

Prova-Modelo de Exame

Matemática A

Duração da Prova: 150 minutos. | Tolerância: 30 minutos.

12.º Ano de Escolaridade

Nome do aluno: _____ N.º: __ Turma: ____

A prova inclui 11 itens, devidamente identificados no enunciado, cujas respostas contribuem obrigatoriamente para a classificação final. Dos restantes 7 itens da prova, apenas contribuem para a classificação final os 4 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação.

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta.

Não é permitido o uso de corretor. Risque aquilo que pretende que não seja classificado.

É permitido o uso de régua, compasso, esquadro, transferidor e calculadora gráfica.

Apresente apenas uma resposta para cada item.

As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.

A prova inclui um formulário.

Nas respostas aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Nas respostas aos restantes itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias. Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

Formulário

Geometria

Comprimento de um arco de circunferência

αr (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

Área de um polígono regular: Semiperímetro \times Apótema

Área de um setor circular:

$\frac{\alpha r^2}{2}$ (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

Área lateral de um cone: $\pi r g$ (r – raio da base; g – geratriz)

Área de uma superfície esférica: $4 \pi r^2$ (r – raio)

Volume de uma pirâmide: $\frac{1}{3} \times$ Área da base \times Altura

Volume de um cone: $\frac{1}{3} \times$ Área da base \times Altura

Volume de uma esfera: $\frac{4}{3} \pi r^3$ (r – raio)

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma progressão (u_n):

Progressão aritmética: $\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$

Progressão geométrica: $u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$

Trigonometria

$\text{sen}(a + b) = \text{sen } a \cos b + \text{sen } b \cos a$

$\text{cos}(a + b) = \text{cos } a \cos b - \text{sen } a \text{sen } b$

Complexos

$(\rho e^{i\theta})^n = \rho^n e^{in\theta}$

$\sqrt[n]{\rho e^{i\theta}} = \sqrt[n]{\rho} e^{i\frac{\theta + 2k\pi}{n}}$ ($k \in \{0, \dots, n - 1\}$ e $n \in \mathbb{N}$)

Regras de derivação

$(u + v)' = u' + v'$

$(uv)' = u'v + uv'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

$(u^n)' = n u^{n-1} u'$ ($n \in \mathbb{R}$)

$(\text{sen } u)' = u' \cos u$

$(\text{cos } u)' = -u' \text{sen } u$

$(\text{tg } u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u' e^u$

$(a^u)' = u' a^u \ln a$ ($a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$)

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a}$ ($a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$)

Limites notáveis

$\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$ ($n \in \mathbb{N}$)

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } x}{x} = 1$

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

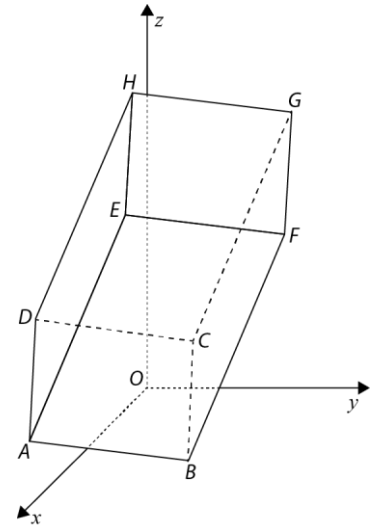
$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty$ ($p \in \mathbb{R}$)

1. Na figura está representado, em referencial o.n. $Oxyz$, o prisma quadrangular regular $[ABCDEFGH]$.

Sabe-se que:

- o plano ABC é definido por $2x + 3y + 6z - 31 = 0$;
- as coordenadas do ponto H são $(9,3,17)$.



* 1.1. A superfície esférica de centro H e tangente ao plano xOz pode ser definida por:

- (A) $(x - 9)^2 + (y - 3)^2 + (z - 17)^2 = 3$
 (B) $(x - 9)^2 + (y - 3)^2 + (z - 17)^2 = 9$
 (C) $(x - 9)^2 + (y - 3)^2 + (z - 17)^2 = 17$
 (D) $(x - 9)^2 + (y - 3)^2 + (z - 17)^2 = 81$

* 1.2. Determine a altura do prisma relativamente à base $[ABCD]$.

2. No início deste ano foi realizado um estudo de mercado acerca dos hábitos de consumo das famílias portuguesas, durante o ano de 2020, no que diz respeito ao uso regular de plataformas *online* para a realização das suas compras. Para tal, realizou-se um inquérito à pessoa do agregado familiar que habitualmente faz as compras de bens alimentares para a família, e concluiu-se que:

- 40% dos responsáveis pelas compras têm idade inferior a 45 anos;
- em cada 9 responsáveis pelas compras, com idade não inferior a 45 anos, apenas 2 usam plataformas de compras *online* regularmente;
- 10% dos responsáveis pelas compras não usam regularmente plataformas *online* e têm idade inferior a 45 anos.

