# Prova-modelo de Exame

**Nome** ____________________________________________ **N.º** ____ **Turma** _____ **Data** ____ /maio/2019

**Avaliação**____________________________________________ **Professor** ___________________________

**Duração da Prova (Caderno 1 + Caderno 2):** 150 minutos | **Tolerância:** 30 minutos

A prova é constituída por dois cadernos (Caderno 1 e Caderno 2).

Para a resolução do Caderno 1, é necessário o uso de calculadora gráfica. Para a resolução do Caderno 2, não é permitido o uso de calculadora.

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta.

É permitido o uso de régua, compasso, esquadro e transferidor.

Não é permitido o uso de corretor. Risque aquilo que pretende que não seja classificado.

Para cada resposta, identifique o item.

Apresente as suas respostas de forma legível.

Apresente apenas uma resposta para cada item.

A prova inclui um formulário.

Na resposta aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Na resposta aos restantes itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias. Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

# Formulário

## Geometria

**Comprimento de um arco de circunferência**

$\alpha r$ ($\alpha$ – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; $r$ – raio)

**Área de um polígono regular:** Semiperímetro $\times$ Apótema

**Área de um setor circular:**

$\frac{\alpha r^2}{2}$ ($\alpha$ – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; $r$ – raio)

**Área lateral de um cone:** $\pi\, r g$ ($r$ – raio da base; $g$ – geratriz)

**Área de uma superfície esférica:** $4\,\pi\, r^2$ ($r$ – raio)

**Volume de uma pirâmide:** $\frac{1}{3}\times$ Área da base $\times$ Altura

**Volume de um cone:** $\frac{1}{3}\times$ Área da base $\times$ Altura

**Volume de uma esfera:** $\frac{4}{3}\,\pi\, r^3$ ($r$ – raio)

## Progressões

Soma dos $n$ primeiros termos de uma progressão $(u_n)$ :

**Progressão aritmética:** $\frac{u_1+u_n}{2}\times n$

**Progressão geométrica:** $u_1\times\frac{1-r^n}{1-r}$

## Trigonometria

$\operatorname{sen}\,(a+b)=\operatorname{sen} a\,\cos b+\operatorname{sen} b\,\cos a$

$\cos\,(a+b)=\cos a\,\cos b-\operatorname{sen} a\,\operatorname{sen} b$

$\frac{\operatorname{sen} A}{a}=\frac{\operatorname{sen} B}{b}=\frac{\operatorname{sen} C}{c}$

$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$

## Complexos

$(\rho\,\operatorname{cis}\,\theta)^n=\rho^n\operatorname{cis}\,(n\theta)$ ou $\left(\rho e^{i\theta}\right)^n=\rho^n\,e^{in\theta}$

$\sqrt[n]{\rho\,\operatorname{cis}\,\theta}=\sqrt[n]{\rho}\,\operatorname{cis}\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)$ ou $\sqrt[n]{\rho e^{i\theta}}=\sqrt[n]{\rho}\,e^{i\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)}$

($k\in\{0,\ldots,n-1\}$ e $n\in\mathbb{N}$)

## Probabilidades

$\mu=p_1x_1+\ldots+p_nx_n$

$\sigma=\sqrt{p_1(x_1-\mu)^2+\ldots+p_n(x_n-\mu)^2}$

Se $X$ é $N(\mu,\sigma)$ , então:

$P(\mu-\sigma<X<\mu+\sigma)\approx 0{,}6827$

$P(\mu-2\sigma<X<\mu+2\sigma)\approx 0{,}9545$

$P(\mu-3\sigma<X<\mu+3\sigma)\approx 0{,}9973$

## Regras de derivação

$(u+v)'=u'+v'$

$(u\,v)'=u'\,v+u\,v'$

$\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-u\,v'}{v^2}$

$(u^n)'=n\,u^{n-1}\,u'\quad(n\in\mathbb{R})$

$(\operatorname{sen} u)'=u'\cos u$

$(\cos u)'=-u'\operatorname{sen} u$

$(\operatorname{tg} u)'=\frac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)'=u'\,e^u$

$(a^u)'=u'\,a^u\ln a\quad(a\in\mathbb{R}^+\setminus\{1\})$

$(\ln u)'=\frac{u'}{u}$

$(\log_a u)'=\frac{u'}{u\ln a}\quad(a\in\mathbb{R}^+\setminus\{1\})$

## Limites notáveis

$\lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e\quad(n\in\mathbb{N})$

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{x}=1$

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^p}=+\infty\quad(p\in\mathbb{R})$

**Caderno 1:** 75 minutos. Tolerância: 15 minutos.

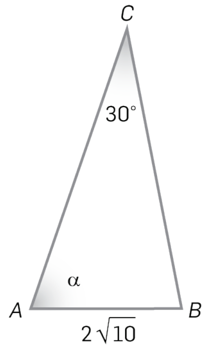
É permitido o uso de calculadora.

