TESTE N.º 5 – Proposta de resolução

Caderno 1

1. Opção (A)

$$D_f = \{x \in \mathbb{R}: -1 \le 3x \le 1\} = \left[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right]$$

Contradomínio de f:

$$-\frac{\pi}{2} \le \operatorname{arcsen}(3x) \le \frac{\pi}{2},\quad \forall x \in \left[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right]$$

$$\Leftrightarrow -\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} \le f(x) \le \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2},\quad \forall x \in \left[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right]$$

$$\Leftrightarrow -\pi \le f(x) \le 0,\quad \forall x \in \left[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right]$$

$$D'_f = [-\pi, 0]$$

Cálculo auxiliar

$$-1 \le 3x \le 1 \Leftrightarrow -\frac{1}{3} \le x \le \frac{1}{3}$$

2. Opção (D)

$$10\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = 9 \Leftrightarrow -10\operatorname{sen}(x) = 9$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{sen}(x) = -0{,}9$$

Cálculo auxiliar

$\operatorname{sen}\left(-\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ e $\operatorname{sen}\left(\frac{11\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

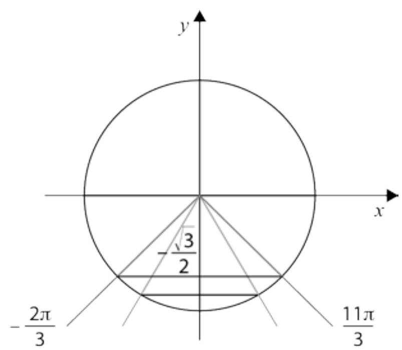
$-\frac{\sqrt{3}}{2} \approx -0{,}866$

Em $\left[-\frac{2\pi}{3}, 0\right[$ há duas soluções.

Em $[0, 2\pi[$ há duas soluções.

Em $\left[2\pi, \frac{11\pi}{3}\right[$ há duas soluções.

Logo, em $\left[-\frac{2\pi}{3}, \frac{11\pi}{3}\right[$ a equação admite seis soluções.



3.

3.1. $P(n): a_n = \frac{3}{2-4n}$

(i) $P(1)$ é verdadeira

$a_1 = \frac{3}{2-4} \Leftrightarrow a_1 = -\frac{3}{2}$, o que é verdadeiro.

(ii) $\forall n \in \mathbb{N}, P(n) \Rightarrow P(n+1)$ é verdadeira.

$P(n): a_n = \frac{3}{2-4n}$

$P(n+1): a_{n+1} = \frac{3}{2-4(n+1)}$

$$a_{n+1} = \frac{3a_n}{3-4a_n} \overset{\text{H.I.}}{=} \frac{3\times\frac{3}{2-4n}}{3-4\times\frac{3}{2-4n}} =$$

$$= \frac{\frac{9}{2-4n}}{\frac{3(2-4n)-12}{2-4n}} =$$

$$= \frac{9}{6-12n-12} =$$

$$= \frac{9}{-6-12n} =$$

$$= \frac{3}{-2-4n} =$$

$$= \frac{3}{2-4(n+1)}$$

Por (i) e (ii), pelo princípio de indução matemática, provou-se que $\forall n \in \mathbb{N}, a_n = \frac{3}{2-4n}$ é uma proposição verdadeira.

3.2. $a_{n+1} - a_n = \frac{3}{-2-4n} - \frac{3}{2-4n} =$

$$= \frac{3(2-4n)-3(-2-4n)}{(-2-4n)(2-4n)} =$$

$$= \frac{6-12n+6+12n}{(-2-4n)(2-4n)} =$$

$$= \frac{12}{(-2-4n)(2-4n)}$$

Como $-2-4n < 0, \forall n \in \mathbb{N}$ e $2-4n < 0, \forall n \in \mathbb{N}$, então $\frac{12}{(-2-4n)(2-4n)} > 0, \forall n \in \mathbb{N}$.

Logo, (a_n) é crescente.

3.3. Como (a_n) é crescente, então $a_1 \leq a_n, \forall n \in \mathbb{N}$, isto é, $-\frac{3}{2} \leq \frac{3}{2-4n}, \forall n \in \mathbb{N}$.

Por outro lado, $\frac{1}{2-4n} < 0, \forall n \in \mathbb{N}$.

Então, $\frac{3}{2-4n} < 0, \forall n \in \mathbb{N}$.

Provamos, assim, que $-\frac{3}{2} \leq a_n < 0, \forall n \in \mathbb{N}$, isto é, (a_n) é limitada.