O João participou neste estudo e faz habitualmente as compras de casa usando plataformas *online*. Qual é a probabilidade de o João ter uma idade inferior a 45 anos?

Apresente o resultado na forma de fração irredutível.

* 3. Considere a sucessão (u_n) de termo geral $u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{2n}$ e a função f , de domínio \mathbb{R}^+ , definida por $f(x) = \log x$. A que é igual $\lim f(u_n)$?

- (A) $\frac{\ln 10}{2}$ (B) $\frac{2}{\ln 10}$ (C) $\frac{e^2}{10}$ (D) $\frac{10}{e^2}$

- * 4. Considere uma progressão aritmética (a_n) e uma progressão geométrica (b_n) , das quais se sabe que têm a mesma razão e o mesmo primeiro termo.

Sabe-se ainda que a soma dos primeiros cinquenta termos de (a_n) é 662,5 e que a soma dos cinquenta termos seguintes é 1912,5.

Seja S_n a soma dos n primeiros termos da progressão geométrica (b_n) .

Calcule $\lim S_n$.

5. Considere todos os números naturais de sete algarismos que se podem escrever utilizando dois algarismos 5, um algarismo 6, três algarismos 8 e um algarismo 0.

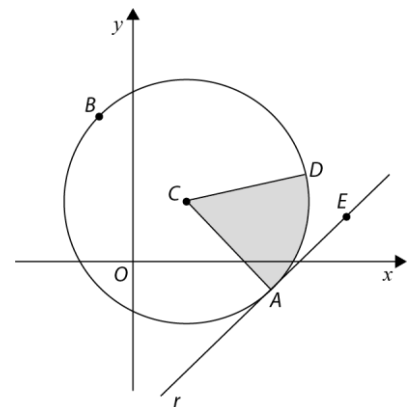
Escolhendo um desses números ao acaso, determine a probabilidade de o número escolhido ser múltiplo de 5 e menor do que oito milhões.

Apresente o resultado na forma de fração irredutível.

- * 6. Na figura estão representadas, num referencial o.n. Oxy , a circunferência de centro C e de diâmetro $[AB]$ e a reta r que contém o ponto E e é tangente à circunferência no ponto A .

Sabe-se ainda que:

- as coordenadas dos pontos A e B são, respetivamente, $(3, -1)$ e $(-1, 4)$;
- a área do setor circular, representado a sombreado na figura, é $\frac{41\pi}{48}$.



Qual é o valor exato do produto escalar $\overrightarrow{CB} \cdot (\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AE})$?

- (A) $-\frac{41\sqrt{3}}{8}$ (B) $\frac{41\sqrt{3}}{8}$ (C) $-\frac{41}{8}$ (D) $\frac{41}{8}$

7. Seja f a função, de domínio \mathbb{R} , definida por $f(x) = \cos x + \sin x$.

Seja g a função, de domínio \mathbb{R} , definida por $g(x) = x^2$.

Sem recorrer à calculadora, prove que existe pelo menos um $c \in]0, \frac{\pi}{2}[$ tal que a reta tangente ao gráfico de f em c é paralela à reta tangente ao gráfico de g em c .

* 8. Seja h a função, de domínio \mathbb{R} , definida por $h(x) = \frac{x}{e^{2x}}$.

Sabe-se que existe um $a \in \mathbb{R}$ tal que $\lim_{x \rightarrow a} \frac{xe^{-2x} - ae^{-2a}}{x-a} = 0$.

Qual é a equação reduzida da reta tangente ao gráfico de h em $x = a$?

- (A) $y = e$
- (B) $y = 2e$
- (C) $y = \frac{1}{e}$
- (D) $y = \frac{1}{2e}$

9. Resolva, em \mathbb{R} , sem recorrer à calculadora, a equação $\ln(e^{2x} + 4) = x + \ln(4)$.

10. Seja g a função, de domínio \mathbb{R} , definida por:

$$g(x) = \begin{cases} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{e^{2x} - 1} & \text{se } x < 0 \\ \frac{1}{2} & \text{se } x = 0 \\ \frac{1}{2} + x \ln(x) & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

Resolva os itens seguintes, sem recorrer à calculadora.

* 10.1. Averigüe se a função g é contínua em $x = 0$.

