

Teste N.º 4

Matemática A

Duração do Teste (Caderno 1+ Caderno 2): 90 minutos

11.º Ano de Escolaridade

Nome do aluno: _____ N.º: ____ Turma: ____

Este teste é constituído por **dois** cadernos:

- Caderno 1 – com recurso à calculadora;
- Caderno 2 – sem recurso à calculadora.

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta indelével, azul ou preta.

Não é permitido o uso de corretor. Em caso de engano, deve riscar de forma inequívoca aquilo que pretende que não seja classificado.

Escreva de forma legível a numeração dos itens, bem como as respetivas respostas. As respostas ilegíveis ou que não possam ser claramente identificadas são classificadas com zero pontos.

Para cada item, apresente apenas uma resposta. Se escrever mais do que uma resposta a um mesmo item, apenas é classificada a resposta apresentada em primeiro lugar.

As cotações encontram-se no final do enunciado da prova.

Para responder aos itens de escolha múltipla, não apresente cálculos nem justificações e escreva, na folha de respostas:

- o número do item;
- a letra que identifica a única opção escolhida.

Na resposta aos itens de resposta aberta, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias.

Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

CADERNO 1: 45 MINUTOS
É PERMITIDO O USO DA CALCULADORA.



1. Seja f uma função periódica de período π .

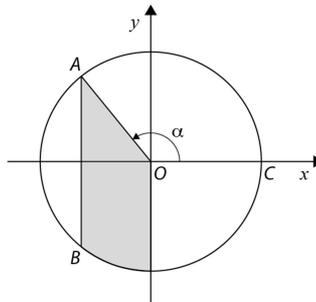
Qual das seguintes expressões pode definir a função f ?

- (A) $\sin x$
- (B) $\operatorname{tg} \left(\frac{1}{2} x \right)$
- (C) $\cos (2x)$
- (D) $\operatorname{arcsen} x$

2. Na figura está representada, num referencial o.n. Oxy , a circunferência de centro na origem e raio 2.

Sabe-se que:

- o ponto A está no segundo quadrante e pertence à circunferência;
- o ponto B pertence à circunferência e é tal que o segmento de reta $[AB]$ é paralelo ao eixo Oy ;
- o ponto C tem coordenadas $(2, 0)$;
- α é a amplitude, em radianos, do ângulo COA , com $\alpha \in \left] \frac{\pi}{2}, \pi \right[$.



2.1. Mostre que a área da região a sombreado é dada por:

$$f(\alpha) = 2\alpha - \pi - 4 \operatorname{sen}(\alpha)\cos(\alpha)$$

2.2. Determine, recorrendo à calculadora gráfica, o valor de α para o qual a área da região a sombreado é máxima.

Reproduza, num referencial, o gráfico da função que visualizar na calculadora e que permite resolver o problema.

Apresente o valor de α arredondado às milésimas.

3. Considere, num referencial o.n. Oxy , dois pontos distintos A e B .

Seja S o conjunto dos pontos P do plano que verificam a condição $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$.

Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

- (A) O conjunto S é a circunferência de diâmetro $[AB]$.
- (B) O conjunto S é a mediatriz do segmento de reta $[AB]$.
- (C) O conjunto S é a reta tangente à circunferência de diâmetro $[AB]$ em B .
- (D) O conjunto S é a reta perpendicular à reta AB em A .

4. Considere, num referencial o.n. $Oxyz$, o ponto $A(-1,0,2)$ e o plano α de equação $3x - y + 2z = 4$.
- 4.1. Escreva uma equação de um plano que passa no ponto A e é perpendicular ao plano α .
- 4.2. Escreva a equação reduzida da superfície esférica de centro A tangente ao plano α .
5. Considere a sucessão (u_n) definida por $u_n = \frac{3n+2}{n+4}$.
- Qual das seguintes afirmações é verdadeira?
- (A) 3 é máximo do conjunto de termos da sucessão (u_n) .
- (B) 1 é mínimo do conjunto de termos da sucessão (u_n) .
- (C) o conjunto de termos da sucessão (u_n) é majorado mas não minorado.
- (D) o conjunto de termos da sucessão (u_n) é minorado mas não majorado.
6. Considere a sucessão (v_n) que verifica $\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = 5 + v_n$.
- Sabe-se que a soma dos n primeiros termos desta sucessão é igual a 1085 e que o seu décimo termo é igual a 5.
- Determine, por processos analíticos, o valor de n .

