



Nome: \_\_\_\_\_

Ano / Turma: \_\_\_\_\_ N.º: \_\_\_\_\_

Data: \_\_\_\_ - \_\_\_\_ - \_\_\_\_

- Não é permitido o uso de corretor. Deves riscar aquilo que pretendes que não seja classificado.
- A prova inclui um formulário.
- As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado de cada caderno.

**CADERNO 1**  
**(É permitido o uso de calculadora gráfica.)**

1. Sejam  $(u_n)$  e  $(w_n)$  sucessões tais que:

- $(u_n)$  é definida por recorrência do seguinte modo: 
$$\begin{cases} u_1 = -3 \\ u_n = 5 + 2u_{n-1} \text{ se } n > 1 \end{cases};$$
- o termo geral de  $(w_n)$  é  $w_n = 3n + 2$ .

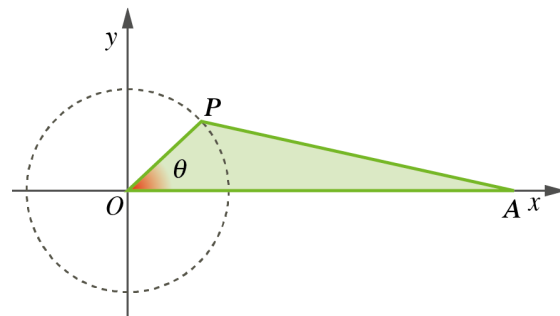
1.1. Sabe-se que  $u_{13} = 8187$ . Qual é o valor de  $n$  de modo que  $w_n = u_{12}$ ?

- (A) 5459                      (B) 2728  
(C) 1363                      (D) 2730

1.2. A sucessão  $(w_n)$  é uma progressão aritmética.

Calcula a soma de 25 termos consecutivos, sendo o primeiro desses termos  $w_8$ .

2. Na figura, em referencial o.n.  $Oxy$ , está representada a circunferência de centro  $O$  e raio 1.



Sabe-se que:

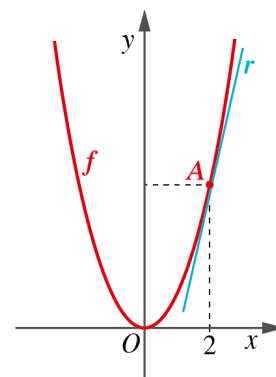
- o ponto  $A$  tem coordenadas  $(4, 0)$ ;
- o ponto  $P$  pertence à circunferência;
- a amplitude do ângulo  $AOP$ , em radianos, é representada por  $\theta$ , em que  $\theta \in \left] 0, \frac{\pi}{2} \right[$ .

2.1. Mostra que  $\overrightarrow{PO} \cdot \overrightarrow{PA} = 1 - 4 \cos \theta$ .

2.2. Sabendo que  $\overrightarrow{PO} \cdot \overrightarrow{PA} = 1 - 4 \cos \theta$ , determina o valor de  $\theta$  para o qual o triângulo  $[OAP]$  é retângulo em  $P$ .

Apresenta o resultado arredondado às milésimas.

3. Seja  $f$  a função, de domínio  $\mathbb{R}$ , definida por  $f(x) = x^2$ .  
Na figura, em referencial o.n.  $Oxy$ , estão representados o gráfico da função  $f$  e a reta  $r$  tangente ao gráfico no ponto  $A$  de abcissa 2.



3.1. Designa por  $\theta$  a inclinação da reta  $r$ .  
Qual é a amplitude de  $\theta$ , em graus, arredondada às centésimas?  
(A) 75,96            (B) 1,33  
(C) 63,43            (D) 82,87

3.2. Determina, na forma reduzida, a equação da reta  $s$  perpendicular à reta  $r$  e que passa em  $A$ .

4. Num rio houve um derrame de óleo. O alerta foi dado às 8 horas e iniciaram-se medidas de combate à poluição.  
A primeira medida foi rodear a superfície poluída da água por barreiras flutuantes. De seguida, quando a área poluída era máxima, iniciou-se a aspiração do óleo.  
O fim da intervenção ocorreu quando a área afetada era 5% da área registada no momento do alerta.