* 10.2. Estude a função g quanto à monotonia, em $]0, +\infty[$, e determine, caso exista(m), o(s) extremo(s) relativo(s).

Na sua resposta, apresente o(s) intervalo(s) de monotonia.

11. Seja \mathbb{C} o conjunto dos números complexos.

Considere, em \mathbb{C} , a equação $z^2 = -\bar{z}$.

Sabe-se que, no plano complexo, os afixos dos números complexos que são soluções desta equação são os vértices de um polígono.

Determine a área desse polígono.

12. Seja \mathbb{C} o conjunto dos números complexos.

Seja z um número complexo tal que $|z + i|^2 + |z - i|^2 \leq 20$.

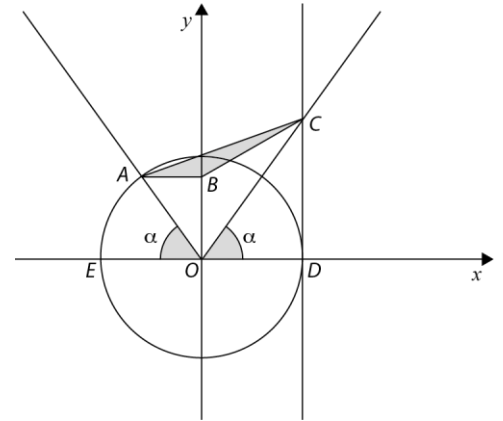
Mostre que o afixo de z pertence ao círculo de centro na origem do referencial e raio igual a 3.

13. Considere as funções f e g definidas, em \mathbb{R} , respetivamente, por $f(x) = \sin x - \frac{1}{2}\sin(2x)$ e $g(x) = 2\sin x$.

* 13.1. Na figura está representada, num referencial o.n. Oxy , a circunferência trigonométrica.

Sabe-se que:

- o ponto A está no segundo quadrante e pertence à circunferência;
- o ponto D tem coordenadas $(1, 0)$;
- o ponto E tem coordenadas $(-1, 0)$;
- o ponto C pertence ao primeiro quadrante e tem abcissa igual à do ponto D ;
- o ponto B pertence ao eixo Oy e é tal que o segmento de reta $[AB]$ é paralelo ao eixo Ox ;
- os ângulos DOC e AOE são geometricamente iguais e cada um deles tem amplitude α ($\alpha \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$).



A área do triângulo $[ABC]$, representado a sombreado na figura, pode ser dada em função de α por:

- (A) $f(\alpha)$ (B) $2f(\alpha)$ (C) $\frac{f(\alpha)}{2}$ (D) $\frac{f(\alpha)}{4}$

* 13.2. Recorrendo a processos exclusivamente analíticos, determine as abcissas dos pontos de interseção dos gráficos das funções f e g .

14. Seja h a função, de domínio \mathbb{R}^- , definida por $h(x) = \frac{\ln(-x) - x + e^x}{x}$.

Estude, recorrendo a métodos exclusivamente analíticos, a função h quanto à existência de assíntotas verticais e horizontais ao seu gráfico e, caso exista(m), escreva a(s) sua(s) equação(ões).

* 15. Seja a um número real pertencente ao intervalo $]0, 2[$.

Considere as funções f e g , definidas em \mathbb{R} , por $f(x) = e^{ax^2} + x + 1$ e $g(x) = \ln(a)x + a$.

Determine, recorrendo às capacidades gráficas da calculadora, o(s) valor(es) de a , para o(s) qual(is) os gráficos das funções f e g se intersejam num único ponto.

Na sua resposta:

- apresente uma equação que lhe permita resolver o problema;
- reproduza, num referencial, o(s) gráfico(s) da função(ões) visualizado(s) na calculadora que lhe permite(m) resolver a equação;
- apresente o(s) valor(es) de a com arredondamento às centésimas.

FIM

COTAÇÕES

As pontuações obtidas nas respostas a estes 11 itens da prova contribuem obrigatoriamente para a classificação final.	1.1.	1.2.	3.	4.	6.	8.	10.1.	10.2.	13.1.	13.2.	15.	Subtotal
Cotação (em pontos)	12	14	12	14	12	12	14	14	12	14	14	144
Destes 7 itens, contribuem para a classificação final da prova os 4 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação.	2.	5.	7.	9.	11.	12.	14.					Subtotal
Cotação (em pontos)	4 x 14 pontos											56
TOTAL												200

Prova-Modelo de Exame de Matemática A – 12.º ano – Proposta de resolução

1.

1.1. Opção (B)

A superfície esférica de centro em H e tangente ao plano xOz tem raio igual à ordenada de H , ou seja, 3.

