TESTE N.º 2 – Proposta de resolução

Caderno 1

1.

1.1. Sabe-se que:

- $P(\cos\alpha, \text{sen}\alpha)$, com $\cos\alpha < 0$ e $\text{sen}\alpha < 0$
- $Q(1, \text{sen}\alpha)$
- $R(1, \text{tg}\alpha)$, com $\text{tg}\alpha > 0$

Logo:

$$A_{[PQR]} = \frac{\overline{PQ}\times\overline{QR}}{2} = \frac{(1-\cos\alpha)(-\text{sen}\alpha+\text{tg}\alpha)}{2} = \frac{-\text{sen}\alpha+\text{tg}\alpha+\text{sen}\alpha\cos\alpha-\text{sen}\alpha}{2} =$$

$$= \frac{\text{tg}\alpha+\text{sen}\alpha\cos\alpha-2\text{sen}\alpha}{2} =$$

$$= \frac{\text{sen}\alpha}{2\cos\alpha} + \frac{\text{sen}\alpha\cos\alpha}{2} - \frac{2\text{sen}\alpha}{2} =$$

$$= \frac{\text{sen}\alpha}{2}\left(\frac{1}{\cos\alpha} + \cos\alpha - 2\right) =$$

$$= \frac{\text{sen}\alpha}{2}\left(\frac{\cos^2\alpha-2\cos\alpha+1}{\cos\alpha}\right) =$$

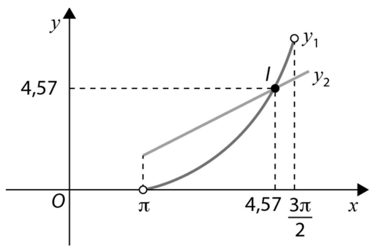
$$= \frac{\text{sen}\alpha}{2\cos\alpha} \times (\cos\alpha - 1)^2 =$$

$$= \frac{\text{tg}\alpha}{2} \times (\cos\alpha - 1)^2$$

1.2. O comprimento do arco AP é dado por $\alpha \times 1 = \alpha$.

$y_1 = \frac{\text{tg}\alpha}{2} \times (\cos\alpha - 1)^2$

$y_2 = \alpha$



$I(4{,}57; 4{,}57)$

A área do triângulo $[PQR]$ é igual ao comprimento do arco AP quando $\alpha \approx 4{,}57$.

2.

2.1. Comecemos por determinar as coordenadas de A:

$$(a,0,0) = (2,-1,0) + k(-1,-1,0) \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2-k \\ 0 = -1-k \\ 0 = 0k \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 2-(-1) \\ k = -1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ k = -1 \end{cases}$$

Logo, $A(3,0,0)$.

Uma equação cartesiana do plano que passa em A e é paralelo a BCV pode ser

$7(x-3)+7y+3z=0$, isto é, $7x+7y+3z-21=0$.

2.2. Como $[ABCD]$ é um quadrado e $P(3,3,0)$, então $D(0,3,0)$.

$\overline{AD}^2 = 3^2+3^2 \Leftrightarrow \overline{AD}^2 = 18$

Como $[ABCDV]$ é uma pirâmide regular, então VP é uma reta paralela ao eixo Oz e $V(3,3,c)$ e, como V pertence ao plano BCV, vem que:

$7\times 3+7\times 3+3c+63=0 \Leftrightarrow 3c=21$

$$\Leftrightarrow c=7$$

Então:

$V_{[ABCDV]} = \frac{1}{3}\times 18 \times 7 = 42$ unidades de volume

2.3. A reta OT pode ser definida por:

$$(x,y,z)=(0,0,0)+k(7,7,3), k\in\mathbb{R}$$

Assim, um ponto genérico de OT é do tipo $(7k,7k,3k)$, com $k\in\mathbb{R}$.

Procuremos a interseção da reta OT com o plano BCV (o ponto T):

$7(7k)+7(7k)+3(3k)+63=0 \Leftrightarrow 49k+49k+9k=-63$

$$\Leftrightarrow k=-\frac{63}{107}$$

Logo, $T\left(-\frac{441}{107},-\frac{441}{107,},-\frac{189}{107}\right)$.