1. Na figura ao lado está representado o triângulo $[ABC]$ .

Designou-se por $\alpha$ a amplitude do ângulo $BAC$.

Sabe-se que:

- $\overline{AB} = 2\sqrt{10}$
- $A\hat{C}B = 30°$
- $\text{tg}\,\alpha = 3$



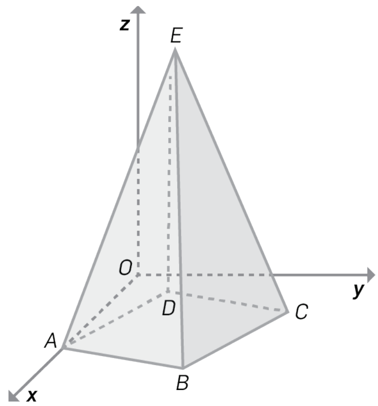

Qual é o comprimento do segmento de reta $[BC]$ ?

**(A)** $10$ **(B)** $11$ **(C)** $12$ **(D)** $13$

2. Na figura ao lado está representada, em referencial o.n. $Oxyz$ , a pirâmide quadrangular regular $[ABCDE]$ , cuja base está contida no plano $xOy$ .

Sabe-se que:

- o vértice $A$ pertence ao eixo $Ox$ ;
- uma equação do plano $ADE$ é $6x + 18y - 5z = 24$ ;
- o ponto $E$ pertence à reta $r$ , de equação vetorial $(x, y, z) = (5, -4, 2) + k(-1, 3, 2), k \in \mathbb{R}$ .




**2.1** Sejam $F$ e $G$ os pontos da reta $r$ cujas cotas são, respetivamente, $-2$ e $4$. Determina a amplitude, em graus, do ângulo $FOG$ . Apresenta o resultado arredondado às unidades.

**2.2** Determina o volume da pirâmide.

**2.3** Considera o prisma quadrangular regular em que uma das bases coincide com a base da pirâmide e a outra base tem por centro o ponto $E$. Seja $\alpha$ o plano que passa no ponto $E$ e é paralelo à face lateral do prisma que contém o segmento de reta $[AB]$ .

Ao acaso, escolhe-se um vértice em cada base do prisma. Qual é a probabilidade de a reta definida pelos dois pontos escolhidos ser paralela ao plano $\alpha$ ? Apresenta o resultado na forma de fração irredutível.

3. Uma turma de uma escola secundária tem 30 alunos. A Rita é a delegada e o Pedro é o subdelegado dessa turma.

O professor de Matemática vai escolher um grupo de seis alunos para realizar um trabalho, mas pretende que a Rita e o Pedro não façam simultaneamente parte do grupo escolhido.

Nestas condições, quantas comissões diferentes podem ser formadas?

**(A)** $526\,600$ **(B)** $534\,400$ **(C)** $547\,700$ **(D)** $573\,300$

**4.** No baile de finalistas de uma escola estão presentes várias pessoas do sexo masculino (alunos e professores).

Sabe-se que:

- $\frac{4}{5}$ dessas pessoas são alunos (os restantes são professores);
- $\frac{2}{3}$ dessas pessoas vão de gravata (os restantes vão de laço).

Sabe-se também que $\frac{3}{4}$ dos alunos vão de gravata.

Entre todos os participantes do sexo masculino, escolhe-se um, ao acaso, para receber uma caneta oferecida pela organização.

Qual é a probabilidade de ser escolhido um professor que vai de laço?

Na tua resposta:

- designa por $A$ o acontecimento «ser aluno» e por $G$ o acontecimento «ir de gravata»;
- apresenta o resultado na forma de fração irredutível.

**5.** Um paraquedista salta de um avião. Ao fim de algum tempo, o paraquedas abre. Admite que a distância, em metros, a que o paraquedista se encontra do solo, $t$ segundos após a abertura do paraquedas, é dada por:

$$d(t) = 930 - 6t + 24e^{-1{,}7t}$$

No instante da abertura do paraquedas, o paraquedista está a uma certa distância do solo. Determina, recorrendo à calculadora gráfica, quanto tempo demora o paraquedista a percorrer um terço dessa distância (desde o instante em que se dá a abertura do paraquedas).

Na tua resposta:

- equaciona o problema;
- reproduz, num referencial, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora que te permite(m) resolver a equação;
- apresenta o valor pedido arredondado às unidades.

**6.** Seja $z$ um número complexo cujo afixo pertence à circunferência de centro na origem do referencial e raio $\sqrt{3}$ . Seja $w = |z|^2 + z - \overline{z}$ .