Assim, a superfície esférica de centro em H e tangente ao plano xOz pode ser definida por:

$$(x - 9)^2 + (y - 3)^2 + (z - 17)^2 = 9$$

1.2. A altura do prisma relativamente à base $[ABCD]$ pode ser dada pela distância entre D e H .

Determinemos as coordenadas do ponto D .

D é a interseção da reta DH com o plano ABC .

$$DH: (x, y, z) = (9, 3, 17) + k(2, 3, 6), k \in \mathbb{R}$$

$(9 + 2k, 3 + 3k, 17 + 6k)$, com $k \in \mathbb{R}$, são as coordenadas de um ponto genérico da reta DH .

Substituindo na equação cartesiana do plano ABC , tem-se:

$$2(9 + 2k) + 3(3 + 3k) + 6(17 + 6k) - 31 = 0$$

$$\Leftrightarrow 18 + 4k + 9 + 9k + 102 + 36k - 31 = 0$$

$$\Leftrightarrow 49k = -98$$

$$\Leftrightarrow k = -2$$

$$k = -2 \rightsquigarrow (9 + 2 \times (-2), 3 + 3 \times (-2), 17 + 6 \times (-2))$$

Logo, $D = (5, -3, 5)$.

$$\begin{aligned} h = d(D, H) &= \sqrt{(9 - 5)^2 + (3 + 3)^2 + (17 - 5)^2} = \\ &= \sqrt{16 + 36 + 144} = \\ &= \sqrt{196} = \\ &= 14 \end{aligned}$$

Assim, a altura do prisma relativamente à base $[ABCD]$ é 14 unidades de comprimento.

2. Consideremos os acontecimentos:

I : "Ter idade inferior a 45 anos."

O : "Fazer compras *online*."

Pelos dados do enunciado, sabe-se que:

- $P(I) = 0,4 = \frac{2}{5}$

- $P(O|\bar{I}) = \frac{2}{9}$

- $P(\bar{O} \cap I) = 0,1 = \frac{1}{10}$

Pretende-se determinar o valor de $P(I|O)$.

Assim:

	I	\bar{I}	
O	$\frac{3}{10}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{13}{30}$
\bar{O}	$\frac{1}{10}$	$\frac{7}{15}$	$\frac{17}{30}$
	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$	1

Cálculos auxiliares

$$\bullet P(O|\bar{I}) = \frac{2}{9} \Leftrightarrow \frac{P(O \cap \bar{I})}{P(\bar{I})} = \frac{2}{9} \Leftrightarrow P(O \cap \bar{I}) = \frac{2}{9} \times \frac{3}{5} \\ \Leftrightarrow P(O \cap \bar{I}) = \frac{2}{15}$$

$$\bullet P(O \cap I) = \frac{2}{5} - \frac{1}{10} = \frac{3}{10}$$

$$\bullet P(O) = \frac{3}{10} + \frac{2}{15} = \frac{13}{30}$$

$$\text{Logo, } P(I|O) = \frac{P(I \cap O)}{P(O)} = \frac{\frac{3}{10}}{\frac{13}{30}} = \frac{90}{130} = \frac{9}{13}.$$

3. Opção (B)

Tem-se que:

$$\lim(u_n) = \lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{2n} = \lim \left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right)^2 = \\ = \left(\underbrace{\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}_{\text{limite notável}}\right)^2 = \\ = e^2$$

Assim:

$$\lim f(u_n) = \lim_{x \rightarrow e^2} \log(x) = \log(e^2) = 2 \log e = \\ = 2 \times \frac{\ln e}{\ln 10} = \\ = 2 \times \frac{1}{\ln 10} = \\ = \frac{2}{\ln 10}$$

4. Sabemos que (a_n) é uma progressão aritmética, que $a_1 + a_2 + \dots + a_{50} = 662,5$ e que

$$a_{51} + a_{52} + \dots + a_{100} = 1912,5.$$

Assim, tem-se que:

$$\begin{cases} \frac{a_1 + a_{50}}{2} \times 50 = 662,5 \\ \frac{a_{51} + a_{100}}{2} \times 50 = 1912,5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 + a_{50} = 26,5 \\ a_{51} + a_{100} = 76,5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 + (a_1 + 49r) = 26,5 \\ (a_1 + 50r) + (a_1 + 99r) = 76,5 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} 2a_1 + 49r = 26,5 \\ 2a_1 + 149r = 76,5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a_1 = 26,5 - 49r \\ 26,5 - 49r + 149r = 76,5 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \overline{\hspace{2cm}} \\ 100r = 50 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a_1 = 26,5 - \frac{49}{2} \\ r = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2a_1 = 2 \\ \text{---} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a_1 = 1 \\ r = \frac{1}{2} \end{array} \right.$$

