TESTE N.º 2 – Proposta de resolução

Caderno 1

1. Opção (C)

Como $\overline{BA} = \overline{BC}$, o triângulo [*ABC*] é isósceles. Logo, $B\hat{A}C = B\hat{C}A$.

$180° = 80° + 2B\hat{A}C$, ou seja, $\frac{180°-80°}{2} = B\hat{A}C$, isto é, $B\hat{A}C = 50°$.

Pela lei dos senos:

$$\frac{\text{sen}80°}{6} = \frac{\text{sen}50°}{\overline{BC}}$$

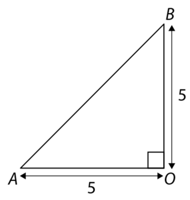
ou seja:

$$\overline{BC} = \frac{6 \times \text{sen}50°}{\text{sen}80°}$$

de onde resulta que:

$$\overline{BC} \approx 4{,}67$$

2. Opção (B)



Comecemos por determinar $\overline{AB}$:

$\overline{AB}^2 = 5^2 + 5^2 \Leftrightarrow \overline{AB} = \pm\sqrt{50}$

Como $\overline{AB} > 0$, então $\overline{AB} = \sqrt{50}$.

Determinemos a área do setor circular de centro A e raio $\overline{AB}$:

$\frac{\pi}{4} \times \frac{(\sqrt{50})^2}{2} = \frac{50\pi}{8} = \frac{25\pi}{4}$

A área a sombreado é igual à diferença entre a área do setor circular e a área do triângulo $[AOB]$:

$\frac{25\pi}{4} - \frac{5 \times 5}{2} = \frac{25\pi - 50}{4} \approx 7{,}1$

3.

3.1. Sabemos que:

$$-1 \leq \cos x \leq 1$$

Então:

$$-0{,}0167 \leq -0{,}0167\cos x \leq 0{,}0167$$
$$\Leftrightarrow 0{,}9833 \leq 1 - 0{,}0167\cos x \leq 1{,}0167$$
$$\Leftrightarrow 147{,}10168 \leq d \leq 152{,}09832$$

Como $d(0) = 147{,}10168$ e $d(\pi) = 152{,}09832$, então $m = 147{,}10168$ e $M = 152{,}09832$.

Assim, $A = 152{,}09832 - 147{,}10168 = 4{,}99664$.

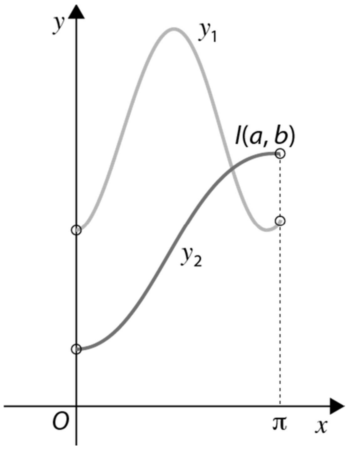
3.2. Pretendemos resolver a equação:

$$149{,}6(1 - 0{,}0167\cos(2x)) = 0{,}98 \times 149{,}6(1 - 0{,}0167\cos x),\text{ com } 0 < x < \pi$$

Usando as capacidades gráficas da calculadora:

$y_1 = 149{,}6(1 - 0{,}0167\cos(2x))$

$y_2 = 146{,}608(1 - 0{,}0167\cos x)$



$a \approx 2{,}55$

$\alpha \approx 2{,}55$ rad

4.

4.1. $x^2 + 2x + y^2 - 4y + z^2 - 2z = 4 \Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 + y^2 - 4y + 4 + z^2 - 2z + 1 = 4 + 1 + 4 + 1$

$\Leftrightarrow (x+1)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = 10$

Sabemos que $P(a, 3{,}1)$, com $a < 0$, pertence à superfície esférica, logo:

$(a+1)^2 + (3-2)^2 + (1-1)^2 = 10 \Leftrightarrow (a+1)^2 = 9$

$\Leftrightarrow a + 1 = 3 \quad \vee \quad a + 1 = -3$

$\Leftrightarrow a = 2 \quad \vee \quad a = -4$

Como $a < 0$, então $a = -4$.

