TESTE N.º 3 – Proposta de resolução

Caderno 1

1. Opção (A)

Sabemos que $P(\cos\alpha, \operatorname{sen}\alpha)$, $\cos\alpha < 0$ e $\operatorname{sen}\alpha > 0$, pois P está no segundo quadrante.

Então, a base do triângulo $[PQR]$ é igual a $2\operatorname{sen}\alpha$ e a altura é igual a $1 + (-\cos\alpha) = 1 - \cos\alpha$.

Logo, a área do triângulo $[PQR]$ é igual a:

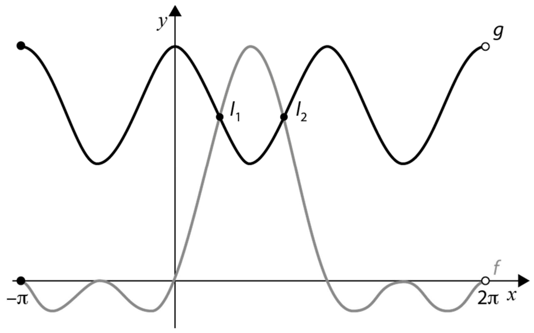
$$\frac{2\operatorname{sen}\alpha \times (1 - \cos\alpha)}{2} = \operatorname{sen}\alpha - \operatorname{sen}\alpha\cos\alpha$$

2.

2.1. $y_1 = \operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen} x$

$y_2 = 1 + \cos^2 x$

Recorrendo às capacidades gráficas da calculadora, obtemos:



$I_1(a, b)$
$a \approx 0{,}90 \quad b \approx 1{,}39$

$I_2(c, d)$
$c \approx 2{,}25 \quad d \approx 1{,}39$

As soluções inteiras da inequação $f(x) > g(x)$ são 1 e 2.

2.2. $|\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen} x - 1 - \cos^2 x| = 1 \Leftrightarrow |\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen} x - 1 - 1 + \operatorname{sen}^2 x| = 1$

$\Leftrightarrow |2\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen} x - 2| = 1$

$\Leftrightarrow 2\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen} x - 2 = 1 \ \vee \ 2\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen} x - 2 = -1$

$\Leftrightarrow 2\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen} x - 3 = 0 \ \vee \ 2\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen} x - 1 = \mathbf{0}$

$\Leftrightarrow \operatorname{sen} x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4 \times 2 \times (-3)}}{4} \vee \operatorname{sen} x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4 \times 2 \times (-1)}}{4}$

$\Leftrightarrow \underbrace{\operatorname{sen} x = -\frac{3}{2}}_{\text{eq. impossível}} \ \vee \ \operatorname{sen} x = 1 \ \vee \ \operatorname{sen} x = -1 \ \vee \ \operatorname{sen} x = \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \ \vee x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \ \vee x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \ \vee x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Em $[-\pi, 2\pi[$: $x = -\frac{\pi}{2}, x = \frac{\pi}{6}, x = \frac{\pi}{2}, x = \frac{5\pi}{6}$ e $x = \frac{3\pi}{2}$

Os pares de pontos P e Q destes gráficos que gozam desta propriedade são:

• $P_1\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$ e $Q_1\left(-\frac{\pi}{2}, 1\right)$

- $P_2\left(\frac{\pi}{6},\frac{3}{4}\right)$ e $Q_2\left(\frac{\pi}{6},\frac{7}{4}\right)$
- $P_3\left(\frac{\pi}{2},2\right)$ e $Q_3\left(\frac{\pi}{2},1\right)$
- $P_4\left(\frac{5\pi}{6},\frac{3}{4}\right)$ e $Q_4\left(\frac{5\pi}{6},\frac{7}{4}\right)$
- $P_5\left(\frac{3\pi}{2},0\right)$ e $Q_5\left(\frac{3\pi}{2},1\right)$

3. Opção (B)

$m_r = 2$ (declive da reta r)

$\text{tg}\alpha = 2$, logo $\alpha \approx 1{,}107\text{ rad}$ (inclinação da reta r)

Logo, a área do setor circular á dada por:

2π______________2π

$1{,}107$_____________x

$x \approx 1{,}107$

4.

