TESTE N.º 4 – Proposta de resolução

Caderno 1

1. Opção (C)

$\cos\big(2(x+\pi)\big) = \cos(2x + 2\pi) = \cos(2x)\,, \forall x \in \mathbb{R}$

Note-se que nenhuma das outras funções definidas nas restantes opções admite período π:

$\text{sen}\,(x+\pi) = -\text{sen}\,x, \forall x \in \mathbb{R}$

$\text{tg}\,\left(\frac{1}{2}(x+\pi)\right) = \text{tg}\,\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\text{sen}\,\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{2}\right)}{\cos\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{2}\right)} = \frac{\cos\left(\frac{x}{2}\right)}{-\text{sen}\,\left(\frac{x}{2}\right)} = -\frac{1}{\text{tg}\,\left(\frac{x}{2}\right)}\,, \forall x \in \mathbb{R}\backslash\left\{x: x = \frac{\pi}{2} + k\pi\,,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

A função definida por $x \mapsto \text{arcsen}\,x$ não é periódica, pois o seu domínio é um conjunto limitado.

2.

2.1. Sabe-se que:

$A(2\cos\alpha, 2\text{sen}\alpha)$, com $2\cos\alpha < 0$ e $2\text{sen}\alpha > 0$

$B(2\cos\alpha, -2\text{sen}\alpha)$

A área a sombreado é igual à soma da área do triângulo $[OAB]$ com a área do setor circular de amplitude $\alpha - \frac{\pi}{2}$.

$$A_{[OAB]} = \frac{\overline{AB} \times |\text{abcissa de } A|}{2} = \frac{4\text{sen}\alpha \times (-2\cos\alpha)}{2} =$$
$$= -4\text{sen}\alpha\cos\alpha$$

amplitude		área
2π	______	4π
$\alpha - \frac{\pi}{2}$	______	x

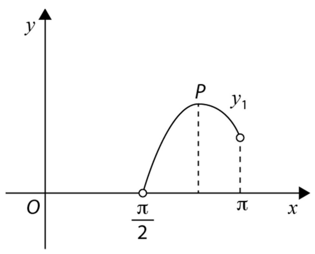
$$A_{\text{setor circular}} = \left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) \times 2 = 2\alpha - \pi$$

Logo:

$f(\alpha) = 2\alpha - \pi - 4\text{sen}\alpha\cos\alpha$, como se queria demonstrar.

2.2. Recorrendo às capacidades gráficas da calculadora e a uma janela de visualização adequada, obtém-se:

$y_1 = 2\alpha - \pi - 4\text{sen}\alpha\cos\alpha, \quad \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$



Seja $P(a, b)$ o ponto de ordenada máxima.

$\alpha \approx 2{,}618$

3. Opção (D)

4.

4.1. Sabe-se que $\vec{n}_\alpha(3,-1,2)$ é um vetor normal ao plano α.

Procura-se um vetor (a,b,c) tal que:

$(a,b,c).(3,-1,2)=0$, isto é:

$3a-b+2c=0 \Leftrightarrow 3a+2c=b$

Assim, se $a=1$ e $c=1$, então $b=5$.

O vetor de coordenadas $(1,5,1)$ é um vetor perpendicular ao vetor $\vec{n}_\alpha$. Assim, um plano perpendicular a α que contém o ponto A pode ser definido por:

$1(x+1)+5(y-0)+1(z-2)=0 \Leftrightarrow x+1+5y+z-2=0$

$\Leftrightarrow x+5y+z-1=0$

4.2. Considere-se a reta perpendicular ao plano α que contém o ponto A e uma sua equação vetorial:

$$(x,y,z)=(-1,0,2)+k(3,-1,2), k\in\mathbb{R}$$

Então, $(-1+3k,-k,2+2k)$, com $k\in\mathbb{R}$ são as coordenadas de um ponto genérico dessa reta.

Determine-se as coordenadas do ponto T, ponto de interseção dessa reta com o plano α:

$3(-1+3k)-(-k)+2(2+2k)=4 \Leftrightarrow -3+9k+k+4+4k=4$

$\Leftrightarrow 14k=3$

$\Leftrightarrow k=\frac{3}{14}$

Logo, $T\left(-1+\frac{9}{14},-\frac{3}{14},2+\frac{6}{14}\right)$, isto é, $T\left(-\frac{5}{14},-\frac{3}{14},\frac{34}{14}\right)$.

$T\left(-\frac{5}{14},-\frac{3}{14},\frac{34}{14}\right)$ é o ponto onde a superfície esférica é tangente ao plano α.

