Teste N.º 1

Matemática A

Duração do Teste (Caderno 1+ Caderno 2): 90 minutos

11.º Ano de Escolaridade

Nome do aluno: ____ N.º: __ Turma: ___

Este teste é constituído por **dois** cadernos:

- Caderno 1 – com recurso à calculadora;
- Caderno 2 – sem recurso à calculadora.

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta indelével, azul ou preta.

Não é permitido o uso de corretor. Em caso de engano, deve riscar de forma inequívoca aquilo que pretende que não seja classificado.

Escreva de forma legível a numeração dos itens, bem como as respetivas respostas. As respostas ilegíveis ou que não possam ser claramente identificadas são classificadas com zero pontos.

Para cada item, apresente apenas uma resposta. Se escrever mais do que uma resposta a um mesmo item, apenas é classificada a resposta apresentada em primeiro lugar.

As cotações encontram-se no final do enunciado da prova.

Para responder aos itens de escolha múltipla, não apresente cálculos nem justificações e escreva, na folha de respostas:

- o número do item;
- a letra que identifica a única opção escolhida.

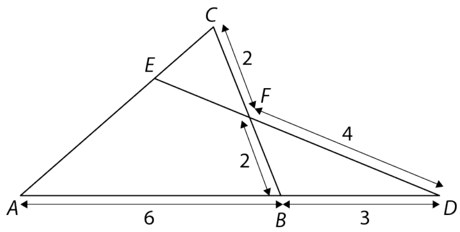
Na resposta aos itens de resposta aberta, apresente todos os cálculos que tiver de efectuar e todas as justificações necessárias.

Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

CADERNO 1: 45 MINUTOS

É PERMITIDO O USO DA CALCULADORA.

1. Considere os triângulos $[ABC]$ e $[ADE]$ da figura.



Sabe-se que:

- $\overline{AB} = 6$
- $\overline{BF} = 2$
- $\overline{FC} = 2$
- $\overline{FD} = 4$
- $\overline{BD} = 3$

O valor de $\overline{AC}$, considerando nos cálculos intermédios, sempre que necessário, aproximações com três casas decimais, é aproximadamente igual a:

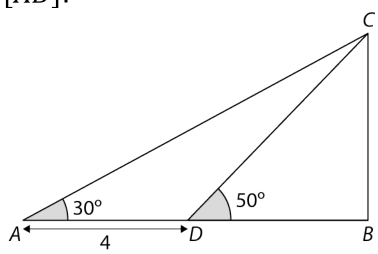
(A) 5,8

(B) 6,3

(C) 6,8

(D) 7,3

2. Na figura, o triângulo $[ABC]$ é retângulo em B e D pertence ao lado $[AB]$.



Sabe-se ainda que:

- $\overline{AD} = 4$ cm
- $B\hat{A}C = 30°$
- $B\widehat{D}C = 50°$

Determine a medida da área do triângulo $[ADC]$.

Apresente o resultado arredondado às milésimas.

Se, em cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, cinco casas decimais.

3. Seja α um número real. Sabe-se que α é uma solução da equação $\cos x = -\frac{3}{4}$.

Considere as seguintes expressões:

(I) $\frac{\pi}{2} + \alpha$ **(II)** $\frac{3\pi}{2} - \alpha$ **(III)** $\pi + \alpha$ **(IV)** $2\pi - \alpha$

Qual ou quais das expressões acima designa uma solução da equação $\operatorname{sen} x = \frac{3}{4}$?

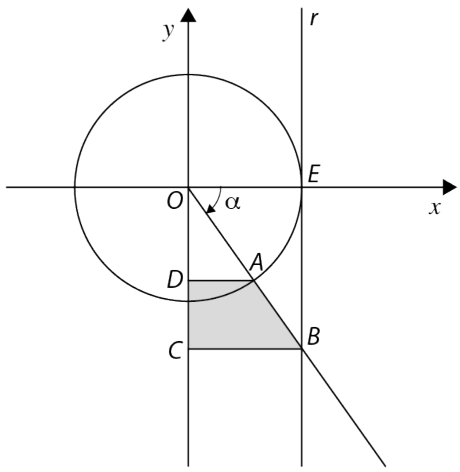
(A) I e IV

(B) II

(C) II e III

(D) IV

4. Na figura está representada, num referencial o.n. Oxy, a circunferência trigonométrica.



Sabe-se que:

