CADERNO 1
(É permitido o uso de calculadora gráfica.)

1.1. $8187 = 5 + 2u_{12} \Leftrightarrow u_{12} = 4091$

$w_n = u_{12} \Leftrightarrow 3n + 2 = 4091 \Leftrightarrow n = 1363$

Resposta: Opção **(C)** 1363

1.2. O primeiro dos 25 termos consecutivos é w_8 e o último é w_{32}.
Seja S a soma desses 25 termos.

$$S = \frac{w_8 + w_{32}}{2} \times 25 \Leftrightarrow S = \frac{26+98}{2} \times 25 \Leftrightarrow S = 1550$$

Resposta: 1550

2.1. $P(\cos\theta, \sin\theta)$

$\overrightarrow{PO} = O - P = (-\cos\theta, -\sin\theta)$

$\overrightarrow{PA} = A - P = (4 - \cos\theta, -\sin\theta)$

$\overrightarrow{PO} \cdot \overrightarrow{PA} = (-\cos\theta, -\sin\theta) \cdot (4 - \cos\theta, -\sin\theta)$

$\overrightarrow{PO} \cdot \overrightarrow{PA} = -4\cos\theta + \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1 - 4\cos\theta$

Resposta: $\overrightarrow{PO} \cdot \overrightarrow{PA} = 1 - 4\cos\theta$

2.2. O triângulo $[OAP]$ é retângulo em P se e só se $\overrightarrow{PO} \cdot \overrightarrow{PA} = 0$.

$\overrightarrow{PO} \cdot \overrightarrow{PA} = 0 \Leftrightarrow 1 - 4\cos\theta = 0 \Leftrightarrow \cos\theta = 0,25$

Recorrendo à calculadora, tem-se $\theta \approx 1,318 \text{ rad}$.

Resposta: $1,318 \text{ rad}$

3.1. $f'(x) = (x^2)' = 2x$

$\tan\theta = f'(2) = 4$

Recorrendo à calculadora $\theta \approx 1,33 \text{ rad} \approx 75,96°$.

Resposta: Opção **(A)** 75,96

3.2. As coordenadas do ponto A são $(2, f(2))$, ou seja, $(2, 4)$.

O declive da reta r é 4. Então, o declive da reta s é $-\frac{1}{4}$.

A equação da reta s é do tipo: $y=-\frac{1}{4}x+b$ e passa em $A(2, 4)$.

$4=-\frac{1}{4}\times 2+b$. Daqui resulta que $b=\frac{9}{2}$.

Equação da reta s: $y=-\frac{1}{4}x+\frac{9}{2}$

Resposta: $y=-\frac{1}{4}x+\frac{9}{2}$

4. Tem-se $f(t)=\frac{-0{,}15t^3-2{,}5t^2+48t+28}{t+0{,}8}$.

- Área da superfície poluída na hora do alerta:

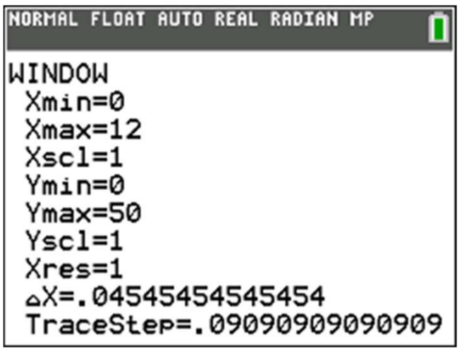
$f(0)=\frac{28}{0{,}8}=35$

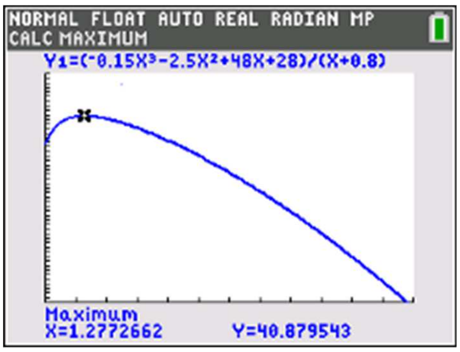
Na hora do alerta registou-se uma área de 35m^2.

