**Teste de Matemática A**

2017 / 2018

Teste N.º 5

**Matemática A**

Duração do Teste (Caderno 1+ Caderno 2): 90 minutos

**11.º Ano de Escolaridade**

Nome do aluno: ________________________________________ N.º: __ Turma: ___

Este teste é constituído por **dois** cadernos:

- Caderno 1 – com recurso à calculadora;
- Caderno 2 – sem recurso à calculadora.

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta indelével, azul ou preta.

Não é permitido o uso de corretor. Em caso de engano, deve riscar de forma inequívoca aquilo que pretende que não seja classificado.

Escreva de forma legível a numeração dos itens, bem como as respetivas respostas. As respostas ilegíveis ou que não possam ser claramente identificadas são classificadas com zero pontos.

Para cada item, apresente apenas uma resposta. Se escrever mais do que uma resposta a um mesmo item, apenas é classificada a resposta apresentada em primeiro lugar.

As cotações encontram-se no final do enunciado da prova.

Para responder aos itens de escolha múltipla, não apresente cálculos nem justificações e escreva, na folha de respostas:

- o número do item;
- a letra que identifica a única opção escolhida.

Na resposta aos itens de resposta aberta, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias.

Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

**CADERNO 1: 45 MINUTOS**

**É PERMITIDO O USO DA CALCULADORA.**

**1.** Seja $f$ a função definida por $f(x) = -\frac{\pi}{2} + \text{arcsen}\,(3x)$.

Quais são, respetivamente, o domínio e o contradomínio desta função?

**(A)** $\left[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right]$ e $[-\pi, 0]$

**(B)** $\left[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right]$ e $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

**(C)** $[-3,3]$ e $[-\pi, 0]$

**(D)** $[-3,3]$ e $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

**2.** Quantas são as soluções da equação $10\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = 9$ que pertencem ao intervalo $\left[-\frac{2\pi}{3}, \frac{11\pi}{3}\right[$?

**(A)** $3$

**(B)** $4$

**(C)** $5$

**(D)** $6$

**3.** Seja $(a_n)$ a sucessão de números reais definida por:

$$\begin{cases} a_1 = -\dfrac{3}{2} \\ a_{n+1} = \dfrac{3a_n}{3-4a_n}, n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

**3.1.** Mostre, por indução, que $\forall n \in \mathbb{N}, a_n = \frac{3}{2-4n}$.

**3.2.** Estude, quanto à monotonia, a sucessão $(a_n)$.

**3.3.** Mostre que a sucessão $(a_n)$ é limitada.

**4.** Seja $g$ a função de domínio $[-9, +\infty[$ definida por:

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x^3 + 9x^2}}{x^2 - 3x} & \text{se} \quad x < 0 \\ 1 & \text{se} \quad x = 0 \\ \dfrac{1 - x^2}{2x^2 + x} & \text{se} \quad x > 0 \end{cases}$$

Resolva os itens 4.1. e 4.2. recorrendo a métodos analíticos, sem utilizar a calculadora.

**4.1.** Estude a função $g$ quanto à continuidade no ponto de abcissa $x = 0$.

**4.2.** Resolva, em $\mathbb{R}^+$, a condição $g(x) \leq \frac{1-x}{x}$ .

Apresente a sua resposta usando a notação de intervalos de números reais.

**4.3.** Considere, num referencial o.n. $Oxy$, a representação gráfica da função $h$, restrição da função $g$ a $\mathbb{R}^+$. Sabe-se que:

- $O$ é a origem do referencial;
- $A$ é o ponto de interseção do gráfico da função $h$ com o eixo $Ox$;
- $P$ é um ponto que se desloca ao longo do gráfico da função $h$.

Para cada posição do ponto $P$, considere o triângulo $[OAP]$.

Determine as abcissas dos pontos $P$, com arredondamento às décimas, para os quais a área do triângulo é igual a $\frac{1}{8}$.

Na sua resposta deve:

- determinar analiticamente a abcissa do ponto $A$;
- equacionar o problema;
- reproduzir o gráfico ou os gráficos das funções que tiver necessidade de visualizar na calculadora, devidamente identificado(s), incluindo o referencial.

