interseção da circunferência com o eixo Ox são do tipo $(x,\ 0)$.

$(x-3)^2 + 0^2 = 10 \Leftrightarrow x-3 = \sqrt{10} \vee x-3 = -\sqrt{10} \Leftrightarrow x = 3+\sqrt{10} \vee x = 3-\sqrt{10}$

O comprimento da corda é dado por $\left|3+\sqrt{10} - \left(3-\sqrt{10}\right)\right|$.

$\left|3+\sqrt{10} - \left(3-\sqrt{10}\right)\right| = 2\sqrt{10}$

Resposta: O comprimento da corda é $2\sqrt{10}$.

7. $f(x) = 4\sin(2x) - 1$

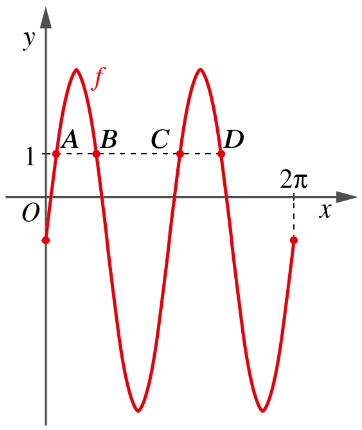
$f(x) = 1 \quad \wedge \quad x \in [0,\ 2\pi]$

$f(x) = 1 \Leftrightarrow 4\sin(2x) - 1 = 1 \Leftrightarrow \sin(2x) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin(2x) = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$

$2x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \ \vee \ 2x = \pi - \frac{\pi}{6} + 2k\pi \ ,\ k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{12} + k\pi \ \vee \ x = \frac{5\pi}{12} + k\pi \ ,\ k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = \frac{\pi + 12k\pi}{12} \ \vee \ x = \frac{5\pi + 12k\pi}{12} \ ,\ k \in \mathbb{Z}$



Como $x \in [0,\ 2\pi]$, tem-se:

Se $k=0$: $x = \frac{\pi}{12}$ e $\frac{5\pi}{12}$

Se $k=1$: $x = \frac{13\pi}{12}$ e $\frac{17\pi}{12}$

A abcissa de A é $\frac{\pi}{12}$ e a abcissa de D é $\frac{17\pi}{12}$.

Resposta: $\frac{\pi}{12}$ e $\frac{17\pi}{12}$

8.

8.1. O plano θ é definido por uma equação do tipo $-2x+y-z+d=0$.

Como passa no ponto $A(-1,3,1)$, tem-se $2+3-1+d=0$, ou seja, $d=-4$.

Equação do plano θ: $-2x+y-z-4=0$

As coordenadas $(0,1,-3)$ são solução da equação.

Resposta: Opção correta **(D)** $(0,1,-3)$

8.2. O ponto *B* pertence ao eixo *Oz* e ao plano *α*.

$B(0,0,z)$

$\alpha: \ -2x+y-z=2$

$0+0-z=2 \Leftrightarrow z=-2$

$B(0,0,-2)$ e $A(-1,3,1)$

Seja *M* o ponto médio de [*AB*] e $P(x,y,z)$ um ponto genérico do plano mediador de [*AB*].

$$M\left(\frac{0-1}{2}, \frac{0+3}{2}, \frac{-2+1}{2}\right)=\left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right)$$

$$\overrightarrow{AB}=B-A=(1,-3,-3)$$

$$\overrightarrow{MP}=P-M=\left(x+\frac{1}{2}, y-\frac{3}{2}, z+\frac{1}{2}\right)$$

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{MP}=0 \Leftrightarrow (1,-3,-3)\cdot\left(x+\frac{1}{2}, y-\frac{3}{2}, z+\frac{1}{2}\right)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x+\frac{1}{2}-3y+\frac{9}{2}-3z-\frac{3}{2}=0 \Leftrightarrow x-3y-3z+\frac{7}{2}=0$$

Resposta: $x-3y-3z+\frac{7}{2}=0$

8.3. $A(-1,3,1)$

As coordenadas do ponto *A* são solução da equação $(x-1)^2+y^2+(z+2)^2=22$.

$(-1-1)^2+3^2+(1+2)^2=4+9+9=22$

Seja *C* o centro da superfície esférica e $P(x,y,z)$ um ponto genérico do plano tangente à superfície esférica no ponto *A*.

$C(1,0,-2)$

$\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{AP} = 0 \Leftrightarrow (-2,\ 3,\ 3) \cdot (x+1,\ y-3,\ z-1) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -2x-2+3y-9+3z-3=0 \Leftrightarrow -2x+3y+3z=14$

Plano tangente à superfície esférica no ponto A: $-2x+3y+3z=14$

Resposta: $-2x+3y+3z=14$

9.

9.1. $u_n > 0 \wedge u_n < \frac{7}{5} \Leftrightarrow \frac{2n-7}{n+1} > 0 \wedge \frac{2n-7}{n+1} < \frac{7}{5}$

$2n-7>0 \ \wedge\ 10n-35<7n+7 \Leftrightarrow n > \frac{7}{2} \wedge n < 14$

Há 10 termos que satisfazem a condição pedida: são os termos consecutivos a começar no de ordem 4 e a acabar no de ordem 13.

Resposta: Opção correta **(B)** 10

9.2. $u_{n+1} - u_n = \frac{2(n+1)-7}{(n+1)+1} - \frac{2n-7}{n+1} = \frac{2n-5}{n+2} - \frac{2n-7}{n+1} = \frac{9}{(n+2)(n+1)}$

$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} - u_n > 0$

Conclui-se que a sucessão é monótona crescente (estritamente).

Como $\frac{2n-7}{n+1} = 2 - \frac{9}{n+1}$, conclui-se que todos os termos são menores que 2.

Então, 2 é majorante do conjunto dos termos da sucessão.

FIM (Caderno 2)