- a reta r é definida pela equação $x = 1$;
- o ponto A está no quarto quadrante e pertence à circunferência;
- o ponto B é a interseção do prolongamento da semirreta $\dot{O}A$ com a reta r;
- o ângulo de amplitude α tem por lado origem o semieixo positivo Ox, por lado extremidade a semirreta $\dot{O}A$ e sentido negativo $\left(\alpha \in \left]-\frac{\pi}{2}, 0\right[\right)$;
- os pontos C e D são, respetivamente, as projeções ortogonais de B e A sobre o eixo Oy;
- o ponto E tem coordenadas $(1, 0)$.

4.1. Mostre que a área do trapézio $[ABCD]$, representada a sombreado, é dada em função de α por $A(\alpha) = -\frac{1}{2}\text{tg}\alpha \, \text{sen}^2\alpha$.

4.2. Recorrendo à calculadora gráfica, determine o(s) valor(es) de α para o(s) qual(is) a área do trapézio $[ABCD]$ é igual à área do setor circular de ângulo ao centro EOA.

Na sua resposta:

- equacione o problema;
- reproduza, num referencial, o gráfico da função ou os gráficos das funções que visualizar na calculadora e que lhe permite(m) resolver o problema;
- apresente o(s) valor(es) de α com aproximação às centésimas.

4.3. Suponha que β é tal que $-\frac{\pi}{2} < \beta < 0$ e $\text{sen}\left(-\frac{\pi}{2} + \beta\right) = -\frac{2}{3}$.

Determine o valor exato de $A(\beta)$.

FIM DO CADERNO 1

COTAÇÕES (Caderno 1)

Item						
Cotação (em pontos)						
1.	**2.**	**3.**	**4.1.**	**4.2.**	**4.3.**	
8	20	8	20	15	20	**91**

CADERNO 2: 45 MINUTOS

NÃO É PERMITIDO O USO DA CALCULADORA.

5. Seja θ um valor pertencente ao intervalo $\left]-\frac{3\pi}{2}, -\pi\right[$.

Qual das expressões seguintes designa um número real negativo?

(A) $\operatorname{sen}\theta - \cos\theta$

(B) $\operatorname{sen}\theta - \operatorname{tg}\theta$

(C) $\cos\theta + \operatorname{tg}\theta$

(D) $\operatorname{tg}\theta \times \cos\theta + \operatorname{sen}\theta$

6. Determina o valor exato da expressão seguinte:

$$\operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{9}\right) - \operatorname{sen}\left(\frac{7\pi}{2}\right) + \cos(2018\pi) - 3\operatorname{tg}\left(\frac{11\pi}{6}\right) + \cos^2\left(\frac{3\pi}{4}\right) + \cos^2\left(-\frac{\pi}{9}\right)$$

7. Seja f a função, de domínio $\mathbb{R}\backslash\{x: x = \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$, definida por:

$$f(x) = \frac{2\operatorname{sen}x + 2}{\cos x + 1} + 4\cos x - 4$$

7.1. Prove, para todo o x onde a igualdade tem significado, a seguinte igualdade:

$$f(x) = \frac{-4\operatorname{sen}^2 x + 2\operatorname{sen}x + 2}{\cos x + 1}$$

7.2. Determine, no intervalo $]-\pi, 3\pi[\backslash\{\pi\}$, os valores de x tais que $f(x) = 0$.

8. Sabendo que $\operatorname{sen}x + 2\cos x = 1$ e $x \in \mathbb{R}\backslash\left\{x: x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$, determine o valor de $\operatorname{tg}x$.

9. Considere a função f, de domínio A e contradomínio $\left[\frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right]$, definida por $f(x) = \cos x$.

Qual dos conjuntos seguintes pode ser o conjunto A?

