TESTE N.º 2 – Proposta de resolução

Grupo I

1. Opção (B)

$$\frac{\sin\alpha}{2{,}2} = \frac{\sin(90°-\alpha)}{\overline{BC}} \Leftrightarrow \frac{\frac{1}{3}}{2{,}2} = \frac{\cos\alpha}{\overline{BC}}$$

$$\Leftrightarrow \overline{BC} = \frac{2{,}2\cos\alpha}{\frac{1}{3}}$$

$$\Leftrightarrow \overline{BC} = 6{,}6\cos\alpha$$

$$\Leftrightarrow \overline{BC} = 6{,}6 \times \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$\Leftrightarrow \overline{BC} = 4{,}4\sqrt{2}$$

Cálculo auxiliar

$\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha \Leftrightarrow \cos^2\alpha = 1 - \frac{1}{9} \Leftrightarrow \cos^2\alpha = \frac{8}{9}$

Logo, $\cos\alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}$.

Pelo Teorema de Pitágoras:

$8{,}1^2 = \left(4{,}4\sqrt{2}\right)^2 + \overline{AB}^2 \Leftrightarrow \overline{AB}^2 = 65{,}61 - 38{,}72 \Leftrightarrow \overline{AB}^2 = 26{,}89$

Logo, $\overline{AB} = \sqrt{26{,}89}$.

Tem-se assim que $\overline{AD} = \sqrt{26{,}89} - 2{,}2$.

Logo:

$A_{[ADC]} = \frac{\left(\sqrt{26{,}89}-2{,}2\right)\times 4{,}4\sqrt{2}}{2} \approx 9{,}29$ u.a.

2. Opção (D)

$$\sin^2 x - \sin x = 0 \Leftrightarrow \sin x\,(\sin x - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin x = 0 \vee \sin x = 1$$

$$\Leftrightarrow x = k\pi \vee x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

No intervalo $[0, 2\pi[$, a equação tem três soluções: $0, \frac{\pi}{2}$ e π.

Assim, no intervalo $[0, 10\pi[$, a equação tem $3 \times 5 = 15$ soluções.

Como 10π é também solução da equação, e pertence ao intervalo $[0, 10\pi]$, então a equação tem 16 soluções.

3. Opção (C)

Os pontos de coordenadas $(\sqrt{3}, 0)$ e $(0, 1)$ pertencem à reta r. Logo, o declive da reta r é dado por:

$m = \frac{1-0}{0-\sqrt{3}} = -\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3} = \tan\alpha$

Então, $\tan(-\alpha) = -\tan\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

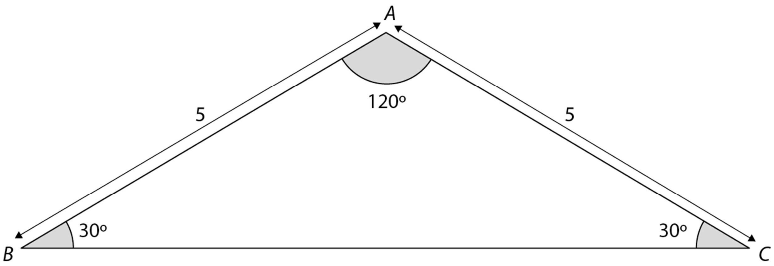
4. Opção (D)

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 5 \times 5 \times \cos 120° = -\frac{25}{2}$

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CA} = 5 \times 5 \times \cos 60° = \frac{25}{2}$

$\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{CA} = 5 \times 5 \times \cos 120° = -\frac{25}{2}$

$\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AC} = 5 \times 5 \times \cos 60° = \frac{25}{2}$



5. Opção (A)

Seja $\vec{r}(a, b, c)$ um vetor diretor da reta r. Tem-se que:

$$\begin{cases} (a,b,c)\cdot(-3,2,3) = 0 \\ (a,b,c)\cdot(3,-1,-2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3a + 2b + 3c = 0 \\ 3a - b - 2c = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3a = 2b + 3c \\ 2b + 3c - b - 2c = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3a = -2c + 3c \\ b = -c \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{3}c \\ b = -c \end{cases}$$

Assim, $\vec{r}\left(\frac{1}{3}c, -c, c\right), c \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$. Por exemplo, $\vec{r}(1, -3, 3)$ é um vetor diretor da reta r.