4.

4.1. g é contínua em $x = 0$ sse existir $\lim_{x\to 0} g(x)$, isto é, $\lim_{x\to 0^-} g(x) = \lim_{x\to 0^+} g(x) = g(0)$.

$$\lim_{x\to 0^-} g(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{\sqrt{x^3+9x^2}}{x^2-3x} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x\to 0^-} \frac{|x|\sqrt{x+9}}{x(x-3)} =$$

$$= \lim_{x\to 0^-} \frac{-x\sqrt{x+9}}{x(x-3)} =$$

$$= \lim_{x\to 0^-} \frac{-\sqrt{x+9}}{x-3} =$$

$$= \frac{-3}{-3}$$

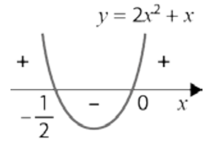
$$= 1$$

$\lim_{x\to 0^+} g(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{1-x^2}{2x^2+x} = \frac{1}{0^+} = +\infty$

Logo, g não é contínua em $x = 0$.

Cálculo auxiliar

$x(2x+1) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \ \vee \ x = -\frac{1}{2}$



4.2. Em $\mathbb{R}^+$: $g(x) = \frac{1-x^2}{2x^2+x}$

$$g(x) \le \frac{1-x}{x} \Leftrightarrow \frac{1-x^2}{2x^2+x} \le \frac{1-x}{x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1-x^2}{2x^2+x} - \frac{1-x}{x} \le 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1-x^2}{2x^2+x} - \frac{(1-x)(2x+1)}{x(2x+1)} \le 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1-x^2-(2x+1-2x^2-x)}{2x^2+x} \le 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1-x^2-2x-1+2x^2+x}{2x^2+x} \le 0$$

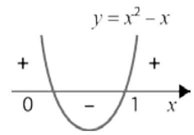
$$\Leftrightarrow \frac{x^2-x}{2x^2+x} \le 0$$

$$\Leftrightarrow 0 < x \le 1$$

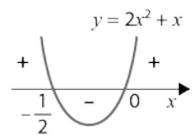
C.S. =]0, 1]

Cálculo auxiliar

$x^2 - x = 0 \Leftrightarrow x(x-1) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \ \vee \ x = 1$



$2x^2 + x = 0 \Leftrightarrow x(2x+1) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \ \vee \ x = -\frac{1}{2}$



x	0		1	$+\infty$
$x^2 - x$		$-$	0	$+$
$2x^2 + x$		$+$	$+$	$+$
$\frac{x^2 - x}{2x^2 + x}$		$-$	0	$+$

4.3.

- Abcissa do ponto *A*

  Em $\mathbb{R}^+$:

$$\frac{1-x^2}{2x^2+x} = 0 \Leftrightarrow 1 - x^2 = 0 \ \wedge \ 2x^2 + x \neq 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x = 1 \ \vee \ \underbrace{x = -1}_{\notin \mathbb{R}^+}\right) \wedge \left(x \neq 0 \ \wedge \ x \neq -\frac{1}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow x = 1$$

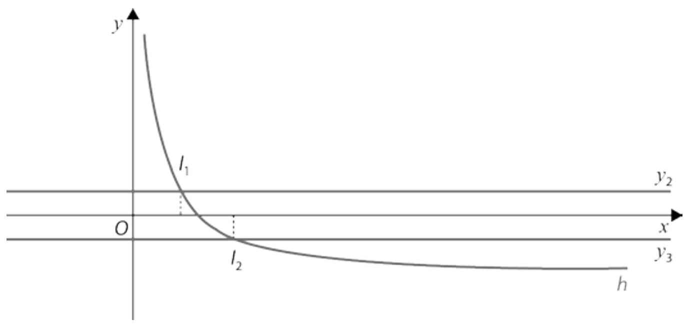
$A(1, 0)$

Seja x a abcissa do ponto P e, por conseguinte, $h(x)$ é a ordenada de P. $A_{[OAP]} = \frac{1 \times |h(x)|}{2}$

Assim, pretendemos determinar os valores de x tais que $\frac{|h(x)|}{2} = \frac{1}{8}$

$$\Leftrightarrow |h(x)| = \frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow h(x) = \frac{1}{4} \ \vee \ h(x) = -\frac{1}{4}$$



$y_1 = h(x)$

$y_2 = \frac{1}{4}$

$y_3 = -\frac{1}{4}$

$I_1\left(a, \frac{1}{4}\right)$ $\quad$ $I_2\left(b, -\frac{1}{4}\right)$

$a \approx 0{,}7$ $\quad$ $b \approx 1{,}7$

As abcissas dos pontos *P* são, aproximadamente, 0,7 e 1,7.