(A) $\left[-\frac{\pi}{4}, -\frac{\pi}{6}\right]$

(B) $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{6}\right]$

(C) $\left[0, \frac{\pi}{6}\right]$

(D) $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$

10. Qual é o valor de $\operatorname{arcsen}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \arccos\left(-\frac{1}{2}\right)$?

(A) $-\frac{\pi}{3}$

(B) 0

(C) $\frac{\pi}{3}$

(D) $\frac{2\pi}{3}$

11. Resolva, em $[0, 2\pi]$, a seguinte condição:

$$\cos x > \frac{\sqrt{3}}{2} \wedge \operatorname{sen} x \leq \frac{1}{2}$$

FIM DO CADERNO 2

COTAÇÕES (Caderno 2)

<table>
<tr><th colspan="9">Item</th></tr>
<tr><th colspan="9">Cotação (em pontos)</th></tr>
<tr><th>5.</th><th>6.</th><th>7.1.</th><th>7.2.</th><th>8.</th><th>9.</th><th>10.</th><th>11.</th><th></th></tr>
<tr><td>8</td><td>15</td><td>20</td><td>20</td><td>15</td><td>8</td><td>8</td><td>15</td><td>109</td></tr>
</table>

TESTE N.º 1 – Proposta de resolução

Caderno 1

1. Opção (B)

Pela lei dos cossenos, sabemos que:

$$4^2 = 2^2 + 3^2 - 2 \times 2 \times 3 \times \cos(F\hat{B}D)$$

Logo:

$$16 = 4 + 9 - 12\cos\left(F\hat{B}D\right) \Leftrightarrow 12\cos\left(F\hat{B}D\right) = -3$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(F\hat{B}D\right) = -\frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow F\hat{B}D = \arccos\left(-\frac{1}{4}\right)$$

ou seja:

$$F\hat{B}D \approx 1{,}823$$

Então:

$$C\hat{B}A \approx \pi - 1{,}823 \approx 1{,}319$$

Novamente, pela lei dos cossenos, vem que:

$$\overline{AC}^2 = 6^2 + 4^2 - 2 \times 6 \times 4 \times \cos(C\hat{B}A)$$

Logo:

$$\overline{AC}^2 = 36 + 16 - 48\cos(1{,}319)$$

ou seja:

$$\overline{AC}^2 = 40{,}041$$

Daqui se conclui que:

$$\overline{AC} \approx 6{,}3$$

2. Consideremos o triângulo [*ADC*]:

$$A\hat{D}C = 180° - 50° = 130°$$

$$A\hat{C}D = 180° - 130° - 30° = 20°$$

Aplicando a lei dos senos ao triângulo [*ADC*], vem que:

$$\frac{\operatorname{sen}(20°)}{4} = \frac{\operatorname{sen}(30°)}{\overline{DC}}$$

Logo:

$$\overline{DC} = \frac{4 \times \frac{1}{2}}{\operatorname{sen}(20°)}$$

isto é:

$$\overline{DC} = \frac{2}{\text{sen}(20°)}$$

ou seja:

$$\overline{DC} \approx 5{,}84761$$

Aplicando a lei dos senos ao triângulo [*DBC*], vem que:

$$\frac{\text{sen}(90°)}{\overline{DC}} = \frac{\text{sen}(50°)}{\overline{BC}}$$

ou seja:

$$\frac{1}{5{,}84761} = \frac{\text{sen}(50°)}{\overline{BC}}$$

isto é:

$$\overline{BC} = \text{sen}(50°) \times 5{,}84761$$

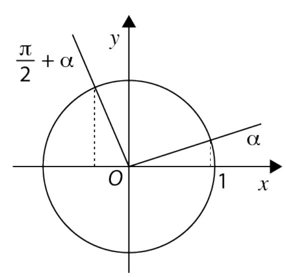
Daqui se conclui que:

$$\overline{BC} \approx 4{,}47953$$

Assim, a área do triângulo [*ADC*] é igual a:

$$\frac{\overline{AD} \times \overline{BC}}{2} = \frac{4 \times 4{,}47953}{2} \approx 8{,}959 \text{ u.a.}$$

3. Opção (B)



Sabemos que $\cos\alpha = -\frac{3}{4}$.

