Teste de Matemática A

2016 / 2017

Teste N.º 3

Matemática A

Duração do Teste: 90 minutos

11.º Ano de Escolaridade

Nome do aluno: ______________________________ N.º: ____ Turma: ____

Grupo I

- Os cinco itens deste grupo são de escolha múltipla.
- Em cada um deles, são indicadas quatro alternativas de resposta, das quais **só uma** está correta.
- Escreva na sua folha de respostas **apenas o número de cada item e a letra** correspondente à alternativa que selecionar para responder a esse item.
- Se apresentar mais do que uma alternativa, a resposta será classificada com zero pontos, o mesmo acontecendo se a letra transcrita for ilegível.
- **Não apresente cálculos nem justificações.**

1. Sejam $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ e $\beta \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$. Qual das expressões designa um número positivo?

(A) $\sin\left(\frac{5\pi}{2} - \alpha\right)\cos(\pi + \beta)$

(B) $\tan(\pi - \alpha)\cos\left(\frac{3\pi}{2} + \beta\right)$

(C) $\cos\left(\frac{7\pi}{2} + \alpha\right)\sin(\beta - \pi)$

(D) $\sin(2\pi - \alpha)\tan\left(\frac{6\pi}{2} - \beta\right)$

2. Considere, num referencial o.n. $Oxyz$, o plano γ de equação $x + 2y + 2z - 1 = 0$ e a reta r de equação:

$$(x, y, z) = (1, -1, -1) + k(-2, 1, 1), k \in \mathbb{R}$$

Qual das equações é uma equação cartesiana de um plano perpendicular a γ e que contém a reta r?

(A) $-2x + y + z = 0$

(B) $x - y - z = 0$

(C) $2x - z = 0$

(D) $-y + z = 0$

3. Num referencial ortonormado, considere os vetores $\vec{u}(-1, 3)$ e $\vec{v}(2, -1)$. Qual das afirmações é verdadeira?

(A) $(\vec{u} - \vec{v}) \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = 5$

(B) $(\vec{u} - \vec{v}) \cdot \vec{v} = 10$

(C) $\vec{u} \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = -5$

(D) $\vec{u} \cdot \vec{v} = 5$

4. Uma sucessão (u_n) é definida por $\begin{cases} u_1 = a \\ u_{n+1} = \frac{1-u_n}{2}, \forall n \geq 1 \end{cases}$, com $a \in \mathbb{R}$.

Qual das expressões representa u_{n+2} escrito em função de u_n, para todo $n \geq 1$?

(A) $\frac{1-u_n}{2}$

(B) $\frac{1+u_n}{2}$

(C) $\frac{1+u_n}{4}$

(D) $\frac{1-u_n}{4}$

5. Seja (a_n) uma progressão aritmética tal que $a_1 = -23$ e $r = 2$. Qual é o menor valor de n para o qual se tem $S_n > 0$, onde S_n representa a soma dos n primeiros termos de (a_n)?

(A) 22

(B) 23

(C) 24

(D) 25

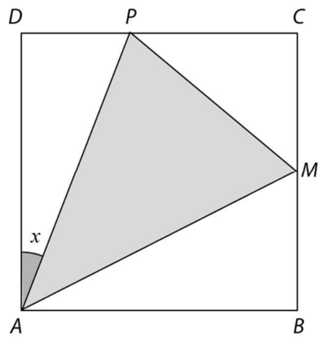
Grupo II

Nas respostas aos itens deste grupo apresente o seu raciocínio de forma clara, indicando **todos os cálculos** que tiver de efetuar e **todas as justificações** necessárias.

Atenção: Quando para um resultado não é pedida a aproximação, pretende-se sempre o **valor exato**.

1. Na figura está representado um quadrado $[ABCD]$, de lado 2.

O ponto P desloca-se sobre o lado $[CD]$. O ponto M é o ponto médio de $[BC]$. Para cada posição do ponto P, seja x a amplitude do ângulo PAD $\left(x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]\right)$.