Caderno 2

5. Opção (D)

$\lim_{n \to +\infty} u_n = \lim_{n \to +\infty} \frac{n+1}{n+2} = \lim_{n \to +\infty} \frac{n+2-1}{n+2} = \lim_{n \to +\infty} \left(1 - \frac{1}{n+2}\right) = 1^-$

Sabemos que $\lim_{n \to +\infty} f(u_n) = \lim_{x \to 1^-} f(x)$, então, por observação do gráfico de f, $\lim_{n \to +\infty} f(u_n) = +\infty$.

6.

6.1. $P(a, a, c)$

Como *P* pertence ao plano *ABC*, vem que:

$3a + 2a + c = 9 \Leftrightarrow c = 9 - 5a$

Logo, $P(a, a, 9 - 5a)$

Como $a \in \left]0, \frac{9}{5}\right[$, então $a > 0$ e $9 - 5a > 0$, logo, estes valores são as medidas de comprimento das faces retangulares. Assim:

$A(a) = 2a^2 + 4a(9 - 5a) =$

$= 2a^2 + 36a - 20a^2 =$

$= -18a^2 + 36a$ c.q.d.

6.2. $A'(a) = -36a + 36$

$A'(a) = 0 \Leftrightarrow a = 1$

a	0		1		$\frac{9}{5}$
Sinal de A'	N.D.	$+$	0	$-$	N.D.
Variação de A	N.D.	↗	Máx.	↘	N.D.

A área total do prisma é máxima para $a = 1$.

6.3. $D(1,-1,1)$

$\overrightarrow{OD} = D - O = (1,-1,1)$

OD: $(x,y,z) = (0,0,0) + k(1,-1,1), k \in \mathbb{R}$

Logo, $(k,-k,k)$, com $k \in \mathbb{R}$, é um ponto genérico de OD.

Como procuramos um ponto de OD que também pertença ao plano ABC:

$3k - 2k + k = 9 \Leftrightarrow k = \frac{9}{2}$

Então, o ponto de interseção da reta OD com o plano ABC tem coordenadas $\left(\frac{9}{2}, -\frac{9}{2}, \frac{9}{2}\right)$.

7. Opção (D)

$u_{2018} = 2^{2018}$

$u_{2019} = -\frac{1}{2019}$

$u_{2020} = \frac{1}{2020}$

Como $u_{2018} > u_{2019}$ e $u_{2019} < u_{2020}$, concluímos que (u_n) não é monótona.

$\lim_{n\to+\infty}(u_n) = \lim_{n\to+\infty}\frac{(-1)^n}{n} = \lim\limits_{n\to+\infty}\left[(-1)^n \times \frac{1}{n}\right] = 0$, pois $-1 \leq (-1)^n \leq 1, \forall n \in \mathbb{N}$ e $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n} = 0$.

8. Sabemos que a reta de equação $y = 2x - 1$ é assíntota oblíqua ao gráfico de f quando $x \to -\infty$.

Então, vem que:

$\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} = 2$

Determinemos agora a assíntota horizontal ao gráfico de g quando $x \to -\infty$ (note-se que D_g é limitado superiormente):

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)+x}{x-1} = \lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{f(x)}{x}+1}{1-\frac{1}{x}} = \frac{\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{f(x)}{x}+1\right)}{\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)} = \frac{2+1}{1-0} = 3$$

Logo, a reta de equação $y = 3$ é assíntota horizontal ao gráfico de g.

9. Opção (C)

Sabemos que $m = \text{tg } 45^{\text{o}} = 1$. Então, $f'(3) = 1$.

Como a reta de equação $x = 3$ é assíntota vertical ao gráfico de g, então $\lim\limits_{x\to3^-} g(x) = \pm\infty$ e como f é diferenciável em $\mathbb{R}$, então f é contínua em $\mathbb{R}$, logo, $\lim_{x\to3^-} f(x) = f(3)$

Logo, $\lim\limits_{x\to3^-}\left[\left(\frac{x-3}{f(x)-f(3)}\right) \times (x+3)\right] + \lim\limits_{x\to3^-}\frac{f(x)}{g(x)} =$

$= \frac{1}{f'(3)} \times 6 + \frac{f(3)}{\pm\infty} = 6 + 0 = 6$