

Teste N.º 3

Matemática A

Duração do Teste (Caderno 1+ Caderno 2): 90 minutos

11.º Ano de Escolaridade

Nome do aluno: _____ N.º: ____ Turma: ____

Este teste é constituído por **dois** cadernos:

- Caderno 1 – com recurso à calculadora;
- Caderno 2 – sem recurso à calculadora.

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta indelével, azul ou preta.

Não é permitido o uso de corretor. Em caso de engano, deve riscar de forma inequívoca aquilo que pretende que não seja classificado.

Escreva de forma legível a numeração dos itens, bem como as respetivas respostas. As respostas ilegíveis ou que não possam ser claramente identificadas são classificadas com zero pontos.

Para cada item, apresente apenas uma resposta. Se escrever mais do que uma resposta a um mesmo item, apenas é classificada a resposta apresentada em primeiro lugar.

As cotações encontram-se no final do enunciado da prova.

Para responder aos itens de escolha múltipla, não apresente cálculos nem justificações e escreva, na folha de respostas:

- o número do item;
- a letra que identifica a única opção escolhida.

Na resposta aos itens de resposta aberta, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias.

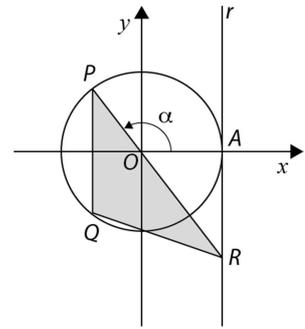
Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

CADERNO 1: 45 MINUTOS
É PERMITIDO O USO DA CALCULADORA.



1. Na figura estão representadas, num referencial o.n. Oxy , a circunferência trigonométrica e a reta r . Sabe-se que:

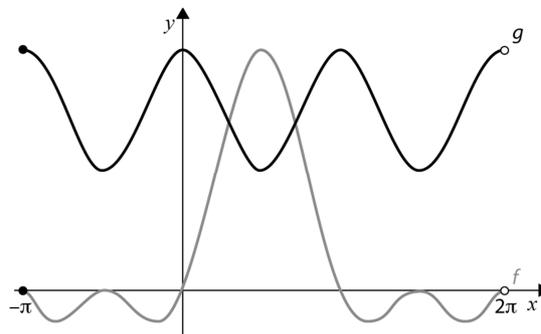
- o ponto A tem coordenadas $(1,0)$;
- a reta r é tangente à circunferência no ponto A ;
- o ponto P está no segundo quadrante e pertence à circunferência;
- o ponto Q pertence à circunferência e é tal que o segmento de reta $[PQ]$ é paralelo ao eixo Oy ;
- o ponto R é o ponto de interseção da reta r com a semirreta $\dot{P}O$;
- α é a amplitude, em radianos, do ângulo AOP , com $\alpha \in \left] \frac{\pi}{2}, \pi \right[$.



A área do triângulo $[PQR]$ é dada, em função de α , por:

- (A) $\text{sen } \alpha - \text{sen} \alpha \cos \alpha$
- (B) $\text{sen } \alpha + \text{sen} \alpha \cos \alpha$
- (C) $\text{sen } \alpha \times (1 - \text{tg } \alpha)$
- (D) $\text{sen } \alpha \times (1 + \text{tg } \alpha)$

2. No referencial seguinte estão representados os gráficos das funções f e g , definidos no intervalo $[-\pi, 2\pi[$ por $f(x) = \text{sen}^2 x + \text{sen } x$ e $g(x) = 1 + \cos^2 x$.



2.1. Recorrendo às capacidades gráficas da sua calculadora, determine as soluções inteiras da inequação $f(x) > g(x)$.

Na sua resposta reproduza, num referencial, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora que lhe permite(m) resolver o problema e deve assinalar, no(s) gráfico(s), o(s) ponto(s) relevante(s), bem como as suas coordenadas arredondadas às centésimas.

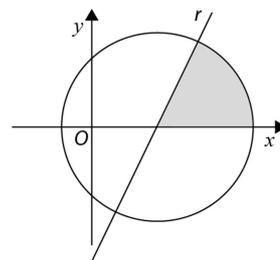
2.2. Os pontos P e Q pertencentes, respetivamente, aos gráficos de f e de g têm a mesma abcissa e distam uma unidade. Determine todos os pares de pontos P e Q destes gráficos que gozam da mesma propriedade.

3. Considere num referencial o.n. Oxy :

- a reta r definida por $y = 2x - 2$;
- a circunferência definida por $(x - 1)^2 + y^2 = 2$.

