
Teste de Matemática A

2016 / 2017

Teste N.º 3

Matemática A

Duração do Teste: 90 minutos

11.º Ano de Escolaridade

Nome do aluno: _____ N.º: _____ Turma: _____



Grupo I

- Os cinco itens deste grupo são de escolha múltipla.
- Em cada um deles, são indicadas quatro alternativas de resposta, das quais **só uma** está correta.
- Escreva na sua folha de respostas **apenas o número de cada item e a letra** correspondente à alternativa que selecionar para responder a esse item.
- Se apresentar mais do que uma alternativa, a resposta será classificada com zero pontos, o mesmo acontecendo se a letra transcrita for ilegível.
- **Não apresente cálculos nem justificações.**

1. Sejam $\alpha \in]0, \frac{\pi}{2}[$ e $\beta \in]\frac{\pi}{2}, \pi[$. Qual das expressões designa um número positivo?

(A) $\sin\left(\frac{5\pi}{2} - \alpha\right) \cos(\pi + \beta)$

(B) $\tan(\pi - \alpha) \cos\left(\frac{3\pi}{2} + \beta\right)$

(C) $\cos\left(\frac{7\pi}{2} + \alpha\right) \sin(\beta - \pi)$

(D) $\sin(2\pi - \alpha) \tan\left(\frac{6\pi}{2} - \beta\right)$

2. Considere, num referencial o.n. $Oxyz$, o plano γ de equação $x + 2y + 2z - 1 = 0$ e a reta r de equação:

$$(x, y, z) = (1, -1, -1) + k(-2, 1, 1), k \in \mathbb{R}$$

Qual das equações é uma equação cartesiana de um plano perpendicular a γ e que contém a reta r ?

(A) $-2x + y + z = 0$

(B) $x - y - z = 0$

(C) $2x - z = 0$

(D) $-y + z = 0$

3. Num referencial ortonormado, considere os vetores $\vec{u}(-1, 3)$ e $\vec{v}(2, -1)$. Qual das afirmações é verdadeira?

(A) $(\vec{u} - \vec{v}) \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = 5$

(B) $(\vec{u} - \vec{v}) \cdot \vec{v} = 10$

(C) $\vec{u} \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = -5$

(D) $\vec{u} \cdot \vec{v} = 5$

4. Uma sucessão (u_n) é definida por $\begin{cases} u_1 = a \\ u_{n+1} = \frac{1-u_n}{2}, \forall n \geq 1 \end{cases}$, com $a \in \mathbb{R}$.

Qual das expressões representa u_{n+2} escrito em função de u_n , para todo $n \geq 1$?

- (A) $\frac{1-u_n}{2}$
 (B) $\frac{1+u_n}{2}$
 (C) $\frac{1+u_n}{4}$
 (D) $\frac{1-u_n}{4}$

5. Seja (a_n) uma progressão aritmética tal que $a_1 = -23$ e $r = 2$. Qual é o menor valor de n para o qual se tem $S_n > 0$, onde S_n representa a soma dos n primeiros termos de (a_n) ?

- (A) 22
 (B) 23
 (C) 24
 (D) 25

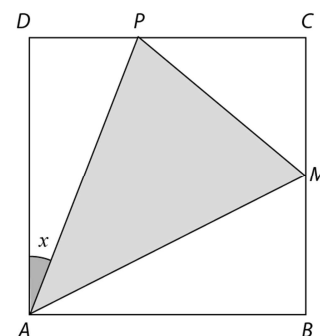
Grupo II

Nas respostas aos itens deste grupo apresente o seu raciocínio de forma clara, indicando **todos os cálculos** que tiver de efetuar e **todas as justificações** necessárias.

Atenção: Quando para um resultado não é pedida a aproximação, pretende-se sempre o **valor exato**.

1. Na figura está representado um quadrado $[ABCD]$, de lado 2.

O ponto P desloca-se sobre o lado $[CD]$. O ponto M é o ponto médio de $[BC]$. Para cada posição do ponto P , seja x a amplitude do ângulo PAD ($x \in [0, \frac{\pi}{4}]$).



- 1.1. Mostre que a área do triângulo $[AMP]$ é dada, em função de x , por $f(x) = 2 - \tan x$.