$\overline{OT} = \sqrt{\left(-\frac{441}{107}\right)^2+\left(-\frac{441}{107}\right)^2+\left(-\frac{189}{107}\right)^2} =$

$= \sqrt{\frac{194\,481+194\,481+35\,721}{11\,449}} =$

$= \sqrt{\frac{424\,683}{11\,449}}$

$= \sqrt{\frac{3969}{107}}$

$A = 4\times\pi\times r^2 =$

$= 4\pi\left(\overline{OT}\right)^2 =$

$= 4\pi\times\frac{3969}{107} =$

$= \frac{1\,5876}{107}\pi$

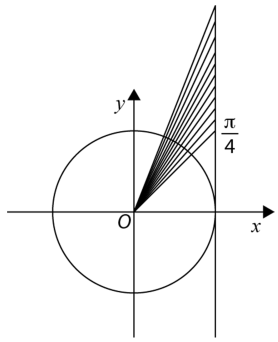
3. Opção (D)

Se $\frac{\pi}{4} \leq x < \frac{\pi}{2}$:

$1 \leq \text{tg}x \Leftrightarrow -1 \geq -\text{tg}x$

$\Leftrightarrow 0 \geq 1 - \text{tg}x$

$\Leftrightarrow f(x) \leq 0$, o que contradiz o facto de $D'_f = [1, +\infty[$.

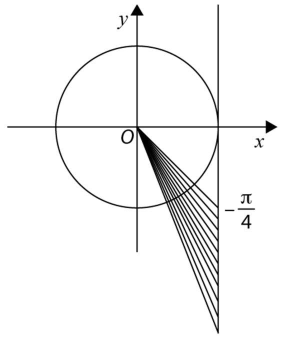


Se $-\frac{\pi}{2} < x \leq -\frac{\pi}{4}$:

$\text{tg}x \leq -1 \Leftrightarrow -\text{tg}x \geq 1$

$\Leftrightarrow 1 - \text{tg}x \geq 2$

$\Leftrightarrow f(x) \geq 2$, o que contradiz o facto de $D'_f = [1, +\infty[$.

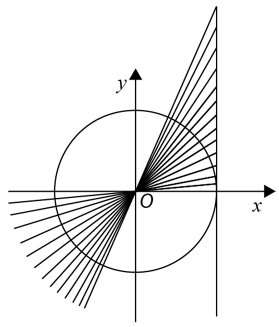


Se $-\pi \leq x < -\frac{\pi}{2}$:

$\text{tg}x \geq 0 \Leftrightarrow -\text{tg}x \leq 0$

$\Leftrightarrow 1 - \text{tg}x \leq 1$

$\Leftrightarrow f(x) \leq 1$, o que contradiz o facto de $D'_f = [1, +\infty[$.

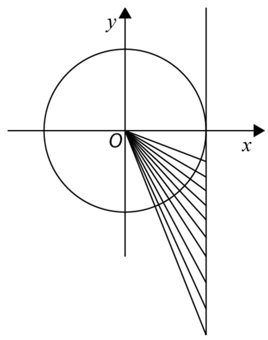


Se $-\frac{\pi}{2} < x \leq 0$:

$\text{tg}x \leq 0 \Leftrightarrow -\text{tg}x \geq 0$

$\Leftrightarrow 1 - \text{tg}x \geq 1$

$\Leftrightarrow f(x) \geq 1$



4. $\frac{\cos\beta}{\text{tg}\beta} = \frac{9}{20} \Leftrightarrow \frac{\cos\beta}{\frac{\text{sen}\beta}{\cos\beta}} = \frac{9}{20} \Leftrightarrow \frac{\cos^2\beta}{\text{sen}\beta} = \frac{9}{20}$

$\Leftrightarrow 20\cos^2\beta = 9\text{sen}\beta$

$\Leftrightarrow 20(1 - \text{sen}^2\beta) = 9\text{sen}\beta$

$\Leftrightarrow -20\text{sen}^2\beta - 9\text{sen}\beta + 20 = 0$

$\Leftrightarrow \text{sen}\beta = \frac{9 \pm \sqrt{81 - 4 \times (-20) \times 20}}{-40}$

$\Leftrightarrow \underbrace{\text{sen}\beta = -\frac{5}{4}}_{\text{Condição impossível}} \quad \vee \quad \text{sen}\beta = \frac{4}{5}$

$\Leftrightarrow \text{sen}\beta = \frac{4}{5}$

O valor exato de $\text{sen}\beta$ é igual a $\frac{4}{5}$.