Logo:

$$r=\|\overrightarrow{AT}\|=\sqrt{\left(-\frac{5}{14}+1\right)^2+\left(-\frac{3}{14}\right)^2+\left(\frac{34}{14}-2\right)^2}=$$

$$=\sqrt{\frac{81}{196}+\frac{9}{196}+\frac{9}{49}}=$$

$$=\sqrt{\frac{9}{14}}$$

Assim, $(x+1)^2+y^2+(z-2)^2=\frac{9}{14}$ é a equação reduzida da superfície esférica pedida.

5. Opção (B)

$$\begin{array}{r|l} 3n+2 & n+4 \\ \cline{2-2} -3n-12 & 3 \\ \hline -10 & \end{array}$$

$u_n=3+\frac{-10}{n+4}$

Por um lado:

$$n \geq 1, \forall n \in \mathbb{N}$$

$$n + 4 \geq 5, \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\frac{10}{n+4} \leq 2,\ \ \forall n \in \mathbb{N}$$

$$-2 \leq -\frac{10}{n+4}, \forall n \in \mathbb{N}$$

$$1 \leq 3 + \frac{-10}{n+4}, \forall n \in \mathbb{N}$$

Por outro lado, $3 - \frac{10}{n+4} < 3, \forall n \in \mathbb{N}$, pois $\frac{10}{n+4} > 0, \forall n \in \mathbb{N}$.

Provou-se assim que $1 \leq u_n < 3, \forall n \in \mathbb{N}$.

Concluímos que 1 é o mínimo do conjunto de termos da sucessão (u_n), 3 não é máximo do conjunto de termos da sucessão (u_n), pois 3 não é termo da sucessão e o conjunto de termos da sucessão (u_n) é minorado e majorado.

6. (v_n) é uma progressão aritmética de razão 5.

Então, $v_n = v_{10} + (n - 10) \times 5$, isto é:

$$v_n = 5 + 5n - 50 \Leftrightarrow v_n = 5n - 45$$

Assim, $v_1 = 5 - 45 = -40$ e tem-se que:

$$\frac{v_1 + v_n}{2} \times n = 1085 \Leftrightarrow \frac{-40 + 5n - 45}{2} \times n = 1085$$

$$\Leftrightarrow (-85 + 5n) \times n = 2170$$

$$\Leftrightarrow 5n^2 - 85n - 2170 = 0$$

$$\Leftrightarrow n^2 - 17n - 434 = 0$$

$$\Leftrightarrow n = \frac{17 \pm \sqrt{17^2 - 4 \times (-434)}}{2}$$

$$\Leftrightarrow n = -14 \quad \vee \quad n = 31$$

Como $n \in \mathbb{N}$, então $n = 31$.

Caderno 2

7. Opção (B)

Sabe-se que $m_r = \mathrm{tg}150° = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ e $m_s = \mathrm{tg}\alpha$.

Sabe-se, também, que:

$$\frac{-\frac{\sqrt{3}}{3}}{\mathrm{tg}\alpha} = -\frac{2}{3} \Leftrightarrow \frac{-\frac{\sqrt{3}}{3}}{-\frac{2}{3}} = \mathrm{tg}\alpha \Leftrightarrow \mathrm{tg}\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$1 + \text{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$, logo:

$1 + \frac{3}{4} = \frac{1}{\cos^2\alpha} \Leftrightarrow \frac{7}{4} = \frac{1}{\cos^2\alpha}$

$\Leftrightarrow \cos^2\alpha = \frac{4}{7}$

$\text{sen}^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha$, logo:

$\text{sen}^2\alpha = 1 - \frac{4}{7} \Leftrightarrow \text{sen}^2\alpha = \frac{3}{7}$

8. Opção (C)

Como α e β são paralelos, então os vetores normais a α e β são colineares.

Comece-se por determinar um vetor normal a α.

Seja $\vec{n}_\alpha(a, b, c)$ é um vetor normal a α:

$$\begin{cases} (a,b,c).(2,1,2) = 0 \\ (a,b,c).(-1,0,1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a + b + 2c = 0 \\ -a + c = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_} \\ a = c \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2c + b + 2c = 0 \\ a = c \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b = -4c \\ a = c \end{cases}$$

Os vetores de coordenadas do tipo $(c, -4c, c)$, com $c \in \mathbb{R}$ são normais ao plano α.

Se $c = 1$, por exemplo, $\vec{n}(1, -4, 1)$.