Logo, $a_1 = b_1 = 1$ e a razão de ambas as progressões (a_n) e (b_n) é $\frac{1}{2}$.

$$\text{Assim, } S_n = \frac{1-r^n}{1-r} \times b_1 = \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}} \times 1 \quad \text{e} \quad \lim S_n = \lim \left(\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{\frac{1}{2}} \times 1 \right) = \frac{1-0}{\frac{1}{2}} = 2.$$

5. O número de casos possíveis é igual a $6 \times {}^6C_2 \times 4 \times {}^3C_3$.

- 6 é o número de posições distintas onde pode ser colocado o zero (uma vez que o número tem sete algarismos, logo não pode começar por zero);
- 6C_2 é o número de maneiras distintas de escolher duas posições para os algarismos cinco, depois de colocado o zero;
- 4 é o número de posições distintas para colocar o algarismo seis, depois de colocados o zero e os dois algarismos cinco;
- ${}^3C_3 = 1$ é o número de maneiras de colocar os três algarismos oito nas três posições restantes.

O número de casos favoráveis é igual a $5 \times 4 \times {}^3C_3 + {}^5C_2 \times {}^3C_3 + 5 \times 4 \times {}^3C_3 + 5 \times 4 \times {}^3C_3$, pois existem quatro casos mutuamente exclusivos.

$$\text{Caso 1: } _5_ _ _ _ _ _ _0_ \quad 5 \times 4 \times {}^3C_3$$

$$\text{Caso 2: } _6_ _ _ _ _ _ _0_ \quad {}^5C_2 \times {}^3C_3$$

$$\text{Caso 3: } _5_ _ _ _ _ _ _5_ \quad 5 \times 4 \times {}^3C_3$$

$$\text{Caso 4: } _6_ _ _ _ _ _ _5_ \quad 5 \times 4 \times {}^3C_3$$

Logo, a probabilidade pedida é igual a:

$$\frac{5 \times 4 \times {}^3C_3 + {}^5C_2 \times {}^3C_3 + 5 \times 4 \times {}^3C_3 + 5 \times 4 \times {}^3C_3}{6 \times {}^6C_2 \times 4 \times {}^3C_3} = \frac{20 + 10 + 20 + 20}{360} = \frac{70}{360} = \frac{7}{36}$$

6. Opção (A)

$$\begin{aligned} \overrightarrow{CB} \cdot (\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AE}) &= \overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CD} + \frac{\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{AE}}{\overrightarrow{CB} \perp \overrightarrow{AE}} = \\ &= \|\overrightarrow{CB}\| \times \|\overrightarrow{CD}\| \times \cos(\widehat{\overrightarrow{CB} \overrightarrow{CD}}) + 0 = \\ &= r \times r \times \cos(\pi - \beta) = \\ &= \frac{\sqrt{41}}{2} \times \frac{\sqrt{41}}{2} \times \cos\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = \\ &= \frac{41}{4} \times \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \\ &= -\frac{41\sqrt{3}}{8} \end{aligned}$$

Cálculos auxiliares

Seja r o raio da circunferência e β a amplitude do ângulo ACD :

$$\begin{aligned} \bullet r &= \|\overrightarrow{CB}\| = \|\overrightarrow{CD}\| = \frac{\|\overrightarrow{AB}\|}{2} = \frac{\sqrt{(-4)^2 + 5^2}}{2} = \\ &= \frac{\sqrt{16+25}}{2} = \frac{\sqrt{41}}{2} \end{aligned}$$

$$\bullet A_{\text{setor circular}} = \frac{\beta \times \left(\frac{\sqrt{41}}{2}\right)^2}{2} = \frac{41}{8} \beta$$

Logo:

$$\frac{41\pi}{48} = \frac{41}{8} \beta \Leftrightarrow \beta = \frac{8}{48} \pi \Leftrightarrow \beta = \frac{\pi}{6}$$



$$7. f'(x) = (\cos x + \operatorname{sen} x)' = -\operatorname{sen} x + \cos x$$

$$g'(x) = (x^2)' = 2x$$

Consideremos a função h , definida em \mathbb{R} , por $h(x) = f'(x) - g'(x) = -\operatorname{sen} x + \cos x - 2x$.

h é contínua, por se tratar da soma de funções contínuas.