FIM DO CADERNO 1

COTAÇÕES (Caderno 1)

| Item | | | | | | | | |
|---------------------|------|------|----|------|------|----|----|------------|
| Cotação (em pontos) | | | | | | | | |
| 1. | 2.1. | 2.2. | 3. | 4.1. | 4.2. | 5. | 6. | |
| 8 | 15 | 15 | 8 | 15 | 20 | 8 | 15 | 104 |

CADERNO 2: 45 MINUTOS
NÃO É PERMITIDO O USO DA CALCULADORA.

7. Considere num referencial o.n. Oxy :

- uma reta r de inclinação 150° ;
- uma reta s de inclinação α ;

Sabe-se que o quociente entre o declive da reta r e o declive da reta s é igual a $-\frac{2}{3}$.

O valor de $\sin^2 \alpha$ é:

- (A) $\frac{4}{7}$ (B) $\frac{3}{7}$ (C) $\frac{81}{93}$ (D) $\frac{12}{93}$

8. Considere, num referencial o.n. $Oxyz$, o plano α definido por:

$$(x, y, z) = (1, 1, -1) + k_1(2, 1, 2) + k_2(-1, 0, 1), \quad k_1, k_2 \in \mathbb{R}$$

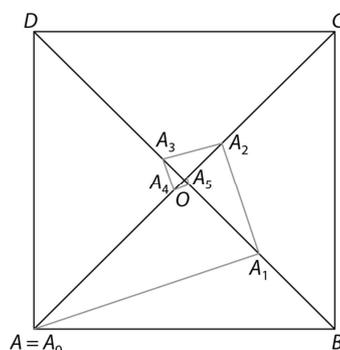
Seja β um plano paralelo a α .

Qual das condições seguintes pode ser uma equação do plano β ?

- (A) $2x + y + 2z = -1$
(B) $-x + z = 4$
(C) $x - 4y + z = 2$
(D) $x + y - z = 1$

9. Considere o quadrado $[ABCD]$ e as suas diagonais $[AC]$ e $[BD]$, cujo comprimento é igual a 4 unidades de comprimento.

Considere também a espiral de vértices $A = A_0, A_1, A_2, A_3, \dots$ como na figura e que distam do ponto O , centro do quadrado, respetivamente, $2, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \dots$



Seja C_n o comprimento da espiral $A_0A_1 \dots A_n$.

9.1. Determine o valor de C_3 .

9.2. Mostre que o comprimento da espiral C_n pode ser definido por $2\sqrt{5} - \sqrt{5} \times 2^{1-n}$.

9.3. Suponhamos que continuamos indefinidamente a espiral.

Determine o seu comprimento total.

10. Seja (a_n) a sucessão de números reais definida por:

$$\begin{cases} a_1 = -1 \\ a_{n+1} = \frac{2a_n}{2 - 3a_n}, n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

10.1. Mostre, por indução, que $\forall n \in \mathbb{N}, a_n = \frac{2}{1-3n}$.

10.2. Calcule $\lim \left(a_n \times \frac{\sqrt{n} - \sqrt{4n-1}}{2} \right)$.

FIM DO CADERNO 2

COTAÇÕES (Caderno 2)

| Item | | | | | | | |
|---------------------|----|------|------|------|-------|-------|-----------|
| Cotação (em pontos) | | | | | | | |
| 7. | 8. | 9.1. | 9.2. | 9.3. | 10.1. | 10.2. | |
| 8 | 8 | 15 | 15 | 15 | 20 | 15 | 96 |