1.1. Mostre que a área do triângulo $[AMP]$ é dada, em função de x, por $f(x) = 2 - \tan x$.

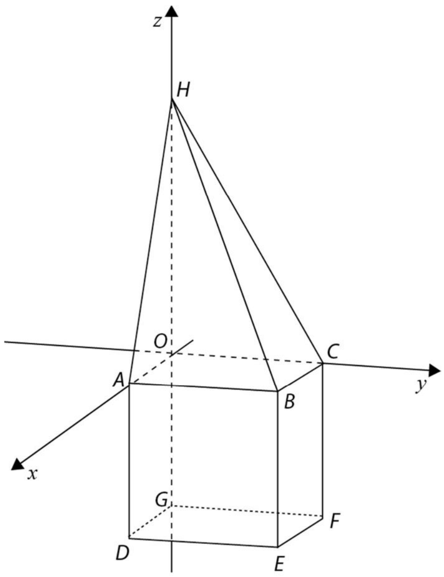
1.2. Seja $\alpha \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ tal que $\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\frac{1}{3}$. Determine o valor de $f(\alpha)$. Apresente o resultado com o denominador racionalizado.

1.3. Determine o valor de x para o qual a área do triângulo $[AMP]$ é igual à área do triângulo $[ABM]$.

2. Na figura está representado, em referencial o.n. $Oxyz$, o poliedro $[HABCODEFG]$, que se pode decompor num cubo e numa pirâmide quadrangular.

Sabe-se que:

- a base da pirâmide coincide com a face superior do cubo e está contida no plano xOy;
- o ponto H pertence ao eixo Oz;
- o ponto C pertence ao eixo Oy;
- o ponto E tem coordenadas $(3, 3, -3)$;
- o plano BCH é definido pela equação $5y + 3z - 15 = 0$.



2.1. Escreva uma equação vetorial que defina a reta que passa no ponto E e é perpendicular ao plano BCH.

2.2. Determine uma equação cartesiana do plano ABH.

2.3. Determine, em graus e com aproximação às décimas, a amplitude do ângulo formado pelas retas BH e BE.

2.4. Utilizando a definição de produto escalar, escreva uma condição que defina a superfície esférica de diâmetro $[CD]$.

3. Considere a sucessão (u_n) definida por:

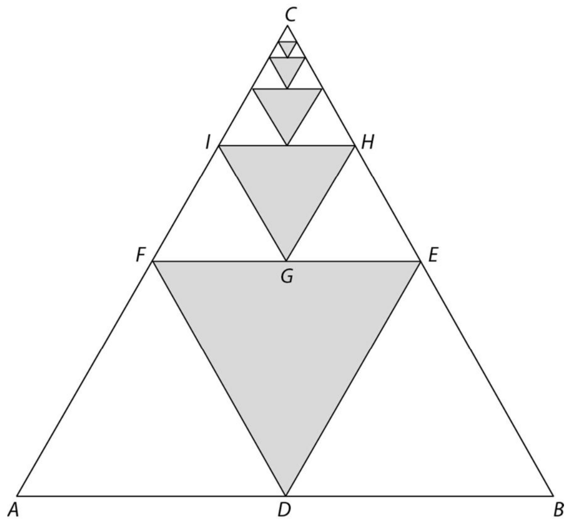
$$u_n = \frac{1-2n}{2n+3}$$

3.1. Averigúe se $-\frac{29}{33}$ é um termo da sucessão (u_n).

3.2. Estude a sucessão (u_n) quanto à monotonia.

3.3. Mostre que a sucessão (u_n) é uma sucessão limitada.

4. Na figura está representado um triângulo equilátero $[ABC]$ cuja área é $6\ \mathrm{m}^2$. Unindo os pontos médios dos seus lados, obtiveram-se os triângulos equiláteros $[DEF]$ e $[EFC]$, sombreando-se o triângulo $[DEF]$. Novamente, unindo os pontos médios dos lados do triângulo $[EFC]$, obtiveram-se os triângulos $[GHI]$ e $[HIC]$, sombreando-se o triângulo $[GHI]$ e assim sucessivamente.



Seja (a_n) a sucessão das áreas dos triângulos sucessivamente sombreados.

4.1. Defina (a_n) por recorrência.

4.2. Mostre que a sucessão (a_n) é uma progressão geométrica e escreva o seu termo geral.

4.3. Prove, pelo método de indução matemática, que a soma dos n primeiros termos desta progressão é dada por $S_n = 2(1 - 4^{-n}), \forall n \in \mathbb{N}$.