Assim, uma equação vetorial que define a reta r é $(x, y, z) = (1, -1, 2) + k(1, -3, 3), k \in \mathbb{R}$.

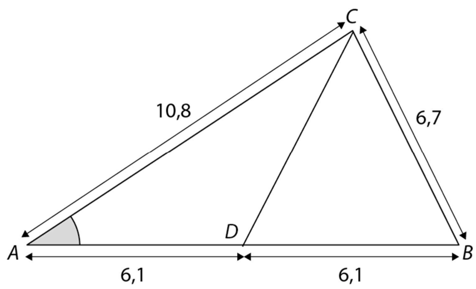
Grupo II

1. Pela Lei dos Cossenos:

$6{,}7^2 = 12{,}2^2 + 10{,}8^2 - 2 \times 12{,}2 \times 10{,}8 \cos \hat{A}$

$\Leftrightarrow 44{,}89 = 148{,}84 + 116{,}64 - 263{,}52 \cos \hat{A}$

$\Leftrightarrow \cos \hat{A} = \frac{220{,}59}{263{,}52}$



Por outro lado:

$\overline{CD}^2 = 10{,}8^2 + 6{,}1^2 - 2 \times 10{,}8 \times 6{,}1 \times \cos \hat{A}$

$\Leftrightarrow \overline{CD}^2 = 116{,}64 + 37{,}21 - 131{,}76 \times \frac{220{,}59}{263{,}52}$

$\Leftrightarrow \overline{CD}^2 = 43{,}555$

Logo, $\overline{CD} = \sqrt{43{,}555} \approx 6{,}6$ u.a.

2.

2.1. $g(x) = 0 \Leftrightarrow -2\cos\,(2x) - 1 = 0$

$\Leftrightarrow \cos\,(2x) = -\frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow 2x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \;\vee\; 2x = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + k\pi \;\vee\; x = -\frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Se $k = 0$, então $x = \frac{\pi}{3}$ $(\in [0, \pi])$ ou $x = -\frac{\pi}{3}$ $(\notin [0, \pi])$.

Se $k = 1$, então $x = \frac{4\pi}{3}$ $(\notin [0, \pi])$ ou $x = \frac{2\pi}{3}$ $(\in [0, \pi])$.

Assim, os zeros de g são $\frac{\pi}{3}$ e $\frac{2\pi}{3}$.

2.2. $f(x) = g(x) \Leftrightarrow 2\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - 1 = -2\cos\,(2x) - 1$

$\Leftrightarrow 2\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = -2\cos\,(2x)$

$\Leftrightarrow \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \cos(\pi - 2x)$

$\Leftrightarrow \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - (\pi - 2x)\right)$

$\Leftrightarrow \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{2} + 2x\right)$

$\Leftrightarrow x - \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{2} + 2x + 2k\pi \;\vee\; x - \frac{\pi}{4} = \pi - \left(-\frac{\pi}{2} + 2x\right) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow -x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi \;\vee\; x - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{2} - 2x + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \;\vee\; 3x = \frac{7\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \;\vee\; x = \frac{7\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$

Se $k = 0$, então $x = \frac{\pi}{4}$ ou $x = \frac{7\pi}{12}$, que são, respetivamente, as abcissas dos pontos P e Q.

2.3. $f\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4}\right) - 1 = \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow 2\sin\alpha - 1 = \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \sin\alpha = \frac{3}{4}$

Sabe-se que:

$\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha \Leftrightarrow \cos^2\alpha = 1 - \frac{9}{16} \Leftrightarrow \cos^2\alpha = \frac{7}{16}$

Como $\alpha \in \left]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}\right[$, então $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{7}}{4}$.