Admite que  $t$  horas após o instante em que o alerta foi dado, a área da superfície da água poluída, em metros quadrados, é dada pela função  $f$  definida por

$$f(t) = \frac{-0,15t^3 - 2,5t^2 + 48t + 28}{t + 0,8}$$

Recorre às capacidades gráficas da calculadora e recolhe a informação necessária para completar o relatório da ocorrência apresentado a seguir.

Relatório da ocorrência	
• Hora do alerta	08 h 00 min 00 s
• Área da superfície poluída no momento do alerta	_____ m <sup>2</sup>
• Hora de início da aspiração do óleo	_____ h _____ min (minutos arredondados às unidades)
• Hora do fim da intervenção	_____ h _____ min (minutos arredondados às unidades)

Deves apresentar gráfico(s) e assinalar pontos relevantes que te permitam dar as respostas pretendidas.

**FIM**  
**(Caderno 1)**

Cotações								Total
Questões – Caderno 1	1.1.	1.2.	2.1.	2.2.	3.1.	3.2.	4.	
Pontos	10	15	15	15	10	15	15	95

**CADERNO 2**  
**(Não é permitido o uso de calculadora.)**

5. Em relação a um referencial o.n.  $Oxyz$ , considera a superfície esférica definida pela equação  $(x-1)^2 + y^2 + (z-2)^2 = 14$ .

5.1. A superfície esférica  $(x-1)^2 + y^2 + (z-2)^2 = 14$  intersesta o eixo  $Oy$  em dois pontos que são os extremos do diâmetro de outra superfície esférica.  
Essa superfície esférica pode ser definida pela equação:

(A)  $x^2 + (y+1)^2 + z^2 = 9$

(B)  $x^2 + y^2 + z^2 = 9$

(C)  $(x-1)^2 + y^2 + (z-1)^2 = 3$

(D)  $x^2 + y^2 + z^2 = 3$

5.2. O plano  $\alpha$  intersesta o eixo  $Oz$  no ponto  $P$  e é tangente à superfície esférica  $(x-1)^2 + y^2 + (z-2)^2 = 14$  no ponto  $A(-2, 1, 0)$ .  
Escreve uma equação vetorial da reta  $AP$ .

6. Considera a função  $f$ , de domínio  $\mathbb{R}$ , definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - 1} & \text{se } x < -1 \\ \frac{-4x}{x+3} & \text{se } x \geq -1 \end{cases}$$

6.1. Calcula  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ . O que podes concluir quanto à existência de assíntota ao gráfico de  $f$  quando  $x$  tende para  $-\infty$ ?

6.2. Mostra que a função  $f$  é contínua em  $x = -1$ .

6.3. Resolve analiticamente, em  $[-1, +\infty[$ , a inequação  $f(x) > 1$ .  
Apresenta o resultado na forma de intervalo de números reais.

7. Considera a função  $f$ , de domínio  $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ , definida por  $f(x) = \frac{x^2 + x - 2}{x+1}$ .

7.1. O gráfico de  $f$  admite duas assíntotas que se intersestam no ponto  $P$ .  
Determina as coordenadas de  $P$ .

7.2. Para cada número real  $k$ , considera a função  $g$  definida por  $g(x) = \frac{kx+1}{4}$ .

Sabe-se que  $(g \circ f)(2) = \frac{1}{6}$ . Qual é o valor de  $k$ ?