– FIM –

COTAÇÕES

Grupo I 50

Cada resposta certa 10
Cada resposta errada 0
Cada questão não respondida ou anulada 0

Grupo II 150

1. 35
   - 1.1. 10
   - 1.2. 15
   - 1.3. 10
2. 50
   - 2.1. 10
   - 2.2. 15
   - 2.3. 15
   - 2.4. 10
3. 30
   - 3.1. 10
   - 3.2. 10
   - 3.3. 10
4. 35
   - 4.1. 10
   - 4.2. 10
   - 4.3. 15

TOTAL 200

TESTE N.º 3 – Proposta de resolução

Grupo I

1. Opção (A)

Como $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, tem-se que $\sin\alpha > 0$, $\cos\alpha > 0$ e $\tan\alpha > 0$.

Como $\beta \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$, tem-se que $\sin\beta > 0$, $\cos\beta < 0$ e $\tan\beta < 0$.

Assim:

$$\sin\left(\frac{5\pi}{2} - \alpha\right)\cos(\pi + \beta) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)(-\cos(\beta)) = -\cos\alpha\cos\beta > 0$$

$$\tan(\pi - \alpha)\cos\left(\frac{3\pi}{2} + \beta\right) = -\tan\alpha\left(-\cos\left(\frac{\pi}{2} + \beta\right)\right) = -\tan\alpha\sin\beta < 0$$

$$\cos\left(\frac{7\pi}{2} + \alpha\right)\sin(\beta - \pi) = \cos\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right)(-\sin(\pi - \beta)) = \sin\alpha\,(-\sin\beta) = -\sin\alpha\sin\beta < 0$$

$$\sin(2\pi - \alpha)\tan\left(\frac{6\pi}{2} - \beta\right) = \sin(-\alpha)\tan(-\beta) = (-\sin\alpha)(-\tan\beta) = \sin\alpha\tan\beta < 0$$

2. Opção (D)

Seja $\vec{n}(a, b, c)$ um vetor não nulo normal ao plano cuja equação se pretende encontrar.

$\vec{n}_\gamma(1\,,2, 2)$ é um vetor normal ao plano γ e $\vec{r}(-2, 1, 1)$ é um vetor diretor da reta r.

$$\begin{cases} \vec{n}\cdot\vec{n}_\gamma = 0 \\ \vec{n}\cdot\vec{r} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + 2b + 2c = 0 \\ -2a + b + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2b - 2c \\ 4b + 4c + b + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = -c \end{cases}$$

Assim, $\vec{n}(0, -c, c), c \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$. Consideremos, por exemplo, $\vec{n}(0, -1, 1)$.

$(1, -1, -1)$ são as coordenadas de um ponto da reta r que está contida no plano:

$-1(y + 1) + (z + 1) = 0 \Leftrightarrow -y - 1 + z + 1 = 0 \Leftrightarrow -y + z = 0$

3. Opção (A)

$$(\vec{u} - \vec{v})\cdot(\vec{u} + \vec{v}) = \vec{u}\cdot\vec{u} - \vec{v}\cdot\vec{v} = (-1, 3)\cdot(-1, 3) - (2, -1)\cdot(2, -1) = 1 + 9 - 4 - 1 = 5$$

$$(\vec{u} - \vec{v})\cdot\vec{v} = \vec{u}\cdot\vec{v} - \vec{v}\cdot\vec{v} = (-1, 3)\cdot(2, -1) - (2, -1)\cdot(2, -1) = -2 - 3 - 4 - 1 = -10$$

$$\vec{u}\cdot(\vec{u} + \vec{v}) = \vec{u}\cdot\vec{u} + \vec{u}\cdot\vec{v} = (-1, 3)\cdot(-1, 3) + (-1, 3)\cdot(2, -1) = 1 + 9 - 2 - 3 = 5$$

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = (-1, 3)\cdot(2, -1) = -2 - 3 = -5$$

4. **Opção (C)**

$$u_{n+2}=\frac{1-u_{n+1}}{2}=\frac{1-\frac{1-u_n}{2}}{2}=\frac{2-1+u_n}{4}=\frac{1+u_n}{4}$$

5. **Opção (D)**

$$S_n>0 \Leftrightarrow \frac{a_1+a_n}{2}\times n>0$$
$$\Leftrightarrow \frac{-23+\left(-23+2(n-1)\right)}{2}\times n>0$$
$$\Leftrightarrow \frac{-23-23+2n-2}{2}\times n>0$$
$$\Leftrightarrow \frac{-48+2n}{2}\times n>0$$
$$\Leftrightarrow (-24+n)\times n>0$$
$$\Leftrightarrow -24+n>0 \quad \text{(pois } n\in\mathbb{N}\text{)}$$
$$\Leftrightarrow n>24$$

Grupo II

1.