- Hora de início da aspiração do óleo:

A aspiração do óleo teve início no momento em que f atingiu o seu máximo.

Recorrendo às capacidades gráficas da calculadora, obtém-se:



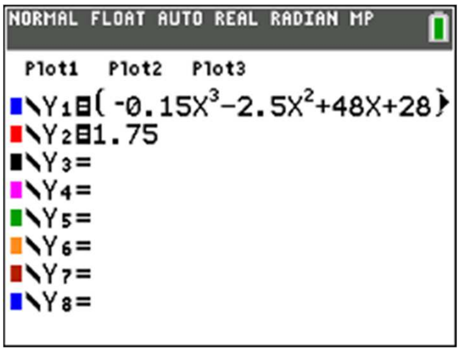


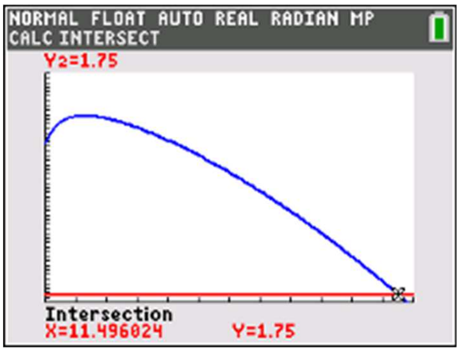
Ao fim de 1,277 h, a área poluída atingiu o máximo de, aproximadamente, 41 m^2 de área.

Como $0{,}277\times 60\approx 17$, conclui-se que o início da aspiração ocorreu após ter decorrido, aproximadamente, 1 h 17 min após o alerta, ou seja, cerca das 9:17.

- Hora do fim da intervenção:

É necessário resolver a equação $f(t)=0,05\times 35$, ou seja, $f(t)=1,75$.





$f(t)=1,75$ para $t\approx 11,496$ h

Como $0,496\times 60\approx 30$, conclui-se que o fim da intervenção ocorreu após terem decorrido, aproximadamente, 11 h 30 min após o alerta, ou seja, cerca das 19:30.

Resposta:

Relatório da ocorrência	
• Hora do alerta	08 h 00 min 00 s
• Área da superfície poluída no momento do alerta	$35\ \mathrm{m}^2$
• Hora de início da aspiração do óleo	9 h 17 min
• Hora do fim da intervenção	19 h 30 min

CADERNO 2
(Não é permitido o uso de calculadora.)

5.1. $(x-1)^2+y^2+(z-2)^2=14 \wedge x=0 \wedge z=0 \Leftrightarrow y^2=9 \Leftrightarrow y=3 \vee y=-3$

Pontos de interseção da superfície esférica com o eixo Oy: $(0, 3, 0)$ e $(0, -3, 0)$.

A "nova" superfície esférica tem centro em $(0, 0, 0)$ e raio 3, sendo, então, definida pela equação: $x^2+y^2+z^2=9$.

Resposta: Opção **(B)** $x^2+y^2+z^2=9$

5.2 O centro da superfície esférica $(x-1)^2+y^2+(z-2)^2=14$ é $C(1, 0, 2)$.

O vetor $\overrightarrow{CA}$ é normal ao plano α.
$\overrightarrow{CA}=A-C=(-2, 1, 0)-(1, 0, 2)=(-3, 1, -2)$

O plano α é definido por uma equação do tipo $-3x+y-2z+d=0$, $d\in\mathbb{R}$ e passa em $A(-2, 1, 0)$.
Então, $-6+1-0+d=0$. Daqui resulta que $d=5$.
Equação do plano α: $-3x+y-2z+5=0$

O ponto P tem coordenadas $(0, 0, z)$ e pertence a α.

Então, $0+0-2z+5=0 \Leftrightarrow z=\frac{5}{2}$.