4.1. O plano DCG é paralelo ao plano ABF (o vetor de coordenadas (6, 2, -3) é perpendicular aos dois planos) e contém o ponto D, logo pode ser definido pela condição:

$6(x+2)+2(y-4)-3(z-7)=0$, isto é:

$6x+12+2y-8-3z+21=0 \Leftrightarrow 6x+2y-3z+25=0$

4.2. Comecemos por definir a reta DA, perpendicular ao plano ABF:

$$(x,y,z)=(-2,4,7)+k(6,2,-3), k\in\mathbb{R}$$

Então:

$(-2+6k,4+2k,7-3k)$, com $k\in\mathbb{R}$ é um ponto genérico da reta DA.

Determinemos as coordenadas de A, ponto de interseção da reta DA com o plano ABF:

$$\begin{aligned}6(-2+6k)+2(4+2k)-3(7-3k)-24=0 &\Leftrightarrow -12+36k+8+4k-21+9k-24=0\\ &\Leftrightarrow 49k=49\\ &\Leftrightarrow k=1\end{aligned}$$

Logo, $A(-2+6,4+2,7-3)$, isto é, $A(4,6,4)$.

É possível, então, determinar o valor da aresta do cubo:

$d(A,D)=\sqrt{(4+2)^2+(6-4)^2+(4-7)^2}=\sqrt{36+4+9}=\sqrt{49}=7$

Logo, o volume do cubo é igual a $7^3 = 343$ unidades de volume.

4.3. Determinemos uma condição que defina o plano ABC. Como $\overrightarrow{CG}$ é um vetor perpendicular ao plano ABC e $D(-2,4,7)$ pertence ao plano, então pode ser definido por:

$$-2(x+2)-3(y-4)-6(z-7)=0$$

ou seja:

$-2x-4-3y+12-6z+42=0 \Leftrightarrow -2x-3y-6z+50=0$

Sabemos que P admite coordenadas $(0,0,c)$, $c \in \mathbb{R}$ e pertence ao plano ABC, logo:

$-2\times 0-3\times 0-6c+50=0 \Leftrightarrow c=\frac{50}{6} \Leftrightarrow c=\frac{25}{3}$

$P\left(0,0,\frac{25}{3}\right)$

Sabemos, também, que Q admite coordenadas $(a,0,0)$, $a \in \mathbb{R}$ e pertence ao plano ABF, logo:

$3a+0-\frac{3}{2}\times 0-12=0 \Leftrightarrow 3a=12 \Leftrightarrow a=4$

$Q(4,0,0)$

Assim:

$\overline{PQ}=\sqrt{4^2+0^2+\left(-\frac{25}{3}\right)}=$

$=\sqrt{16+\frac{625}{9}}=$

$=\sqrt{\frac{769}{9}}=$

$=\frac{\sqrt{769}}{3}$

5. Por um lado:

$\text{sen}\alpha-\cos\alpha=\frac{1}{3} \Rightarrow (\text{sen}\alpha-\cos\alpha)^2=\frac{1}{9}$

$\Leftrightarrow \text{sen}^2\alpha-2\text{sen}\alpha\cos\alpha+\cos^2\alpha=\frac{1}{9}$

$\Leftrightarrow 1-2\text{sen}\alpha\cos\alpha=\frac{1}{9}$

$\Leftrightarrow -2\text{sen}\alpha\cos\alpha=-\frac{8}{9}$

$\Leftrightarrow \text{sen}\alpha\cos\alpha=\frac{4}{9}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}\text{sen}\alpha-\cos\alpha=\frac{1}{3}\\ \text{sen}\alpha\cos\alpha=\frac{4}{9}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\text{sen}\alpha=\frac{1}{3}+\cos\alpha\\ \left(\frac{1}{3}+\cos\alpha\right)\cos\alpha=\frac{4}{9}\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}\overline{\frac{1}{3}\cos\alpha+\cos^2\alpha=\frac{4}{9}}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\overline{9\cos^2\alpha+3\cos\alpha-4=0}\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}\overline{\cos\alpha=\frac{-3\pm\sqrt{9-4\times 9\times(-4)}}{18}}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\overline{\cos\alpha=-\frac{1}{6}-\frac{\sqrt{17}}{6}}\end{cases} \vee \begin{cases}\overline{\cos\alpha=-\frac{1}{6}+\frac{\sqrt{17}}{6}}\end{cases}$