Assim, $P(-4, 3, 1)$.

Seja C o centro da superfície esférica.

Assim, as coordenadas do ponto C são $(-1, 2, 1)$.

$\overrightarrow{CP}$ é um vetor normal ao plano α, logo:

$\overrightarrow{CP} = (-4{,}3{,}1) - (-1{,}2{,}1) = (-3{,}1{,}0)$

Logo, uma equação do plano tangente à superfície esférica no ponto P é:

$$-3(x+4) + (y-3) = 0$$

que é equivalente a:

$$-3x + y - 15 = 0$$

4.2. $C(-1,2,1)$ e $A(-1,-2,1)$

Tem-se que $A\hat{O}C = (\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC}})$ e $\cos\left(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC}}\right) = \frac{\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OC}}{\|\overrightarrow{OA}\| \times \|\overrightarrow{OC}\|}$.

Então:

$$\cos\left(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC}}\right) = \frac{(-1,-2,1).(-1,2,1)}{\sqrt{6}\times\sqrt{6}} \Leftrightarrow \cos\left(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC}}\right) = \frac{1-4+1}{6}$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC}}\right) = -\frac{1}{3}$$

Logo, $\left(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC}}\right) = \cos^{-1}\left(-\frac{1}{3}\right)$, isto é, $\left(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC}}\right) \approx 109{,}5°$.

5. Opção (D)

Sabemos que $\text{tg}\alpha = \sqrt{5}$.

Assim:

$$1 + \left(\sqrt{5}\right)^2 = \frac{1}{\cos^2\alpha} \Leftrightarrow 6 = \frac{1}{\cos^2\alpha} \Leftrightarrow \cos^2\alpha = \frac{1}{6}$$

e:

$$\text{sen}^2\alpha = 1 - \frac{1}{6} \Leftrightarrow \text{sen}^2\alpha = \frac{5}{6} \Leftrightarrow \text{sen}\alpha = \pm\sqrt{\frac{5}{6}}$$

$$\Leftrightarrow \text{sen}\alpha = \pm\frac{\sqrt{30}}{6}$$

Como $\text{tg}\alpha > 0$ e $0 \leq \alpha < \pi$, então $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

Logo, $\text{sen}\alpha = \frac{\sqrt{30}}{6}$.

Caderno 2

6. Opção (B)

Determinemos as coordenadas do ponto C:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow a\cos x + b = 0 \Leftrightarrow \cos x = -\frac{b}{a}$$

$$\Leftrightarrow x = \arccos\left(-\frac{b}{a}\right)$$

Logo, $c = -\frac{b}{a}$.

Determinemos as coordenadas do ponto D:

$f(0) = a\cos(0) + b = a + b$

Logo, $d = a + b$.

Assim, $c + d = -\frac{b}{a} + a + b = a + b - \frac{b}{a}$.

7.

7.1. $f(x) = (1 - \cos x \operatorname{sen} x)(\operatorname{sen} x + \cos x) =$

$= \operatorname{sen} x + \cos x - \cos x \operatorname{sen}^2 x - \cos^2 x \operatorname{sen} x =$

$= \cos x - \cos x \operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen} x - \cos^2 x \operatorname{sen} x =$

$= \cos x(1 - \operatorname{sen}^2 x) + \operatorname{sen} x(1 - \cos^2 x) =$

$= \cos x \times \cos^2 x + \operatorname{sen} x \times \operatorname{sen}^2 x =$

$= \cos^3 x + \operatorname{sen}^3 x$

7.2. $f(x) = (1 + \sqrt{27})\cos^3 x \Leftrightarrow \cos^3 x + \operatorname{sen}^3 x = (1 + \sqrt{27})\cos^3 x$

