	Cotações													
	1.ª Parte							2.ª Parte						
Questões	**1.**	**2.**	**3.**	**4.**	**5.**	**6.**	**7.**	**1.1.**	**1.2.**	**1.3.**	**2.**	**3.1.**	**3.2. a)**	**3.2. b)**	**3.2. c)**
Cotações	8	8	8	8	8	8	8	16	20	20	20	20	15	15	18

1.ª Parte

1. Como $\overline{AC} = \overline{BC}$, sabe-se que $C\hat{B}A = \theta$. Então $\beta = 180° - \theta$ e β é necessariamente a amplitude de um ângulo obtuso.

$\cos\beta = \cos(180° - \theta) = -\cos\theta$. Então, $\cos\beta + \cos\theta = 0$.

Opção (A)

2. Sabe-se que $\frac{3\pi}{4} < x < \pi$. Então, $0 < \sin x < \frac{\sqrt{2}}{2}$ e $-1 < \cos x < -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

A: $\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\cos x = \cos x \cos x = \cos^2 x > 0$,

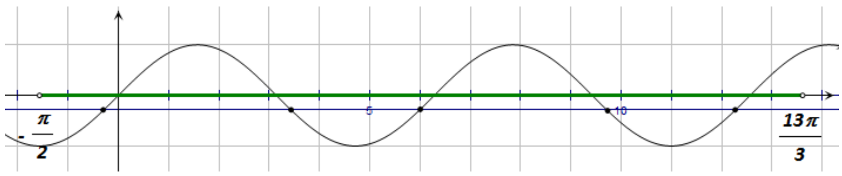
B: $\cos x \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \cos x \sin x < 0$, uma vez que $\sin x > 0$ e $\cos x < 0$;

C: $\sin x - \cos x > 0$, uma vez que $\sin x > 0$ e $\cos x < 0$;

D: $\sin(\pi + x)\cos(-x) = -\sin x \cos x > 0$

Opção (B)

3. $\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \frac{2}{7} \Leftrightarrow -\sin x = \frac{2}{7} \Leftrightarrow \Leftrightarrow \sin x = -\frac{2}{7}$



Em $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{13\pi}{3}\right[$ há 5 soluções.

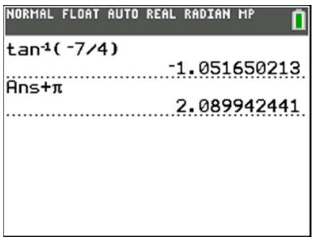
Opção (D)

4. $f(a)=k \Leftrightarrow a=\frac{7\pi}{4}+\frac{2k\pi}{3}$, com $k\in\mathbb{Z}$, ou seja, $a=\frac{21\pi+8k\pi}{12}$, $k\in\mathbb{Z}$.

Para $k=2$, tem-se $a=\frac{37\pi}{12}$.

Opção (C)

5. $7+4\tan(\alpha)=0 \Leftrightarrow \tan(\alpha)=-\frac{7}{4}$



Opção (A)

6. $2x-4y=3 \Leftrightarrow y=\frac{x}{2}-\frac{3}{4}$

Como o declive da reta é $\frac{1}{2}$, tem-se $\tan\theta=\frac{1}{2}$, sendo $\theta\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$.

Então, $1+\tan^2\theta=\frac{1}{\cos^2\theta}$, isto é, $1+\frac{1}{4}=\frac{1}{\cos^2\theta} \Leftrightarrow \cos^2\theta=\frac{4}{5} \Leftrightarrow \cos\theta=\frac{2\sqrt{5}}{5} \vee \cos\theta=-\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

Como $\theta\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$, $\cos\theta=\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

Opção (C)

7. $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}=13{,}5 \Leftrightarrow 6\times\overline{AD}\times\cos(180^\circ-\alpha)=13{,}5 \Leftrightarrow -6\times\overline{AD}\times\cos\alpha=13{,}5 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -6\times\overline{AD}\times(-0{,}75)=13{,}5 \Leftrightarrow \overline{AD}=\frac{13{,}5}{4{,}5} \Leftrightarrow \overline{AD}=3$

Então, o perímetro é dado por $2\times(6+3)=18$.

Opção (C)

2.ª Parte

1.1. $f(x)=1-2\sin\left(\frac{3x}{2}\right)$

$$f\left(x+\frac{4\pi}{3}\right)=1-2\sin\left(\frac{3\left(x+\frac{4\pi}{3}\right)}{2}\right) = 1-2\sin\left(\frac{3x}{2}+2\pi\right) = 1-2\sin\left(\frac{3x}{2}\right)=f(x)$$

Como $f\left(x+\frac{4\pi}{3}\right)=f(x)$, conclui-se que $\frac{4\pi}{3}$ é período da função.

1.2. $f(x)=0 \Leftrightarrow 1-2\sin\left(\frac{3x}{2}\right)=0 \Leftrightarrow \sin\left(\frac{3x}{2}\right)=\frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \frac{3x}{2}=\frac{\pi}{6}+2k\pi \vee \frac{3x}{2}=\pi-\frac{\pi}{6}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow 9x=\pi+12k\pi \vee 9x=5\pi+12k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow x=\frac{\pi+12k\pi}{9} \vee x=\frac{5\pi+12k\pi}{9},\ k\in\mathbb{Z}$

Para $k=0$ tem-se $x=\frac{\pi}{9} \vee x=\frac{5\pi}{9}$.