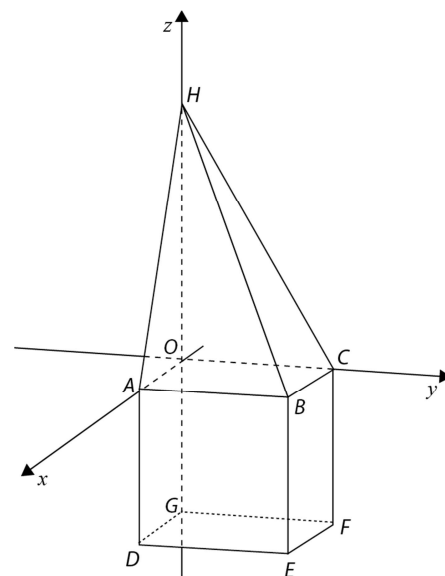
- 1.2. Seja $\alpha \in [0, \frac{\pi}{4}]$ tal que $\cos(\frac{\pi}{2} + \alpha) = -\frac{1}{3}$. Determine o valor de $f(\alpha)$. Apresente o resultado com o denominador racionalizado.

- 1.3. Determine o valor de x para o qual a área do triângulo $[AMP]$ é igual à área do triângulo $[ABM]$.

2. Na figura está representado, em referencial o.n. $Oxyz$, o poliedro $[HABCODEFG]$, que se pode decompor num cubo e numa pirâmide quadrangular.

Sabe-se que:

- a base da pirâmide coincide com a face superior do cubo e está contida no plano xOy ;
- o ponto H pertence ao eixo Oz ;
- o ponto C pertence ao eixo Oy ;
- o ponto E tem coordenadas $(3, 3, -3)$;
- o plano BCH é definido pela equação $5y + 3z - 15 = 0$.



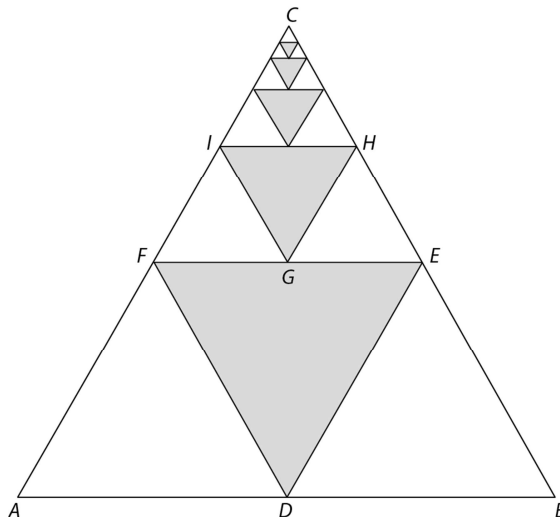
- 2.1. Escreva uma equação vetorial que defina a reta que passa no ponto E e é perpendicular ao plano BCH .
- 2.2. Determine uma equação cartesiana do plano ABH .
- 2.3. Determine, em graus e com aproximação às décimas, a amplitude do ângulo formado pelas retas BH e BE .
- 2.4. Utilizando a definição de produto escalar, escreva uma condição que defina a superfície esférica de diâmetro $[CD]$.

3. Considere a sucessão (u_n) definida por:

$$u_n = \frac{1-2n}{2n+3}$$

- 3.1. Averigüe se $-\frac{29}{33}$ é um termo da sucessão (u_n) .
- 3.2. Estude a sucessão (u_n) quanto à monotonia.
- 3.3. Mostre que a sucessão (u_n) é uma sucessão limitada.

4. Na figura está representado um triângulo equilátero $[ABC]$ cuja área é 6 m^2 . Unindo os pontos médios dos seus lados, obtiveram-se os triângulos equiláteros $[DEF]$ e $[EFC]$, sombreando-se o triângulo $[DEF]$. Novamente, unindo os pontos médios dos lados do triângulo $[EFC]$, obtiveram-se os triângulos $[GHI]$ e $[HIC]$, sombreando-se o triângulo $[GHI]$ e assim sucessivamente.



Seja (a_n) a sucessão das áreas dos triângulos sucessivamente sombreados.

- 4.1. Defina (a_n) por recorrência.
- 4.2. Mostre que a sucessão (a_n) é uma progressão geométrica e escreva o seu termo geral.
- 4.3. Prove, pelo método de indução matemática, que a soma dos n primeiros termos desta progressão é dada por $S_n = 2(1 - 4^{-n}), \forall n \in \mathbb{N}$.

– FIM –

COTAÇÕES

Grupo I 50

Cada resposta certa 10

Cada resposta errada..... 0

Cada questão não respondida ou anulada..... 0

Grupo II 150

1. 35

1.1. 10

1.2. 15

1.3. 10

2. 50

2.1. 10

2.2. 15

2.3. 15

2.4. 10

3. 30

3.1. 10

3.2. 10

3.3. 10

4. 35

4.1. 10

4.2. 10

4.3. 15

TOTAL 200