Sabe-se que $\mathrm{Re}(w) \times \mathrm{Im}(w) = 9$ .

Qual é a parte imaginária do número complexo $z$ ?

**(A)** $\frac{2}{3}$ **(B)** $\frac{3}{2}$ **(C)** $\frac{3}{4}$ **(D)** $\frac{4}{3}$

**7.** De uma progressão aritmética $(u_n)$ sabe-se que a razão é $-\frac{2}{3}$ e que, para um certo número natural $m$, maior do que 1, se tem $u_1 + u_m = 20$ e $\sum_{k=1}^{m} u_k = 220$.

Verifica que $-203$ é termo da sucessão $(u_n)$ e indica a sua ordem.

**8.** Considera, em referencial o.n. $xOy$, o paralelogramo $[ABCD]$ em que o segmento de reta $[AC]$ é uma das diagonais. Seja $E$ o ponto de interseção das diagonais do paralelogramo.

Sabe-se que:

- o vetor $\overrightarrow{AE}$ tem coordenadas $(4, 3)$ ;
- o vetor $\overrightarrow{CB}$ tem coordenadas $(-5, 2)$ ;
- o ponto $C$ tem coordenadas $(7, 10)$ .

Quais são as coordenadas do ponto $D$ ?

**(A)** $(4, 1)$ **(B)** $(4, 2)$ **(C)** $(6, 1)$ **(D)** $(6, 2)$

**FIM DO CADERNO 1**

**Caderno 2:** 75 minutos. Tolerância: 15 minutos.

Não é permitido o uso de calculadora.

**9.** Considera, em referencial o.n. $xOy$ , uma elipse centrada no ponto $O$ e cujos focos pertencem ao eixo $Ox$ .

Seja $F$ o foco de abcissa positiva.

A elipse interseta o eixo $Ox$ em dois pontos. Seja $A$ o que tem abcissa positiva.

Sabe-se que:

- $F$ é o ponto médio do segmento de reta $[OA]$ ;
- o ponto de coordenadas $(-2, 3)$ pertence à elipse.

Qual é a abcissa do ponto $A$ ?

**(A)** $2$ **(B)** $3$ **(C)** $4$ **(D)** $5$

**10.** Em $\mathbb{C}$ , conjunto dos números complexos, considera:

$z_1 = 4\left(\cos\frac{2\pi}{9} + i\,\text{sen}\,\frac{2\pi}{9}\right)$ $z_2 = \cos\frac{\pi}{18} + i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{18}$ $z_3 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{12} + i\,\text{sen}\,\frac{5\pi}{12}\right)$

Seja $w = -2 + \frac{z_1 \times \overline{z_2}}{2+(z_3)^3}$ . Escreve, na forma trigonométrica, o número complexo $w$ .

**11.** Seja $a = \lim\left(\frac{n^2-n}{n^2+n}\right)^{2n}$ . Qual é o valor de $\ln(a)$ ?

**(A)** $-2$ **(B)** $-3$ **(C)** $-4$ **(D)** $-5$

**12.** Determina o conjunto dos números reais tais que: $2\log_3\left(\sqrt{3}x\right) \geq 3 + \log_3(x-2)$

Apresenta a tua resposta na forma de união de intervalos de números reais.

**13.** Seja $f$ a função contínua, de domínio $\left]-\infty, \frac{3\pi}{2}\right]$ , definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{kx} - (1+x)^2}{x} & \text{se } x < 0 \\ \text{sen}\,x\,(1+\cos x) & \text{se } 0 \leq x \leq \dfrac{3\pi}{2} \end{cases}$$

( $k$ designa um número real positivo)

**13.1** Qual é o valor de $k$ ?

**(A)** $2$ **(B)** $3$ **(C)** $4$ **(D)** $5$

**13.2** O gráfico da função $f$ tem uma assíntota oblíqua. Determina a equação reduzida dessa assíntota.

**13.3** Estuda a função $f$ quanto à monotonia no intervalo $\left]0, \frac{3\pi}{2}\right[$ e determina, caso existam, os extremos relativos.

**14.** Considera, em referencial o.n. $xOy$ , o gráfico da função $g$ , de domínio $\mathbb{R}^+$ , definida por:

$g(x) = x\,(\ln x)^2$

Seja $r$ a reta tangente ao gráfico da função $g$ no ponto de abcissa $\frac{1}{e}$ .

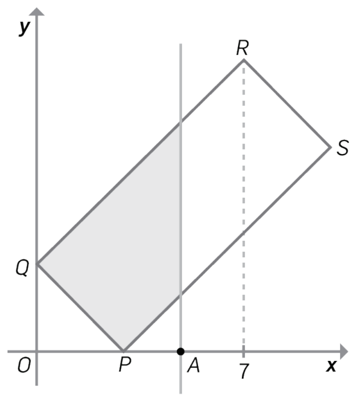
Seja $B$ o ponto interseção da reta $r$ com o eixo $Oy$ .