Para $k=1$, tem-se $x=\frac{13\pi}{9} \vee x=\frac{17\pi}{9}$.

Para $k=2$, tem-se $x=\frac{25\pi}{9} \vee x=\frac{29\pi}{9}$. Estes números já não pertencem a $[0, 2\pi]$.

Para $k=-1$, obtêm-se valores negativos.

Então, os zeros da função pertencentes ao intervalo $[0, 2\pi]$ são: $\frac{\pi}{9}, \frac{5\pi}{9}, \frac{13\pi}{9}, \frac{17\pi}{9}$

1.3. $\tan^2(2x)=f(\pi) \Leftrightarrow \tan^2(2x)=1-2\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) \Leftrightarrow \tan^2(2x)=3$

$\Leftrightarrow \tan(2x)=\sqrt{3} \vee \tan(2x)=-\sqrt{3} \Leftrightarrow 2x=\frac{\pi}{3}+k\pi \vee 2x=-\frac{\pi}{3}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{2} \vee x=-\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{2},\ k\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow x=\frac{\pi+3k\pi}{6} \vee x=\frac{-\pi+3k\pi}{6},\ k\in\mathbb{Z}$

2. $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB} = \overline{CA} \times \overline{CB} \times \cos A\hat{C}B$

Para determinar $\cos A\hat{C}B$, podemos recorrer ao Teorema de Carnot (lei dos cossenos).

$$\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{CB}^2 - 2 \times \overline{AC} \times \overline{CB} \times \cos A\hat{C}B \Leftrightarrow 7^2 = 4^2 + 5^2 - 2 \times 4 \times 5 \times \cos A\hat{C}B$$

$$\Leftrightarrow 49 = 16 + 25 - 40\cos A\hat{C}B \Leftrightarrow 40\cos A\hat{C}B = -8 \Leftrightarrow \cos A\hat{C}B = -\frac{8}{40} \Leftrightarrow \cos A\hat{C}B = -\frac{1}{5}$$

$\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB} = 4 \times 5 \times \left(-\frac{1}{5}\right) = -4$, como queríamos mostrar.

3.1 $f(x) = 2 - 2\cos x$

$$\cos\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = \frac{3}{7} \Leftrightarrow -\sin\alpha = \frac{3}{7} \Leftrightarrow \sin\alpha = -\frac{3}{7}$$

Pela Fórmula Fundamental da Trigonometria tem-se:

$$\frac{9}{49} + \cos^2\alpha = 1 \Leftrightarrow \cos^2\alpha = \frac{40}{49} \Leftrightarrow \cos\alpha = \frac{\sqrt{40}}{7} \vee \cos\alpha = -\frac{\sqrt{40}}{7} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos\alpha = \frac{2\sqrt{10}}{7} \vee \cos\alpha = -\frac{2\sqrt{10}}{7}$$

$$\alpha \in \left]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right[\Rightarrow \cos\alpha < 0. \text{ Então, } \cos\alpha = -\frac{2\sqrt{10}}{7}.$$

$$f(\alpha) = 2 - 2\cos\alpha = 2 - 2 \times \left(-\frac{2\sqrt{10}}{7}\right) = 2 + \frac{4\sqrt{10}}{7} = \frac{14 + 4\sqrt{10}}{7}$$

3.2. a) $P(\cos\theta, \sin\theta)$

Se $\theta = \frac{\pi}{3}$, tem-se $P\left(\cos\frac{\pi}{3}, \sin\frac{\pi}{3}\right)$, ou seja, $P\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

3.2.b) $B(1,0)$ e $P(\cos\theta, \sin\theta)$

$$\overline{PB} = \sqrt{(\cos\theta - 1)^2 + \sin^2\theta} = \sqrt{\cos^2\theta - 2\cos\theta + 1 + \sin^2\theta} = \sqrt{1 - 2\cos\theta + 1}$$

$$= \sqrt{2 - 2\cos\theta} = f(\theta)$$

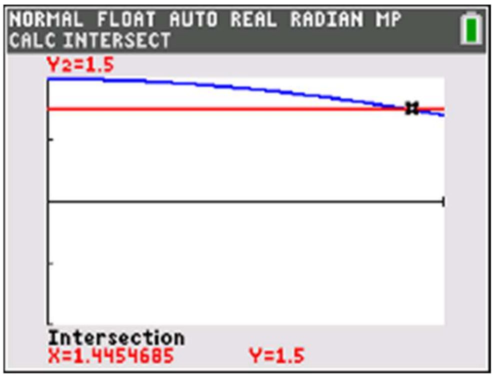
3.2.c) O triângulo [*ABP*] é retângulo em *B* pois está inscrito numa semicircunferência.

Pelo Teorema de Pitágoras tem-se: $\overline{AB}^2 + \overline{PB}^2 = 2^2 \Leftrightarrow \overline{AB}^2 + \left(\sqrt{2 - 2\cos\theta}\right)^2 = 4$

$$\Leftrightarrow \overline{AB}^2 + 2 - 2\cos\theta = 4 \Leftrightarrow \overline{AB} = \sqrt{2 + 2\cos\theta}$$

Na calculadora consideram-se as funções $y_1 = \sqrt{2 + 2\cos x}$ e $y_2 = 1{,}5$.

Atendendo a que $\theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, define-se uma janela adequada como a que se exemplifica a seguir, visualizando-se os gráficos.



Determina-se o ponto de interseção dos gráficos obtidos.

$\theta \approx 1,45$

FIM