1.1. $\tan x=\frac{\overline{DP}}{2}\Leftrightarrow \overline{DP}=2\tan x$

$\overline{PC}=2-2\tan x$

$A_{[APD]}=\frac{2\times 2\tan x}{2}=2\tan x$

$A_{[PMC]}=\frac{(2-2\tan x)\times 1}{2}=1-\tan x$

$A_{[ABM]}=\frac{2\times 1}{2}=1$

$A_{[ABCD]}=2\times 2=4$

Assim:

$A_{[AMP]}=4-2\tan x-(1-\tan x\,)-1=$

$=4-2\tan x-1+\tan x-1=$

$=2-\tan x$

1.2. $\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\frac{1}{3}\Leftrightarrow -\sin\alpha=-\frac{1}{3}\Leftrightarrow \sin\alpha=\frac{1}{3}$

Então:

$\cos^2\alpha=1-\frac{1}{9}\Leftrightarrow \cos^2\alpha=\frac{8}{9}$

Como $\alpha\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$, então $\cos\alpha=\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

Assim, $\tan x = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{2\sqrt{2}}{3}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$.

Logo, $f(\alpha) = 2 - \frac{\sqrt{2}}{4}$.

1.3. $A_{[ABM]} = \frac{2\times 1}{2} = 1$

$f(x) = 1 \Leftrightarrow 2 - \tan x = 1 \Leftrightarrow \tan x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Como $x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$, então $x = \frac{\pi}{4}$.

2.

2.1. $\vec{n}(0,5,3)$ é um vetor normal ao plano BCH e é um vetor diretor da reta pedida.

$E(3,3,-3)$

Assim, $(x,y,z) = (3,3,-3) + k(0,5,3), k \in \mathbb{R}$ é uma equação vetorial que define a reta que passa no ponto E e é perpendicular ao plano BCH.

2.2. $A(3,0,0)$ $\quad$ $B(3,3,0)$ $\quad$ $H(0,0,z), z > 0$

$H \in BCH$, logo $0 + 3z - 15 = 0 \Leftrightarrow z = 5$

Portanto, $H(0,0,5)$.

$\overrightarrow{AB}(0,3,0)$

$\overrightarrow{AH}(-3,0,5)$

Seja $\vec{n}(a,b,c)$ um vetor não nulo normal ao plano cuja equação se pretende encontrar.

$$\begin{cases} \vec{n}\cdot\overrightarrow{AB} = 0 \\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{AH} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3b = 0 \\ -3a + 5c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 0 \\ 3a = 5c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 0 \\ a = \frac{5}{3}c \end{cases}$$

Assim, $\vec{n}\left(\frac{5}{3}c, 0, c\right), c \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$. Consideremos, por exemplo, $\vec{n}(5,0,3)$.

A pertence ao plano ABH, logo uma equação do plano é:

$5(x-3) + 3z = 0 \Leftrightarrow 5x - 15 + 3z = 0 \Leftrightarrow 5x + 3z - 15 = 0$

2.3. $E(3,3,-3)$ $\quad$ $B(3,3,0)$ $\quad$ $H(0,0,5)$

$\overrightarrow{BH}(-3,-3,5)$

$\|\overrightarrow{BH}\| = \sqrt{(-3)^2 + (-3)^2 + 5^2} = \sqrt{9+9+25} = \sqrt{43}$

$\overrightarrow{BE}(0,0,-3)$

$\|\overrightarrow{BE}\| = 3$

$\overrightarrow{BH}\cdot\overrightarrow{BE} = 0 + 0 - 15 = -15$

$\cos\left(\widehat{BH, BE}\right) = \frac{|-15|}{\sqrt{43}\times 3} \Leftrightarrow \cos\left(\widehat{BH, BE}\right) = \frac{5}{\sqrt{43}}$

Logo, $\widehat{BH, BE} \approx 40{,}3°$.

2.4. $C(0,3,0)$ $\quad$ $D(3,0,-3)$

Seja $P(x,y,z)$ um ponto pertencente à superfície esférica de diâmetro $[CD]$.