Como α é agudo, $\cos\alpha = -\frac{1}{6} + \frac{\sqrt{17}}{6}$ e, então, $\operatorname{sen}\alpha = \frac{1}{6} + \frac{\sqrt{17}}{6}$.

Por outro lado:

$$\operatorname{tg}^2\alpha - \frac{1}{\operatorname{tg}^2\alpha} = \frac{\operatorname{sen}^2\alpha}{\cos^2\alpha} - \frac{\cos^2\alpha}{\operatorname{sen}^2\alpha} =$$

$$= \frac{\operatorname{sen}^4\alpha - \cos^4\alpha}{(\cos\alpha\operatorname{sen}\alpha)^2} =$$

$$= \frac{(\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha)(\operatorname{sen}^2\alpha - \cos^2\alpha)}{(\cos\alpha\operatorname{sen}\alpha)^2} =$$

$$= \frac{(\operatorname{sen}\alpha - \cos\alpha)(\operatorname{sen}\alpha + \cos\alpha)}{(\cos\alpha\operatorname{sen}\alpha)^2}$$

Substituindo pelos valores acima, obtemos:

$$= \frac{\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{6}+\frac{\sqrt{17}}{6}-\frac{1}{6}+\frac{\sqrt{17}}{6}\right)}{\left(\frac{4}{9}\right)^2} =$$

$$= \frac{\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{17}}{3}}{\frac{16}{81}} =$$

$$= \frac{\sqrt{17}\times 81}{16\times 9} =$$

$$= \frac{9\sqrt{17}}{16}$$

Outro processo

$\operatorname{sen}\alpha - \cos\alpha = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \operatorname{sen}\alpha = \frac{1}{3} + \cos\alpha$

Sabemos que $\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$. Então:

$$\left(\frac{1}{3} + \cos\alpha\right)^2 + \cos^2\alpha = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{9} + \frac{2}{3}\cos\alpha + \cos^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

$$\Leftrightarrow 2\cos^2\alpha + \frac{2}{3}\cos\alpha - \frac{8}{9} = 0$$

$$\Leftrightarrow 18\cos^2\alpha + 6\cos\alpha - 8 = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos\alpha = \frac{-6\pm\sqrt{36-4\times 18\times(-8)}}{36}$$

$$\Leftrightarrow \cos\alpha = -\frac{1}{6} - \frac{\sqrt{17}}{6} \ \vee\ \cos\alpha = -\frac{1}{6} + \frac{\sqrt{17}}{6}$$

Como α é agudo, $\cos\alpha = -\frac{1}{6} + \frac{\sqrt{17}}{6}$.

$$\cos^2\alpha = \left(-\frac{1}{6} + \frac{\sqrt{17}}{6}\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{36} - \frac{\sqrt{17}}{18} + \frac{17}{36} =$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{17}}{18}$$

Sabemos que $1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$, logo:

$$\text{tg}^2\alpha = \frac{1}{\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{17}}{18}} - 1 = \frac{\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{17}}{18}}{\frac{1}{4}-\frac{17}{324}} - 1 =$$

$$= \frac{\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{17}}{18}}{\frac{16}{81}} - 1 = \frac{81}{16} \times \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{17}}{18}\right) - 1 =$$

$$= \frac{81}{32} + \frac{9\sqrt{17}}{32} - \frac{32}{32} = \frac{49+9\sqrt{17}}{32}$$

$$\frac{1}{\text{tg}^2\alpha} = \frac{32}{49+9\sqrt{17}} = \frac{32(49-9\sqrt{17})}{1024} = \frac{49-9\sqrt{17}}{32}$$

$$\text{tg}^2\alpha - \frac{1}{\text{tg}^2\alpha} = \frac{49+9\sqrt{17}}{32} - \frac{49-9\sqrt{17}}{32} = \frac{18\sqrt{17}}{32} = \frac{9\sqrt{17}}{16}$$