Assim, o plano definido por $x - 4y + z = 2$ é (estritamente) paralelo a α ou coincidente.

Vamos averiguar se o ponto de coordenadas $(1, 1, -1)$ pertence ao plano definido por $x - 4y + z = 2$:

$1 - 4 - 1 = 2 \Leftrightarrow -4 = 2$, que é uma proposição falsa, logo o ponto de coordenadas $(1, 1, -1)$ não pertence ao plano definido por $x - 4y + z = 2$.

O plano β pode ser definido por esta condição.

Nas restantes opções as equações apresentadas definem planos não paralelos a α.

9.

9.1. $C_3 = \overline{A_0A_1} + \overline{A_1A_2} + \overline{A_2A_3} =$

$$= \sqrt{2^2 + 1^2} + \sqrt{1^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} + \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{5} + \sqrt{\frac{5}{4}} + \sqrt{\frac{5}{16}} =$$

$$= \sqrt{5} + \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{\sqrt{5}}{4} =$$

$$= \frac{7\sqrt{5}}{4}$$

9.2. Seja (a_n) a sucessão cujos termos são os comprimentos $\overline{A_0A_1}$, $\overline{A_1A_2}$, $\overline{A_2A_3}$, $\ldots$, $\overline{A_{n-1}A_n}$, ...

$a_n = \overline{A_{n-1}A_n}$

$a_1 = \sqrt{5}$; $a_2 = \frac{\sqrt{5}}{2}$; $a_3 = \frac{\sqrt{5}}{4}$; $\ldots$

(a_n) é uma progressão geométrica de primeiro termo igual a $\sqrt{5}$ e razão $\frac{1}{2}$.

Assim, C_n representa a soma de n termos de uma progressão geométrica:

$$C_n = \sqrt{5} \times \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}} =$$

$$= \sqrt{5} \times \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{\frac{1}{2}} =$$

$$= 2\sqrt{5}(1-2^{-n}) =$$

$$= 2\sqrt{5} - \sqrt{5} \times 2^{1-n}$$

9.3. $\lim C_n = \lim\left(2\sqrt{5} - \sqrt{5} \times 2^{1-n}\right) =$

$$= \lim\left(2\sqrt{5} - \frac{\sqrt{5}\times 2}{2^n}\right) =$$

$$= 2\sqrt{5} - \frac{\sqrt{5}\times 2}{+\infty} =$$

$$= 2\sqrt{5} - 0 =$$

$$= 2\sqrt{5}$$

10.

10.1. $P(n): a_n = \frac{2}{1-3n}$

(i) $P(1)$ é verdadeira:

$a_1 = \frac{2}{1-3} \Leftrightarrow -1 = \frac{2}{-2} \Leftrightarrow -1 = -1$, o que é verdade.

(ii) $\forall n \in \mathbb{N}, P(n) \Rightarrow P(n+1)$ é verdadeira:

$P(n): a_n = \frac{2}{1-3n}$ (hipótese de indução)

$P(n+1): a_{n+1} = \frac{2}{1-3(n+1)}$ (tese de indução)

$$a_{n+1} = \frac{2a_n}{2-3a_n} \underbrace{=}_{\text{hipótese de indução}} \frac{2\times\frac{2}{1-3n}}{2-3\times\frac{2}{1-3n}} =$$

$$= \frac{\frac{4}{1-3n}}{2-\frac{6}{1-3n}} = \frac{\frac{4}{1-3n}}{\frac{2-6n-6}{1-3n}} =$$

$$= \frac{4}{-4-6n} = \frac{2}{-2-3n} =$$

$$= \frac{2}{1-3(n+1)}$$

Por (i) e (ii), pelo princípio de indução matemática, provou-se que $\forall n \in \mathbb{N}, a_n = \frac{2}{1-3n}$ é uma proposição verdadeira.

10.2. $\lim\left(a_n \times \frac{\sqrt{n}-\sqrt{4n-1}}{2}\right) = \lim\left(\frac{2}{1-3n} \times \frac{\sqrt{n}-\sqrt{4n-1}}{2}\right) =$

$$= \lim \frac{\sqrt{n}-\sqrt{4n-1}}{1-3n} =$$

$$= \lim \frac{n-(4n-1)}{(1-3n)(\sqrt{n}+\sqrt{4n-1})} =$$

$$= \lim \frac{-3n+1}{(1-3n)(\sqrt{n}+\sqrt{4n-1})} =$$

$$= \lim \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{4n-1}} =$$

$$= \frac{1}{+\infty} =$$

$$= 0$$