(A)  $\frac{7}{12}$

(B)  $-\frac{1}{2}$

(C)  $\frac{7}{6}$

(D)  $-\frac{1}{4}$

8. Seja  $g$  uma função de domínio  $\mathbb{R}$ , tal que  $g'$ , função derivada de  $g$ , é definida por

$$g'(x) = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}.$$

8.1  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{g(x) - g(-1)}{x+1}$  é igual a:

- (A)  $-\infty$                               (B)  $-1$   
(C)  $0$                                       (D)  $+\infty$

8.2 Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

- (A)  $g(-3) < g(-2)$                       (B)  $g\left(-\frac{1}{2}\right) > g(1)$   
(C)  $g(0) < g(-1)$                       (D)  $g(3) > g(5)$

9. Determina o produto mínimo de dois números reais, em que a diferença entre eles seja 1.  
Explica, de forma clara, como chegaste à resposta.

**FIM**  
**(Caderno 2)**

Cotações										Total	
Questões – Caderno 2	5.1.	5.2.	6.1.	6.2.	6.3.	7.1.	7.2.	8.1.	8.2.	9.	
Pontos	10	12	10	12	10	11	10	10	10	10	105

## FORMULÁRIO

### GEOMETRIA

**Comprimento de um arco de circunferência:**  $\alpha r$   
( $\alpha$  : amplitude, em radianos, do ângulo ao centro;  $r$  : raio)

**Área de um polígono regular:** Semiperímetro  $\times$  Apótema

**Área de um setor circular:**  $\frac{\alpha r^2}{2}$

( $\alpha$  : amplitude, em radianos, do ângulo ao centro;  $r$  : raio)

**Área lateral de um cone:**  $\pi r g$

( $r$  : raio da base;  $g$  : geratriz)

**Área de uma superfície esférica:**  $4 \pi r^2$

( $r$  : raio)

**Volume de uma pirâmide:**  $\frac{1}{3} \times$  Área da base  $\times$  Altura

**Volume de um cone:**  $\frac{1}{3} \times$  Área da base  $\times$  Altura

**Volume de uma esfera:**  $\frac{4}{3} \pi r^3$  ( $r$  : raio)

### PROGRESSÕES

Soma dos  $n$  primeiros termos de uma progressão ( $u_n$ ):

**Progressão aritmética:**  $\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$

**Progressão geométrica:**  $u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$

### TRIGONOMETRIA

$$\sin(a + b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$$

$$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

### COMPLEXOS

$$(\rho \operatorname{cis} \theta)^n = \rho^n \operatorname{cis}(n\theta) \quad \text{ou} \quad (\rho e^{i\theta})^n = \rho^n e^{in\theta}$$

$$\sqrt[n]{\rho \operatorname{cis} \theta} = \sqrt[n]{\rho} \operatorname{cis} \left( \frac{\theta + 2k\pi}{n} \right) \quad \text{ou} \quad \sqrt[n]{\rho e^{i\theta}} = \sqrt[n]{\rho} e^{i \frac{\theta + 2k\pi}{n}}$$

$$(k \in \{0, \dots, n-1\} \text{ e } n \in \mathbb{N})$$

### PROBABILIDADES

$$\mu = p_1 x_1 + \dots + p_n x_n$$

$$\sigma = \sqrt{p_1 (x_1 - \mu)^2 + \dots + p_n (x_n - \mu)^2}$$

Se  $X$  é  $N(\mu, \sigma)$ , então:

$$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0,6827$$

$$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0,9545$$

$$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 0,9973$$

### REGRAS DE DERIVAÇÃO

$$(u + v)' = u' + v'$$

$$(u v)' = u' v + u v'$$

$$\left( \frac{u}{v} \right)' = \frac{u' v - u v'}{v^2}$$

$$(u^n)' = n u^{n-1} u' \quad (n \in \mathbb{R})$$

$$(\sin u)' = u' \cos u$$

$$(\cos u)' = -u' \sin u$$

$$(\tan u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$$

$$(e^u)' = u' e^u$$

$$(a^u)' = u' a^u \ln a \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$$

$$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$$

$$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a} \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$$

### LIMITES NOTÁVEIS

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^n = e \quad (n \in \mathbb{N})$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \quad (p \in \mathbb{R})$$