Assim, tem-se: $P\left(0, 0, \frac{5}{2}\right)$.

$$\overrightarrow{AP}=P-A=\left(0, 0, \frac{5}{2}\right)-(-2, 1, 0)=\left(2, -1, \frac{5}{2}\right)$$

Uma equação vetorial da reta AP é:

$(x, y, z)=A+k\overrightarrow{AP}, k\in\mathbb{R}$, ou seja, $(x, y, z)=(-2, 1, 0)+k\left(2, -1, \frac{5}{2}\right), k\in\mathbb{R}$

Resposta: $(x, y, z)=(-2, 1, 0)+k\left(2, -1, \frac{5}{2}\right), k\in\mathbb{R}$

6.1. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^2-2x-3}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^2}{x^2}=1$

A reta definida pela equação $y=1$ é assíntota horizontal quando $x\to-\infty$.

6.2. A função f é contínua em $x=-1$ sse $\lim\limits_{x\to-1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to-1^+} f(x)=f(-1)$.

- $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to -1^-} \dfrac{x^2-2x-3}{x^2-1} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim\limits_{x\to -1^-} \dfrac{(x+1)(x-3)}{(x-1)(x+1)} = \lim\limits_{x\to -1^{-1}} \dfrac{x-3}{x-1} = 2$

- $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to -1^+} \dfrac{-4x}{x+3} = 2$

- $f(-1) = \dfrac{-4\times(-1)}{-1+3} = \dfrac{4}{2} = 2$

Como $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = f(-1)$ fica provado que *f* é contínua em $x=-1$.

6.3. $f(x) > 1 \wedge x \in [-1, +\infty[\Leftrightarrow \dfrac{-4x}{x+3} > 1 \wedge x \geq -1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{-4x-x-3}{x+3} > 0 \wedge x \geq -1 \Leftrightarrow \dfrac{-5x-3}{x+3} > 0 \wedge x \geq -1$

x	-1		3	$+\infty$
$-5x-3$	$-$	$-$	0	$+$
$x+3$	$+$	$+$	$+$	$+$
$\dfrac{-5x-3}{x+3}$	$-$	$-$	0	$+$

$f(x) > 1 \wedge x \in [-1, +\infty[\Leftrightarrow x \in \left[-1, -\dfrac{3}{5}\right[$

Resposta: $x \in \left[-1, -\dfrac{3}{5}\right[$

7.1. $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to -1^+} \dfrac{x^2+x-2}{x+1} = \dfrac{-2}{0^+} = -\infty$

A reta $x=-1$ é assíntota vertical.

Assíntota oblíqua

$y = mx + b$

$m = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2+x-2}{x^2+x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2}{x^2} = 1$ $\qquad m=1$

$b = \lim\limits_{x\to+\infty} (f(x)-mx) = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{x^2+x-2}{x+1} - x\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2+x-2-x^2-x}{x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-2}{x^2} = 0$

A reta $y=x$ é assíntota oblíqua.

O ponto de interseção das assíntotas $x=-1$ e $y=x$ é $P(-1,-1)$.

Resposta: $P(-1,-1)$

7.2. $(g \circ f)(2) = g(f(2)) = g\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{\frac{4k}{3}+1}{4} = \frac{4k+3}{12}$

$(g \circ f)(2) = \frac{1}{6} \Leftrightarrow \frac{4k+3}{12} = \frac{1}{6} \Leftrightarrow 4k+3 = 2 \Leftrightarrow k = -\frac{1}{4}$

Resposta: Opção **(D)** $-\frac{1}{4}$

8.1. $\lim\limits_{x \to -1} \frac{g(x)-g(-1)}{x+1} = g'(-1) = \frac{0}{4} = 0$

Resposta: Opção **(C)** 0

8.2.

	$-\infty$	-1		1	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
g	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$

A função g no intervalo $]1, +\infty[$ é decrescente.

$3 < 5 \Rightarrow g(3) > g(5)$

Resposta: Opção **(D)** $g(3) > g(5)$

9. Sejam $x+1$ e x números reais cuja diferença é 1.
O seu produto é dado por $P(x) = x(x+1) = x^2 + x$.

$P'(x) = 2x+1$

$P'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x+1 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	$+\infty$
$P'(x)$	$-$	0	$+$
P	$\searrow$	$-\frac{1}{4}$	$\nearrow$

Resposta: O produto mínimo é $-\frac{1}{4}$.