Em particular, h é contínua em h .

$$h(0) = -\operatorname{sen} 0 + \cos 0 - 2 \times 0 = 1$$

$$h\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - 2 \times \frac{\pi}{2} = -1 - \pi$$

$$h\left(\frac{\pi}{2}\right) < 0 < h(0)$$

Logo, pelo Teorema de Bolzano-Cauchy, concluímos que:

$$\exists c \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[: h(c) = 0, \text{ ou seja:}$$

$$\exists c \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[: f'(c) - g'(c) = 0, \text{ isto é:}$$

$$\exists c \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[: f'(c) = g'(c)$$

Provámos, assim, que existe pelo menos um $c \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ tal que a reta tangente ao gráfico de f em c é paralela à reta tangente ao gráfico de g em c .

8. Opção (D)

Seja h a função, de domínio \mathbb{R} , definida por $h(x) = \frac{x}{e^{2x}}$.

$$h'(x) = \frac{(x)' \times e^{2x} - x \times (e^{2x})'}{(e^{2x})^2} = \frac{e^{2x} - x \times 2e^{2x}}{(e^{2x})^2} = \frac{e^{2x}(1-2x)}{(e^{2x})^2} = \frac{1-2x}{e^{2x}}$$

$$D_{h'} = \mathbb{R}$$

Sabe-se que existe um $a \in \mathbb{R}$ tal que $\lim_{x \rightarrow a} \frac{xe^{-2x} - ae^{-2a}}{x-a} = 0$, isto é, $\lim_{x \rightarrow a} \frac{h(x) - h(a)}{x-a} = 0$.

Como h admite derivada finita em todos os pontos do seu domínio, pois $D_{h'} = \mathbb{R}$, então

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{h(x) - h(a)}{x-a} = h'(a).$$

Assim, $h'(a) = 0$.

$$h'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1-2x}{e^{2x}} = 0 \Leftrightarrow 1-2x = 0 \wedge e^{2x} \neq 0$$

$$\Leftrightarrow -2x = -1$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$$

Logo, pretendemos a equação reduzida da reta tangente ao gráfico de h em $x = \frac{1}{2}$, que será do tipo $y = 0x + b$, isto é, $y = b$.

Como o ponto de coordenadas $\left(\frac{1}{2}, h\left(\frac{1}{2}\right)\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2e}\right)$ pertence à reta, vem que $\frac{1}{2e} = b$.

Logo, a equação reduzida da reta tangente ao gráfico de h em $x = a$ é $y = \frac{1}{2e}$.

9. $D = \mathbb{R}$

Em \mathbb{R} : $\ln(e^{2x} + 4) = x + \ln(4) \Leftrightarrow \ln(e^{2x} + 4) - \ln(4) = x$

$$\Leftrightarrow \ln\left(\frac{e^{2x}+4}{4}\right) = \ln(e^x)$$

$$\Leftrightarrow \frac{e^{2x}+4}{4} = e^x$$

$$\Leftrightarrow e^{2x} - 4e^x + 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow e^x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4 \times 1 \times 4}}{2}$$

$$\Leftrightarrow e^x = 2$$

$$\Leftrightarrow x = \ln(2)$$

$$C. S. = \{\ln(2)\}$$

10.

10.1. g é contínua em $x = 0$ se e só se existir $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$, isto é, $\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = g(0)$.

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{e^{2x}-1} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\operatorname{sen}x}{e^{2x}-1} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{\operatorname{sen}x}{e^x-1} \times \frac{1}{e^x+1}\right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\frac{\operatorname{sen}x}{x}}{\frac{e^x-1}{x}} \times \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{e^x+1} = \\ &= \frac{\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\operatorname{sen}x}{x}}{\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^x-1}{x}} \times \frac{1}{2} = \\ &= \frac{1}{1} \times \frac{1}{2} = \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{2} + x \ln(x)\right) = \frac{1}{2} + \lim_{x \rightarrow 0^+} (x \ln(x)) = \\ &= \frac{1}{2} + \lim_{y \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{y} \times \ln\left(\frac{1}{y}\right)\right) = \\ &= \frac{1}{2} + \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{-\ln y}{y} = \\ &= \frac{1}{2} - \underbrace{\lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{\ln(y)}{y}}_{\text{limite notável}} = \\ &= \frac{1}{2} - 0 = \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\bullet g(0) = \frac{1}{2}$$

Logo, g é contínua em $x = 0$.