Logo:

- $\text{sen}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos\alpha = -\frac{3}{4}$

  $\frac{\pi}{2} + \alpha$ não é solução da equação $\text{sen}x = \frac{3}{4}$.

- $\text{sen}\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = -\cos\alpha = \frac{3}{4}$

  $\frac{3\pi}{2} - \alpha$ é solução da equação $\text{sen}x = \frac{3}{4}$.

- $\text{sen}(\pi + \alpha) = -\text{sen}\alpha$ e $\text{sen}^2\alpha = 1 - \frac{9}{16} \Leftrightarrow \text{sen}^2\alpha = \frac{7}{16} \Leftrightarrow \text{sen}\alpha = \pm\frac{\sqrt{7}}{4}$

  $\pi + \alpha$ não é solução da equação $\text{sen}x = \frac{3}{4}$.

- $\text{sen}(2\pi - \alpha) = -\text{sen}\alpha$

  $2\pi - \alpha$ não é solução da equação $\text{sen}x = \frac{3}{4}$.

4.

4.1. Sabemos que $A(\cos\alpha, \text{sen}\,\alpha)$ e $B(1, \text{tg}\,\alpha)$ e que $\cos\alpha > 0$, $\text{sen}\,\alpha < 0$ e $\text{tg}\,\alpha < 0$

A área do trapézio [*ABCD*] é igual a:

$$\frac{\overline{CB}+\overline{DA}}{2} \times \overline{DC} = \frac{1+\cos\alpha}{2} \times (|\text{tg}\alpha| - |\text{sen}\alpha|) =$$
$$= \frac{1+\cos\alpha}{2} \times (-\text{tg}\alpha + \text{sen}\alpha) =$$
$$= -\frac{1}{2} \times (1+\cos\alpha)(\text{tg}\alpha - \text{sen}\alpha) =$$
$$= -\frac{1}{2} \times (\text{tg}\alpha - \text{sen}\alpha + \cos\alpha\text{tg}\alpha - \text{sen}\alpha\cos\alpha) =$$
$$= -\frac{1}{2} \times (\text{tg}\alpha - \text{sen}\alpha + \text{sen}\alpha - \text{sen}\alpha\cos\alpha) =$$
$$= -\frac{1}{2} \times \left(\frac{\text{sen}\alpha}{\cos\alpha} - \frac{\text{sen}\alpha\cos^2\alpha}{\cos\alpha}\right) =$$
$$= -\frac{1}{2} \times \text{tg}\alpha(1-\cos^2\alpha) =$$
$$= -\frac{1}{2} \times \text{tg}\alpha\,\text{sen}^2\alpha$$

4.2. A área do setor circular de ângulo ao centro EOA é igual a $-\frac{\alpha}{2}$.

Pretendemos, então, determinar o(s) valor(es) de α para o(s) qual(is) $-\frac{1}{2}\text{tg}\alpha\,\text{sen}^2\alpha = -\frac{\alpha}{2}$.

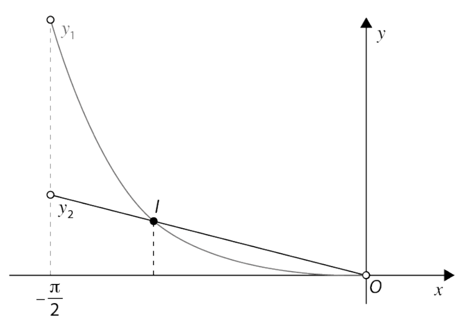
Recorrendo às capacidades gráficas da calculadora, vamos determinar o valor pretendido:

$y_1 = -\frac{1}{2}\text{tg}\alpha\,\text{sen}^2\alpha$

$y_2 = -\frac{\alpha}{2}$

$I(a, b)$

$a \approx -0{,}96$



O valor pretendido com aproximação às centésimas é $-0{,}96$.