A área do setor circular, representado a sombreado, é, com aproximação às milésimas, igual a:

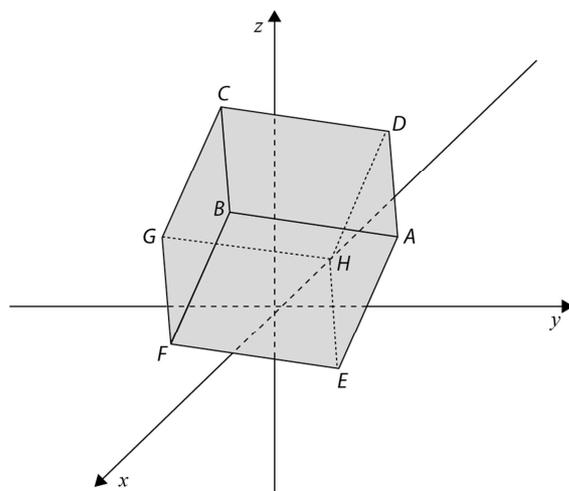
- (A) 2,214
- (B) 1,107
- (C) 0,554
- (D) 0,272



4. Na figura está representado, num referencial o.n. $Oxyz$, o cubo $[ABCDEFGH]$.

Admita que:

- o plano ABF é definido por $3x + y - \frac{3}{2}z - 12 = 0$;
- o ponto D tem coordenadas $(-2, 4, 7)$;
- o vetor \overrightarrow{CG} tem coordenadas $(-2a, -3a, -6a)$, com $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.



4.1. Determine uma equação cartesiana do plano DCG .

4.2. Determine o volume do cubo $[ABCDEFGH]$.

4.3. O ponto P é a interseção do plano ABC com o eixo Oz e o ponto Q é a interseção do plano ABF com o eixo Ox . Determine o valor exato de \overline{PQ} .

5. Sabendo que α é agudo, $\sin \alpha - \cos \alpha = \frac{1}{3}$, determine o valor exato de $\operatorname{tg}^2 \alpha - \frac{1}{\operatorname{tg}^2 \alpha}$.

FIM DO CADERNO 1

COTAÇÕES (Caderno 1)

Item								
Cotação (em pontos)								
1.	2.1.	2.2.	3.	4.1.	4.2.	4.3.	5.	
8	15	20	8	15	20	20	20	126

CADERNO 2: 45 MINUTOS
NÃO É PERMITIDO O USO DA CALCULADORA.

6. Qual é o valor exato de $\operatorname{tg}\left(\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)\right) - \operatorname{sen}\left(\arcsen\left(-\frac{1}{3}\right)\right)$?

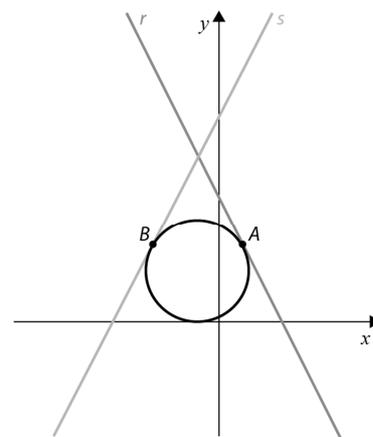
(A) $\sqrt{3} + \frac{1}{3}$

(B) $\sqrt{3} - \frac{1}{3}$

(C) $-\sqrt{3} - \frac{1}{3}$

(D) $-\sqrt{3} + \frac{1}{3}$

7. Na figura estão representadas, num plano munido de um referencial ortonormado Oxy , duas retas r e s , tangentes a uma circunferência de centro C nos pontos $A(1,3)$ e $B(-3,3)$, respetivamente. Sabendo que as retas são definidas por $r: y + 2x = 5$ e $s: y - 2x - 9 = 0$, determine o valor do perímetro da circunferência.



8. Seja (a_n) uma sucessão limitada.

Qual das seguintes afirmações é necessariamente verdadeira?

(A) (a_n) é convergente.

(B) (a_n) é monótona.

(C) Existe um número real positivo L tal que $\forall n \in \mathbb{N}, |a_n| \leq L$.

(D) Existe um número real positivo L tal que $\forall n \in \mathbb{N}, a_n \leq L$.

9. Seja (b_n) a sucessão definida por:

$$\begin{cases} b_1 = 2 \\ b_{n+1} = \frac{3 + b_n}{2}, n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

9.1. Mostre, por indução, que $\forall n \in \mathbb{N}, b_n < 3$.

9.2. Deduza da alínea anterior que (b_n) é crescente.

10. Seja (c_n) a sucessão definida por $c_n = \sum_{k=0}^n \frac{k}{n^2}$.

O valor $\lim c_n$ é:

(A) 0

(B) $\frac{1}{2}$

(C) 1

(D) $+\infty$

FIM DO CADERNO 2

COTAÇÕES (Caderno 2)

Item						
Cotação (em pontos)						
6.	7.	8.	9.1.	9.2.	10.	
8	20	8	15	15	8	74