Caderno 2

6. Opção (D)

$$\text{tg}\left(\text{arccos}\left(-\frac{1}{2}\right)\right) - \text{sen}\left(\text{arcsen}\left(-\frac{1}{3}\right)\right) = \text{tg}\left(\frac{2\pi}{3}\right) - \left(-\frac{1}{3}\right) =$$

$$= -\sqrt{3} + \frac{1}{3}$$

7. $r\colon y + 2x = 5$

$y + 2x = 5 \Leftrightarrow y = -2x + 5$, logo o declive da reta r é igual a -2 $(m_r = -2)$ e $\vec{r}(1,-2)$ é um seu vetor diretor.

$s\colon y - 2x - 9 = 0$

$y - 2x - 9 = 0 \Leftrightarrow y = 2x + 9$, logo o declive da reta s é igual a 2 $(m_s = -2)$ e $\vec{s}(1,2)$ é um seu vetor diretor.

Seja $C(a,b)$ o centro da circunferência. Sabemos que $\overrightarrow{AC}.\vec{r} = 0$ e $\overrightarrow{BC}.\vec{s} = 0$. Então:

$$\begin{cases} (a-1, b-3).(1,-2) = 0 \\ (a+3, b-3).(1,2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a - 1 - 2b + 6 = 0 \\ a + 3 + 2b - 6 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 2b - 5 \\ 2b - 5 + 2b = 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 2b - 5 \\ 4b = 8 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 2 \end{cases}$$

Assim, $C(-1,2)$.

Seja r o raio da circunferência.

$r = d(A,C) = \sqrt{(-1-1)^2 + (2-3)^2} = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$

Logo, o valor do perímetro da circunferência é igual a $2\pi \times \sqrt{5} = 2\sqrt{5}\pi$.

8. Opção (C)

(a_n) é uma sucessão limitada, isto é, existe um número real positivo L tal que $\forall n \in \mathbb{N}, |a_n| \leq L$.

9.

9.1. $P(n): b_n < 3$

(i) $P(1)$ é verdadeira

$b_1 < 3 \Leftrightarrow 2 < 3$, o que é verdade.

(ii) $\forall n \in \mathbb{N}, P(n) \Rightarrow P(n+1)$ é verdadeira

$P(n): b_n < 3$ (hipótese de indução)

$P(n+1): b_{n+1} < 3$ (tese de indução)

$$b_n < 3 \Leftrightarrow b_n + 3 < 6$$
$$\Leftrightarrow \frac{3+b_n}{2} < 3$$
$$\Leftrightarrow b_{n+1} < 3$$

Por (i) e (ii), pelo princípio de indução matemática, provámos que $\forall n \in \mathbb{N}, b_n < 3$ é uma proposição verdadeira.

9.2. $b_{n+1} - b_n = \frac{3+b_n}{2} - b_n = \frac{3+b_n-2b_n}{2} = \frac{3-b_n}{2}$

Pela alínea anterior, provámos que $\forall n \in \mathbb{N}, b_n < 3$, logo:

$$\forall n \in \mathbb{N}, -b_n > -3 \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, 3-b_n > 0$$
$$\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, \frac{3-b_n}{2} > 0$$

Logo, (b_n) é crescente.

10. Opção (B)

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{n^2} = 0 + \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \cdots + \frac{n}{n^2} =$$
$$= \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \cdots + \frac{n}{n^2} =$$
$$= \frac{1}{n^2}\left(\underbrace{1 + 2 + \cdots + n}_{\substack{\text{soma dos } n \text{ primeiros termos} \\ \text{de uma progressão aritmética}}}\right) =$$
$$= \frac{1}{n^2} \times \left(\frac{1+n}{2} \times n\right) =$$
$$= \frac{n^2+n}{2n^2} =$$
$$= \frac{n+1}{2n}$$

$$\lim c_n = \lim \frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2}$$