5. Opção (C)

Seja α a inclinação da reta r.

Então, $m_r = \text{tg}\alpha$.

Sabe-se que $1 + \text{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$.

Assim:

$$1 + \text{tg}^2\alpha = \frac{1}{\left(-\frac{\sqrt{10}}{10}\right)^2} \Leftrightarrow 1 + \text{tg}^2\alpha = 10$$

$$\Leftrightarrow \text{tg}^2\alpha = 9$$

$$\Leftrightarrow \text{tg}\alpha = \pm 3$$

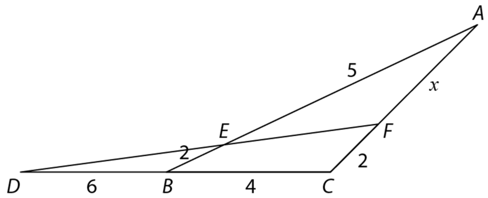
Como α é a inclinação da reta r e $\cos\alpha < 0$, então $\alpha \in \left]90°, 180°\right[$.

Logo, $\text{tg}\alpha < 0$.

Portanto, $\text{tg}\alpha = -3$, ou seja, $m_r = -3$.

Caderno 2

6. Opção (B)



Considerando o $\Delta[DBE]$, tem-se que:

$$\frac{\text{sen}(E\hat{D}B)}{2} = \frac{\text{sen}(D\hat{E}B)}{6} \Leftrightarrow \text{sen}(D\hat{E}B) = 3\text{sen}(E\hat{D}B) \quad \textbf{(1)}$$

Considerando o $\Delta[DCF]$, tem-se que:

$$\frac{\text{sen}(F\hat{D}C)}{2} = \frac{\text{sen}(D\hat{F}C)}{10} \Leftrightarrow \text{sen}(D\hat{F}C) = 5\text{sen}(F\hat{D}C) \quad \textbf{(2)}$$

Considerando o $\Delta[AFE]$, tem-se que:

$$\frac{\text{sen}(E\hat{F}A)}{5} = \frac{\text{sen}(A\hat{E}F)}{x} \Leftrightarrow \frac{\text{sen}(180°-D\hat{F}C)}{5} = \frac{\text{sen}(A\hat{E}F)}{x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\text{sen}(D\hat{F}C)}{5} = \frac{\text{sen}(A\hat{E}F)}{x}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{5\text{sen}(A\hat{E}F)}{\text{sen}(D\hat{F}C)}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{5\text{sen}(D\hat{E}B)}{5\text{sen}(F\hat{D}C)} \quad \text{(por 2)}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{5\times 3\text{sen}(E\hat{D}B)}{5\times\text{sen}(F\hat{D}C)} \quad \text{(por 1)}$$

$$\Leftrightarrow x = 3$$

7. Se $x \in \left]-\frac{\pi}{3}, 0\right]$, então $\frac{1}{2} < \cos x \leq 1$.

Se $x \in \left[0, \frac{\pi}{6}\right[$, então $\frac{\sqrt{3}}{2} < \cos x \leq 1$.

Assim, para $x \in \left]-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6}\right[$, tem-se $\frac{1}{2} < \cos x \leq 1$.