**FIM DO CADERNO 1**

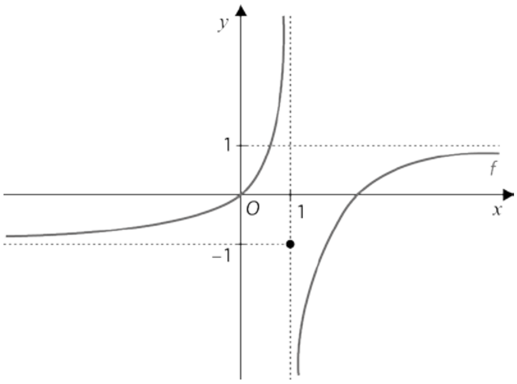
**COTAÇÕES (Caderno 1)**

| Item | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Cotação (em pontos)** | | | | | | | | |
| **1.** | **2.** | **3.1.** | **3.2.** | **3.3.** | **4.1.** | **4.2.** | **4.3.** | |
| 8 | 8 | 15 | 15 | 15 | 20 | 20 | 15 | **116** |

**CADERNO 2: 45 MINUTOS**

**NÃO É PERMITIDO O USO DA CALCULADORA.**

**5.** Na figura está parte da representação gráfica de uma função $f$ de domínio $\mathbb{R}$ e contínua em $\mathbb{R}\backslash\{1\}$.




Considere a sucessão de termo geral $u_n = \frac{n+1}{n+2}$. Indique o valor de $\lim_{n\to+\infty} f(u_n)$.

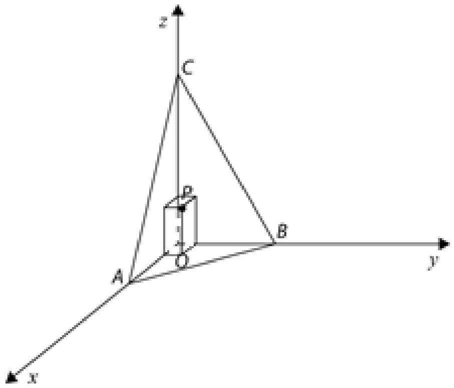
**(A)** $-1$

**(B)** $1$

**(C)** $-\infty$

**(D)** $+\infty$

**6.** Considere, num referencial o.n. $Oxyz$, a pirâmide triangular $[OABC]$.




Os pontos $A$, $B$ e $C$ pertencem aos semieixos positivos $Ox$, $Oy$ e $Oz$, respetivamente.

O ponto $P$, de abcissa $a$, com $a \in \left]0, \frac{9}{5}\right[$, pertence ao plano $ABC$.

O ponto $P$ desloca-se no plano $ABC$, de tal modo que é sempre vértice de um prisma quadrangular regular, em que os restantes vértices pertencem aos planos coordenados.

O plano $ABC$ é definido por $3x + 2y + z = 9$.

**6.1.** Mostre que a área total do prisma é dada, em função de $a$, por $A(a) = -18a^2 + 36a$.

**6.2.** Determine o valor de $a$ para o qual a área total do prisma é máxima.

**6.3.** Seja $D$ o ponto de coordenadas $(1, -1, 1)$.

Determine as coordenadas do ponto de interseção da reta $OD$ com o plano $ABC$.

**7.** Seja $(u_n)$ a sucessão definida por:

$$\begin{cases} 2^n & \text{se} \quad n \leq 2018 \\ \dfrac{(-1)^n}{n} & \text{se} \quad n > 2018 \end{cases}$$

Qual das afirmações seguintes é verdadeira?

**(A)** A sucessão $(u_n)$ é monótona.

**(B)** Não existe $\lim_{n \to +\infty} u_n$.

**(C)** $\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

**(D)** $\lim_{n \to +\infty} u_n = 0$.

**8.** Sejam $f$ e $g$ duas funções reais ambas de domínio $]-\infty, -1]$.

Sabe-se que:

- $\lim_{x \to -\infty} (f(x) - 2x + 1) = 0$;
- a função $g$ é definida por $g(x) = \frac{f(x)+x}{x-1}$.

Prove que o gráfico de $g$ tem uma assíntota horizontal e indique uma sua equação.

**9.** De uma função $f$, diferenciável em todo o seu domínio $\mathbb{R}$, sabe-se que a inclinação da reta tangente ao seu gráfico no ponto de abcissa $3$ é $45°$.

De uma função $g$, de domínio $]-\infty, 3[$, sabe-se que a reta de equação $x = 3$ é assíntota vertical ao seu gráfico.

O valor de $\lim_{x \to 3^-} \left( \frac{x^2-9}{f(x)-f(3)} + \frac{f(x)}{g(x)} \right)$ é:

**(A)** $0$ **(B)** $1$ **(C)** $6$ **(D)** $+\infty$

**FIM DO CADERNO 2**

**COTAÇÕES (Caderno 2)**

| Item | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Cotação (em pontos)** | | | | | | | |
| **5.** | **6.1.** | **6.2.** | **6.3.** | **7.** | **8.** | **9.** | |
| 8 | 15 | 15 | 15 | 8 | 15 | 8 | **84** |