10.2. Em $]0, +\infty[$: $g(x) = \frac{1}{2} + x \ln(x)$

$$g'(x) = 1 \times \ln(x) + x \times \frac{1}{x} = \ln(x) + 1$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \ln(x) + 1 = 0 \Leftrightarrow \ln(x) = -1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{e}$$

x	0		$\frac{1}{e}$	$+\infty$
Sinal de g'		-	0	+
Varição de g		\searrow	$g\left(\frac{1}{e}\right)$ mín.	\nearrow

g é estritamente decrescente em $\left]0, \frac{1}{e}\right]$ e estritamente crescente em $\left[\frac{1}{e}, +\infty\right[$.

$$g\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{e} \ln\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{e} = \frac{e-2}{2e}$$

$\frac{e-2}{2e}$ é mínimo relativo em $\frac{1}{e}$.

11. Seja $z = |z|e^{i\theta}$.

$$z^2 = -\bar{z} \Leftrightarrow (|z|e^{i\theta})^2 = -(|z|e^{i\theta}) \Leftrightarrow |z|^2 e^{i(2\theta)} = -(|z|e^{i(-\theta)})$$

$$\Leftrightarrow |z|^2 e^{i(2\theta)} = |z|e^{i(-\theta+\pi)}$$

$$\Leftrightarrow |z|^2 = |z| \wedge 2\theta = -\theta + \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow |z|^2 - |z| = 0 \wedge 3\theta = \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow |z|(|z| - 1) = 0 \wedge \theta = \frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow |z| = 0 \vee (|z| = 1 \wedge \theta = \frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z})$$

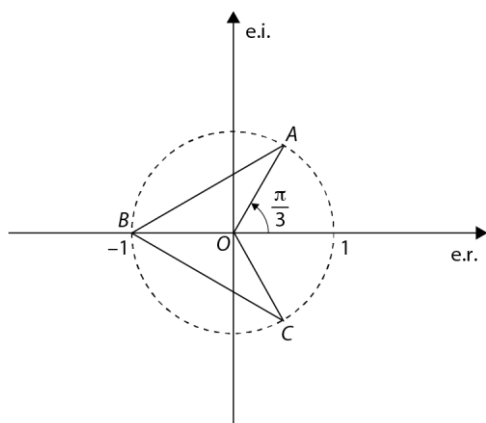
$$\Leftrightarrow z = 0 \vee (|z| = 1 \wedge \theta = \frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z})$$

$$k = 0 \rightsquigarrow 1e^{i\frac{\pi}{3}}$$

$$k = 1 \rightsquigarrow 1e^{i\pi}$$

$$k = 2 \rightsquigarrow 1e^{i\frac{5\pi}{3}}$$

$$\text{C.S.} = \left\{0, e^{i\frac{\pi}{3}}, e^{i\pi}, e^{i\frac{5\pi}{3}}\right\}$$



$$A\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right), \text{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$$

$$A\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$B(-1, 0)$$

$$C\left(\cos\left(\frac{5\pi}{3}\right), \text{sen}\left(\frac{5\pi}{3}\right)\right)$$

$$C\left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$A_{[OABC]} = 2 \times A_{[OAB]} = 2 \times \frac{1 \times \frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ u.a.}$$

$$\begin{aligned}
12. |z+i|^2 + |z-i|^2 \leq 20 &\Leftrightarrow (z+i)(\overline{z+i}) + (z-i)(\overline{z-i}) \leq 20 \\
&\Leftrightarrow (z+i)(\bar{z}+\bar{i}) + (z-i)(\bar{z}-\bar{i}) \leq 20 \\
&\Leftrightarrow (z+i)(\bar{z}-i) + (z-i)(\bar{z}+i) \leq 20 \\
&\Leftrightarrow z\bar{z} - iz + i\bar{z} - i^2 + z\bar{z} + iz - i\bar{z} - i^2 \leq 20 \\
&\Leftrightarrow |z|^2 + 1 + |z|^2 + 1 \leq 20 \\
&\Leftrightarrow 2|z|^2 \leq 18 \\
&\Leftrightarrow |z|^2 \leq 9 \\
&\Leftrightarrow |z| \leq 3
\end{aligned}$$

Logo, o afixo de z pertence ao círculo de centro na origem e raio igual a 3.

13.