Logo:

$$1 - k^2 > \frac{1}{2} \ \wedge \ 1 - k^2 \leq 1 \Leftrightarrow -k^2 > -\frac{1}{2} \ \wedge \ -k^2 \leq 0$$

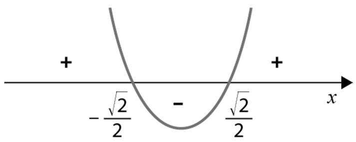
$$\Leftrightarrow k^2 < \frac{1}{2} \ \wedge \ \underbrace{k^2 \geq 0}_{\text{Condição universal em } \mathbb{R}}$$

$$\Leftrightarrow k^2 - \frac{1}{2} < 0$$

Cálculo auxiliar

$$k^2 - \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow k^2 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow k = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$k^2 - \frac{1}{2} < 0 \Leftrightarrow -\frac{\sqrt{2}}{2} < k < \frac{\sqrt{2}}{2}$$



C.S. $= \left]-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right[$

8. $\overline{AG} + \overline{GD} = 6 \Leftrightarrow \frac{2}{3}\overline{GD} + \overline{GD} = 6$

$$\Leftrightarrow \frac{5}{3}\overline{GD} = 6$$

$$\Leftrightarrow \overline{GD} = \frac{18}{5}$$

$$\overline{AG} = 6 - \frac{18}{5} = \frac{12}{5}$$

$$\frac{\overline{EB} + \overline{CF}}{2} \times \overline{CB} = 12 \Leftrightarrow \frac{3 + \overline{CF}}{2} \times 6 = 12$$

$$\Leftrightarrow \frac{3 + \overline{CF}}{2} = 2$$

$$\Leftrightarrow 3 + \overline{CF} = 4$$

$$\Leftrightarrow \overline{CF} = 1$$

$$\overrightarrow{EG} . \overrightarrow{EF} = \left(\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AG}\right) . \left(\overrightarrow{EB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CF}\right) =$$

$$= \overrightarrow{EA} . \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{EA} . \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{EA} . \overrightarrow{CF} + \overrightarrow{AG} . \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{AG} . \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AG} . \overrightarrow{CF} =$$

$$= 3 \times 3 \times \cos(180°) + 0 + 3 \times 1 \times \cos(0°) + 0 + \frac{12}{5} \times 6 \times \cos(0°) + 0 =$$

$$= -9 + 3 + \frac{72}{5} =$$

$$= \frac{42}{5}$$

9. Opção (D)

$\overrightarrow{AB} = (0,1) - (2,1) = (-2,0)$

O ângulo formado pelos vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\vec{v}$ é obtuso se e somente se $\overrightarrow{AB}.\vec{v} < 0$ e $\overrightarrow{AB}$ e $\vec{v}$ não são colineares.

- $\overrightarrow{AB}.\vec{v} < 0 \Leftrightarrow -2(3k^2 - 3k) + 0(k-2) < 0$

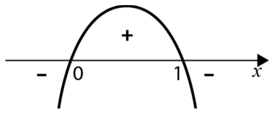
  $\Leftrightarrow -6k^2 + 6k < 0$

  $\Leftrightarrow k < 0 \;\vee\; k > 1$

Cálculo auxiliar

$-6k^2 + 6k = 0 \Leftrightarrow -6k(k-1) = 0$

$\Leftrightarrow k = 0 \;\vee\; k = 1$



- $\overrightarrow{AB}$ e $\vec{v}$ não são colineares se e somente se $k - 2 \neq 0$, ou seja, $k \neq 2$.

  Assim, os valores reais de k para os quais o ângulo formado pelos vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\vec{v}$ é obtuso são $]-\infty, 0[\, \cup\,]1, +\infty[\backslash\{2\}$.

10. Opção (D)

Se r é perpendicular ao plano, então:

$$\begin{cases} (a^2 - a, a^2 - 2, a - 1).(0, -1, 2) = 0 \\ (a^2 - a, a^2 - 2, a - 1).(-1, 0, 2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -a^2 + 2 + 2a - 2 = 0 \\ -a^2 + a + 2a - 2 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -a^2 + 2a = 0 \\ -a^2 + 3a - 2 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a(-a+2) = 0 \\ a = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 4 \times (-1) \times (-2)}}{-2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (a = 0 \;\vee\; a = 2) \wedge (a = 1 \;\vee\; a = 2)$$

$$\Leftrightarrow a = 2$$