Então:

$$\overrightarrow{CP} \cdot \overrightarrow{DP} = 0 \Leftrightarrow (x, y-3, z) \cdot (x-3, y, z+3) = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 3x + y^2 - 3y + z^2 + 3z = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 3x - 3y + 3z = 0$$

3.

3.1. $u_n = -\frac{29}{33} \Leftrightarrow \frac{1-2n}{2n+3} = -\frac{29}{33}$

$$\Leftrightarrow 33 - 66n = -58n - 87$$

$$\Leftrightarrow -8n = -120$$

$$\Leftrightarrow n = 15$$

$-\frac{29}{33}$ é o termo de ordem 15 da sucessão (u_n).

3.2. $u_{n+1} - u_n = \frac{1-2(n+1)}{2(n+1)+3} - \frac{1-2n}{2n+3} =$

$$= \frac{-2n-1}{2n+5} - \frac{1-2n}{2n+3} =$$

$$= \frac{(-2n-1)(2n+3)-(1-2n)(2n+5)}{(2n+5)(2n+3)} =$$

$$= \frac{-4n^2-6n-2n-3-2n-5+4n^2+10n}{(2n+5)(2n+3)} =$$

$$= \frac{-8}{(2n+5)(2n+3)} < 0, \forall n \in \mathbb{N}$$

Logo, (u_n) é uma sucessão monótona decrescente.

3.3. $\frac{1-2n}{2n+3} = -1 + \frac{4}{2n+3}$

Cálculo auxiliar

$$\begin{array}{r|l} -2n+1 & 2n+3 \\ \cline{2-2} +2n+3 & -1 \\ \hline 4 & \end{array}$$

Sabe-se que $0 < \frac{1}{n} \leq 1, \forall n \in \mathbb{N}$. Então:

$0 < \frac{1}{2n+3} \leq \frac{1}{5} \Leftrightarrow -1 < -1 + \frac{4}{2n+3} \leq -\frac{1}{5}, \forall n \in \mathbb{N}$.

Assim, a sucessão (u_n) é limitada.

O conjunto dos seus minorantes é $]-\infty, -1]$ e o conjunto dos seus majorantes é $\left[-\frac{1}{5}, +\infty\right[$.

4.

4.1. $\begin{cases} a_1 = \frac{3}{2} \\ a_{n+1} = \frac{1}{4} a_n, \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$

4.2. $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{1}{4} a_n}{a_n} = \frac{1}{4}$, que é uma constante. Logo, (a_n) é uma progressão geométrica.

$a_n = \frac{3}{2} \times \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$ é o termo geral de (a_n).

4.3. Seja $P(n)\colon S_n = 2(1 - 4^{-n})$.

$P(1)\colon S_1 = 2(1 - 4^{-1}) \Leftrightarrow \frac{3}{2} = 2\left(1 - \frac{1}{4}\right) \Leftrightarrow \frac{3}{2} = 2 \times \frac{3}{4} \Leftrightarrow \frac{3}{2} = \frac{3}{2}$

Logo, $P(1)$ é uma proposição verdadeira.

Seja $n \in \mathbb{N}$ tal que $S(n)$ é uma proposição verdadeira.

Hipótese: $S_n = 2(1 - 4^{-n})$

Tese: $S_{n+1} = 2\left(1 - 4^{-(n+1)}\right)$

Demonstração:

$$\begin{aligned} S_{n+1} = S_n + a_{n+1} &= 2(1 - 4^{-n}) + \frac{3}{2} \times \left(\frac{1}{4}\right)^n = \\ &= 2 - 2 \times 4^{-n} + \frac{3}{2} \times 4^{-n} = \\ &= 2 - \frac{1}{2} \times 4^{-n} = \\ &= 2\left(1 - \frac{1}{4} \times 4^{-n}\right) = \\ &= 2(1 - 4^{-1} \times 4^{-n}) = \\ &= 2(1 - 4^{-n-1}) = \\ &= 2\left(1 - 4^{-(n+1)}\right) \end{aligned}$$

Vimos que se $S(n)$ é uma proposição verdadeira, então $S(n+1)$ também é uma proposição verdadeira, para qualquer $n \in \mathbb{N}$.

Fica assim provado, usando o método de indução matemática, que $S_n = 2(1 - 4^{-n}), \forall n \in \mathbb{N}$.