13.1. Opção (C)

$A_{[ABC]} = \frac{\overline{AB} \times \overline{B'C}}{2}$, sendo B' a projeção ortogonal de B sobre DC .

$$A(\cos(\pi - \alpha), \sin(\pi - \alpha)) = (-\cos\alpha, \sin\alpha)$$

Como $A \in 2.^\circ Q$ e $\alpha \in \left] \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2} \right[$:

$$\overline{AB} = \cos\alpha$$

$$\overline{B'C} = \operatorname{tg}\alpha - \operatorname{sen}\alpha$$

$$\begin{aligned}
A_{[ABC]} &= \frac{\cos\alpha(\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{sen}\alpha)}{2} = \frac{\cos\alpha\left(\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} - \operatorname{sen}\alpha\right)}{2} = \\
&= \frac{\operatorname{sen}\alpha - \operatorname{sen}\alpha \cos\alpha}{2} = \\
&= \frac{\operatorname{sen}\alpha - \frac{1}{2}\operatorname{sen}(2\alpha)}{2} = \\
&= \frac{f(\alpha)}{2}
\end{aligned}$$

13.2. Pretende-se determinar os valores de x tais que $f(x) = g(x)$:

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}x - \frac{1}{2}\operatorname{sen}(2x) &= 2\operatorname{sen}x \Leftrightarrow \operatorname{sen}x - \frac{1}{2} \times 2\operatorname{sen}x \cos x = 2\operatorname{sen}x \\
&\Leftrightarrow \operatorname{sen}x - \operatorname{sen}x \cos x - 2\operatorname{sen}x = 0 \\
&\Leftrightarrow -\operatorname{sen}x - \operatorname{sen}x \cos x = 0 \\
&\Leftrightarrow -\operatorname{sen}x(1 + \cos x) = 0 \\
&\Leftrightarrow -\operatorname{sen}x = 0 \vee 1 + \cos x = 0 \\
&\Leftrightarrow \operatorname{sen}x = 0 \vee \cos x = -1 \\
&\Leftrightarrow x = k\pi \vee x = \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \\
&\Leftrightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z}
\end{aligned}$$

14. Assíntotas horizontais:

Como o domínio da função h é \mathbb{R}^- , calculemos o limite quando $x \rightarrow -\infty$:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln(-x) - x + e^x}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{\ln(-x)}{x} - \frac{x}{x} + \frac{e^x}{x} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln(-x)}{x} - 1 + \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln(-x)}{-x} \times (-1) - 1 + \frac{e^{-\infty}}{+\infty} =\end{aligned}$$

Considerando a mudança de variável $y = -x$, vem que:

$$\begin{aligned}&= - \lim_{\underbrace{y \rightarrow +\infty}_{\text{limite notável}} \frac{\ln(y)}{y}} - 1 + \frac{0}{+\infty} = \\ &= 0 - 1 + 0 = \\ &= -1\end{aligned}$$

A reta de equação $y = -1$ é assíntota horizontal ao gráfico de h quando $x \rightarrow -\infty$.

Assíntotas verticais:

Como a função h é contínua em todo o seu domínio \mathbb{R}^- , apenas a reta de equação $x = 0$ pode ser assíntota vertical ao gráfico da função h .

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\ln(-x) - x + e^x}{x} = \frac{\ln(0^+) - 0 + e^0}{0^-} = \frac{-\infty - 0 + 1}{0^-} = \frac{-\infty}{0^-} = +\infty$$

A reta de equação $x = 0$ é assíntota vertical ao gráfico de h .

15. $f(x) = g(x) \Leftrightarrow e^a x^2 + x + 1 = \ln(a)x + a$

$$\Leftrightarrow e^a x^2 + (1 - \ln(a))x + 1 - a = 0$$

A equação de 2.º grau acima tem uma única solução se e só se $(1 - \ln(a))^2 - 4e^a(1 - a) = 0$.

Utilizando as capacidades gráficas da calculadora e usando x como variável independente, tem-se:

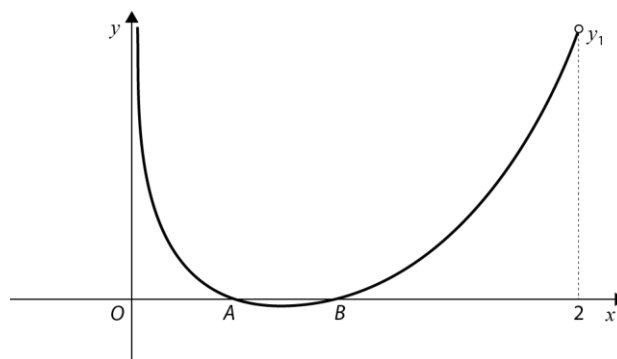
$$y_1 = (1 - \ln(x))^2 - 4e^x(1 - x)$$

$$A(0,41; 0)$$

$$B(0,86; 0)$$

$$a \approx 0,41$$

$$a \approx 0,86$$



Os valores de a , com arredondamento às centésimas, são 0,41 e 0,86.