4.3. Sabemos que $\text{sen}\left(-\frac{\pi}{2}+\beta\right) = -\frac{2}{3}$, logo $-\cos\beta = -\frac{2}{3} \Leftrightarrow \cos\beta = \frac{2}{3}$.

Pela Fórmula Fundamental da Trigonometria, tem-se que $\text{sen}^2\beta + \cos^2\beta = 1$.

Logo:

$$\text{sen}^2\beta = 1 - \frac{4}{9}$$

ou seja:

$$\text{sen}^2\beta = \frac{5}{9} \Leftrightarrow \text{sen}\beta = \pm\frac{\sqrt{5}}{3}$$

Como $-\frac{\pi}{2} < \beta < 0$, então $\text{sen}\beta = -\frac{\sqrt{5}}{3}$.

Logo:

$$\text{tg}\beta = \frac{-\frac{\sqrt{5}}{3}}{\frac{2}{3}} = -\frac{\sqrt{5}}{2}$$

Daqui se conclui que $A(\beta) = -\frac{1}{2} \times \left(-\frac{\sqrt{5}}{2}\right) \times \frac{5}{9} = \frac{5\sqrt{5}}{36}$.

Caderno 2

5. Opção (C)

Se $\theta \in \left]-\frac{3\pi}{2}, -\pi\right[$, então θ pertence ao 2.º quadrante. Logo, $\text{sen}\theta > 0, \cos\theta < 0$ e $\text{tg}\theta < 0$.

Assim, concluímos que:

- $\text{sen}\theta - \cos\theta > 0$
- $\text{sen}\theta - \text{tg}\theta > 0$
- $\cos\theta + \text{tg}\theta < 0$
- $tg\ \theta \times \cos\theta + \text{sen}\theta > 0$

6. $\text{sen}^2\left(\frac{\pi}{9}\right) - \text{sen}\left(\frac{7\pi}{2}\right) + \cos(2018\pi) - 3\text{tg}\left(\frac{11\pi}{6}\right) + \cos^2\left(\frac{3\pi}{4}\right) + \cos^2\left(-\frac{\pi}{9}\right) =$

$$= \underbrace{\text{sen}^2\left(\frac{\pi}{9}\right) + \cos^2\left(\frac{\pi}{9}\right)}_{1} - \text{sen}\left(\frac{3\pi}{2}\right) + \cos(0) - 3\text{tg}\left(-\frac{\pi}{6}\right) + \cos^2\left(\frac{3\pi}{4}\right) =$$

$$= 1 - (-1) + 1 - 3 \times \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 =$$

$$= 3 + \sqrt{3} + \frac{1}{2} =$$

$$= \frac{7}{2} + \sqrt{3}$$

7.

7.1. $f(x) = \frac{2\text{sen}x+2}{\cos x+1} + 4\cos x - 4 =$

$$= \frac{2\text{sen}x+2+4(\cos x-1)(\cos x+1)}{\cos x+1} =$$

$$= \frac{2\text{sen}x+2+4(\cos^2 x-1)}{\cos x+1} =$$

$$= \frac{2\text{sen}x+2+4(-\text{sen}^2 x)}{\cos x+1} =$$

$$= \frac{-4\text{sen}^2 x+2\text{sen}x+2}{\cos x+1}$$

7.2. Seja x pertencente ao domínio de f:

$f(x) = 0 \Leftrightarrow -4\text{sen}^2 x + 2\text{sen}x + 2 = 0$

$\Leftrightarrow \text{sen}x = \frac{-2\pm\sqrt{4-4\times(-4)\times 2}}{-8}$

$\Leftrightarrow \text{sen}x = \frac{-2\pm 6}{-8}$

$\Leftrightarrow \text{sen}x = 1 \quad \vee \quad \text{sen}x = -\frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad \vee \quad x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \quad \vee \quad x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Em $]-\pi, 3\pi[\ \backslash\{\pi\}$: $x = -\frac{5\pi}{6}$ ou $x = -\frac{\pi}{6}$ ou $x = \frac{\pi}{2}$ ou $x = \frac{7\pi}{6}$ ou $x = \frac{11\pi}{6}$ ou $x = \frac{5\pi}{2}$