$\Leftrightarrow \operatorname{sen}^3 x = \left(1 + \sqrt{27}\right)\cos^3 x - \cos^3 x$

$\Leftrightarrow \operatorname{sen}^3 x = \sqrt{27}\cos^3 x$

$\underbrace{\Leftrightarrow}_{*} \frac{\operatorname{sen}^3 x}{\cos^3 x} = \sqrt{27}$

$\Leftrightarrow \operatorname{tg}^3 x = \sqrt{27}$

$\Leftrightarrow \operatorname{tg} x = \sqrt[6]{3^3}$

$\Leftrightarrow \operatorname{tg} x = \sqrt{3}$

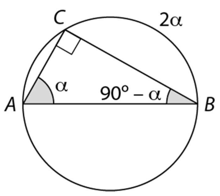
> *** Nota**
>
> Se $\cos^3 x = 0$, então $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
>
> Facilmente se verifica que estes valores não são solução da condição $\operatorname{sen}^3 x = 0$.

Em $\left[-\frac{\pi}{3}, 2\pi\right[: x = \frac{\pi}{3} \ \vee \ x = \frac{4\pi}{3}$

8. $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC} = \|\overrightarrow{BA}\| \times \|\overrightarrow{BC}\| \times \cos\left(\widehat{\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}}\right) = 2r \times \overline{BC} \times \cos(A\hat{B}C)$

Consideremos o triângulo retângulo [*ABC*]:

Como a amplitude do arco *BC* é igual a 2α, então a amplitude do ângulo inscrito $C\hat{A}B$ é igual a α.



Como o triângulo [*ABC*] é inscrito numa semicircunferência, sabemos que $A\hat{C}B = 90°$.

Dado que $C\hat{A}B = \alpha$, então $A\hat{B}C = 90° - \alpha$.

Por outro lado:

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{\overline{BC}}{2r} \Leftrightarrow \overline{BC} = 2r\operatorname{sen}\alpha$$

Assim:

$\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC} = 2r \times 2r\operatorname{sen}\alpha \times \cos(90° - \alpha) = 4r^2 \times \operatorname{sen}\alpha \times \operatorname{sen}\alpha =$

$= 4r^2\operatorname{sen}^2\alpha$, como queríamos demonstrar.

9. Opção (D)

$\vec{r}(-6, a, 2)$ é um vetor diretor da reta r.

$\vec{n}_\alpha(a, 0, a^2 + 2)$ é um vetor normal ao plano α.

A reta r é (estritamente) paralela ao plano α se e só se $\vec{r}$ e $\vec{n}_\alpha$ são vetores perpendiculares e se o ponto de coordenadas $(3,2,0)$ (ponto da reta r) não pertence ao plano α, isto é:

$\vec{r}.\vec{n}_\alpha = 0 \Leftrightarrow -6a + 0 + 2a^2 + 4 = 0$

$\Leftrightarrow 2a^2 - 6a + 4 = 0$

$\Leftrightarrow a^2 - 3a + 2 = 0$

$\Leftrightarrow a = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 4 \times 2}}{2}$

$\Leftrightarrow a = 2 \quad \vee \quad a = 1$

- Se $a = 2$, então $\alpha: 2x + 6z - 3 = 0$.

  Averiguemos se r está contida em α:

  $2 \times 3 + 6 \times 0 - 3 = 0 \Leftrightarrow 3 = 0$, que é uma proposição falsa.

  Logo, vem que se $a = 2$, então r é (estritamente) paralela a α.

- Se $a = 1$, então $\alpha: x + 3z - 3 = 0$.

  Averiguemos se r está contida em α:

  $3 + 3 \times 0 - 3 = 0 \Leftrightarrow 0 = 0$, que é uma proposição verdadeira.

  Logo, vem que se $a = 1$, então r está contida em α.