$g\left(\frac{\alpha}{2}\right) = -2\cos\left(2 \times \frac{\alpha}{2}\right) - 1 = -2\cos\alpha - 1 = -2 \times \left(-\frac{\sqrt{7}}{4}\right) - 1 = \frac{\sqrt{7}}{2} - 1$

3.

3.1. $\overrightarrow{AB} = B - A = (4, 0) - (0, 2) = (4, -2)$

Assim, uma equação vetorial da reta AB é $(x, y) = (0, 2) + k(4, -2), k \in \mathbb{R}$.

3.2. Tem-se $m = \tan 30° = \frac{\sqrt{3}}{3}$ e o ponto $A(0, 2)$ pertence à reta AC .

Logo, AC: $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + 2$.

3.3. Um vetor diretor da reta AC é, por exemplo, $(3, \sqrt{3})$.

$\|(3, \sqrt{3})\| = \sqrt{3^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{9+3} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$

$\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{4^2 + (-2)^2} = \sqrt{16+4} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

$(3, \sqrt{3}) \cdot \overrightarrow{AB} = 3 \times 4 + \sqrt{3} \times (-2) = 12 - 2\sqrt{3}$

Seja α a amplitude do ângulo formado pelas retas AB e AC. Então:

$\cos\alpha = \frac{|12 - 2\sqrt{3}|}{2\sqrt{3} \times 2\sqrt{5}}$

Logo, $\alpha \approx 56{,}57°$.

4.

4.1. A é o ponto de interseção das retas OA e AB.

OA: $(x, y, z) = (9, 0, 12) + r(3, 0, 4), r \in \mathbb{R}$

Um ponto genérico da reta OA é do tipo $(9 + 3r, 0, 12 + 4r)$.

Substituindo na equação da reta AB:

$(9 + 3r, 0, 12 + 4r) = (5, 1, 8) + s(-1, 1, 0) \Leftrightarrow (9 + 3r, 0, 12 + 4r) = (5 - s, 1 + s, 8)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 9 + 3r = 5 - s \\ 1 + s = 0 \\ 12 + 4r = 8 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 9 - 3 = 5 + 1 \\ s = -1 \\ r = -1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} s = -1 \\ r = -1 \end{cases}$$

Substituindo nas coordenadas do ponto genérico de OA, obtém-se (6, 0, 8), que são as coordenadas do ponto A.

4.2. Os vetores (3, 0, 4) e (–1, 1, 0) são vetores diretores do plano ABO e o ponto A pertence a este plano.

Logo, uma equação vetorial do plano é $(x, y, z) = (6, 0, 8) + r(3, 0, 4) + s(-1, 1, 0), r, s \in \mathbb{R}$.

4.3. Um plano perpendicular à reta AB é da forma $-x + y + d = 0$.

Como o ponto P(2, –4, 1) pertence ao plano, vem que:

$-2 - 4 + d = 0 \Leftrightarrow d = 6$

Logo, a equação pedida é $-x + y + 6 = 0$.

4.4. $\overrightarrow{AQ} \cdot \overrightarrow{BQ} = 0$ representa a superfície esférica de diâmetro $[AB]$.

Sabemos que B pertence à reta AB.

Assim, as suas coordenadas são da forma $(5 - s, 1 + s, 8)$, para algum $s \in \mathbb{R}$.

Sabemos, também, que o ponto B pertence ao plano yOz.

Logo, $5 - s = 0$, ou seja, $s = 5$.

Assim, as coordenadas de B são (0, 6, 8).

Temos, então:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AQ} \cdot \overrightarrow{BQ} = 0 &\Leftrightarrow (x - 6, y, z - 8) \cdot (x, y - 6, z - 8) = 0 \\ &\Leftrightarrow x^2 - 6x + y^2 - 6y + (z - 8)^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow (x - 3)^2 + (y - 3)^2 + (z - 8)^2 = 18 \end{aligned}$$