8. $\text{sen}x + 2\cos x = 1 \Rightarrow (\text{sen}x + 2\cos x)^2 = 1^2$

$\Leftrightarrow \text{sen}^2 x + 4\text{sen}x\cos x + 4\cos^2 x = 1$

$\Leftrightarrow \underbrace{\text{sen}^2 x + \cos^2 x}_{1} + 4\text{sen}x\cos x + 3\cos^2 x = 1$

$\Leftrightarrow 4\text{sen}x\cos x + 3\cos^2 x = 0$

$\Leftrightarrow \cos x(4\text{sen}x + 3\cos x) = 0$

$\Leftrightarrow \underbrace{\cos x = 0}_{\text{condição impossível em } \mathbb{R}\backslash\left\{x:x=\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbb{Z}\right\}} \quad \vee \quad 4\text{sen}x + 3\cos x = 0$

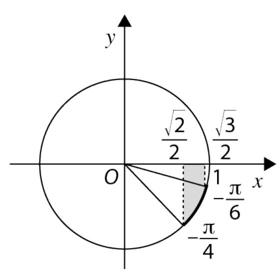
Como $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$, então $\cos x \neq 0$.

Logo, $4\text{sen}x + 3\cos x = 0$.

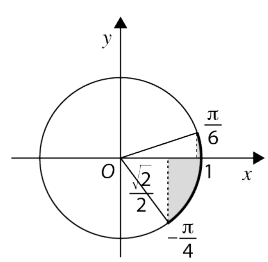
Ora $4\text{sen}x + 3\cos x = 0 \Leftrightarrow 4\text{sen}x = -3\cos x \Leftrightarrow \frac{\text{sen}x}{\cos x} = -\frac{3}{4} \Leftrightarrow \text{tg}x = -\frac{3}{4}$

9. Opção (B)

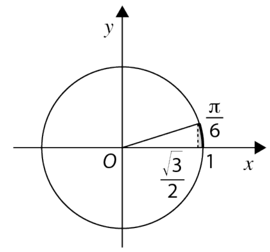
Se $-\frac{\pi}{4} \leq x \leq -\frac{\pi}{6}$, então $\frac{\sqrt{2}}{2} \leq \cos x \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$



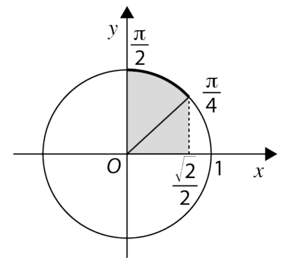
Se $-\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{6}$, então $\frac{\sqrt{2}}{2} \leq \cos x \leq 1$



Se $0 \leq x \leq \frac{\pi}{6}$, então $\frac{\sqrt{3}}{2} \leq \cos x \leq 1$



Se $\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$, então $0 \leq \cos x \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$



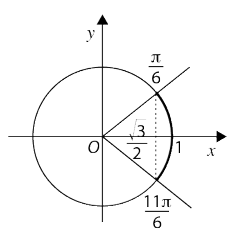
10. Opção (C)

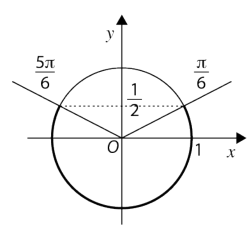
$$\text{arcsen}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \text{arccos}\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{3}$$

11. $\cos x > \frac{\sqrt{3}}{2} \ \wedge \ \text{sen}x \leq \frac{1}{2} \ \wedge \ 0 \leq x \leq 2\pi$

$$\Leftrightarrow \left(0 \leq x < \frac{\pi}{6} \ \vee \ \frac{11\pi}{6} < x \leq 2\pi\right) \ \wedge \ \left(0 \leq x \leq \frac{\pi}{6} \ \vee \frac{5\pi}{6} \leq x \leq 2\pi\right)$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq x < \frac{\pi}{6} \ \vee \ \frac{11\pi}{6} < x \leq 2\pi$$





C.S. $= \left[0, \frac{\pi}{6}\right[\cup \left]\frac{11\pi}{6}, 2\pi\right]$