Qual é a ordenada do ponto $B$ ?

**(A)** $-\frac{2}{e}$ **(B)** $-\frac{1}{e}$ **(C)** $\frac{1}{e}$ **(D)** $\frac{2}{e}$

**15.** Na figura ao lado está representado, em referencial o.n. $xOy$ , o retângulo $[PQRS]$ , em que:

- o ponto $P$ tem coordenadas $(3, 0)$ ;
- o ponto $Q$ tem coordenadas $(0, 3)$ ;
- o ponto $R$ tem abcissa 7.




Considera que um ponto $A$ se desloca ao longo do eixo $Ox$ , entre a origem $O$ do referencial e o ponto de abcissa 7, sem coincidir com o ponto $O$ . Para cada posição do ponto $A$ , seja $a$ a sua abcissa e seja $f(a)$ a área da região sombreada (interseção do retângulo com o semiplano definido pela condição $x \leq a$ ).

Define, por ramos, a função $f$ .

**FIM**

# Prova-modelo de Exame • maio/2019

## Proposta de resolução

**Caderno 1**

**1.** **(C)**

De acordo com a lei dos senos, tem-se: $\frac{\text{sen}\,\alpha}{\overline{BC}} = \frac{\text{sen}\,30°}{2\sqrt{10}}$

Por outro lado, tem-se: $1+\text{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha} \Leftrightarrow 1+3^2 = \frac{1}{\cos^2\alpha} \Leftrightarrow \cos^2\alpha = \frac{1}{10} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \text{sen}^2\,\alpha = 1 - \frac{1}{10} \Leftrightarrow \text{sen}^2\,\alpha = \frac{9}{10}$ Como $\text{sen}\,\alpha > 0$, vem $\text{sen}\,\alpha = \frac{3}{\sqrt{10}}$.

Portanto, $\frac{\frac{3}{\sqrt{10}}}{\overline{BC}} = \frac{\frac{1}{2}}{2\sqrt{10}}$ donde vem: $\overline{BC} = \frac{2\sqrt{10}\times\frac{3}{\sqrt{10}}}{\frac{1}{2}} = \frac{6}{\frac{1}{2}} = 12$

**2.1** De acordo com o enunciado, uma equação vetorial da reta $r$ é:
$(x,y,z) = (5,-4,2) + k(-1,3,2),\ k\in\mathbb{R}$

$F$ é o ponto da reta $r$ cuja cota é $-2$. Tem-se: $-2 = 2+2k \Leftrightarrow k = -2$

Assim, as coordenadas do ponto $F$ são $(5,-4,2) - 2(-1,3,2) = (7,-10,-2)$

$G$ é o ponto da reta $r$ cuja cota é $4$. Tem-se: $4 = 2+2k \Leftrightarrow k = 1$

Assim, as coordenadas do ponto $G$ são: $(5,-4,2) + (-1,3,2) = (4,-1,4)$

Seja $\alpha$ a amplitude do ângulo $FOG$.

Tem-se: $\overrightarrow{OF}\,.\,\overrightarrow{OG} = \left\|\overrightarrow{OF}\right\| \times \left\|\overrightarrow{OG}\right\| \times \cos\alpha \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (7,-10,-2)\,.\,(4,-1,4) = \|(7,-10,-2)\| \times \|(4,-1,4)\| \times \cos\alpha \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 28+10-8 = \sqrt{153}\times\sqrt{33}\times\cos\alpha \Leftrightarrow \cos\alpha = \frac{30}{\sqrt{5049}}$

Portanto, $\alpha \approx 65°$.

**2.2** A altura da pirâmide é a cota do ponto $E$, ponto de interseção do plano $ADE$ com a reta $r$.

Comecemos então por determinar as coordenadas do ponto $E$.

Tem-se: $(x,y,z) = (5,-4,2) + k(-1,3,2) \Leftrightarrow (x,y,z) = (5-k,-4+3k,2+2k)$

Como uma equação do plano $ADE$ é $6x+18y-5z = 24$, vem:

$6(5-k) + 18(-4+3k) - 5(2+2k) = 24 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 30-6k-72+54k-10-10k = 24 \Leftrightarrow 38k = 76 \Leftrightarrow k = 2$

Portanto, o ponto $E$ tem coordenadas $(5-2,\ -4+3\times 2, 2+2\times 2)$, ou seja, $(3,2,6)$.

A altura da pirâmide é, assim, igual a $6$.

Por outro lado, o centro da base da pirâmide tem abcissa e ordenada iguais às do ponto $E$.

Assim, o centro da base da pirâmide tem coordenadas $(3,2,0)$.

A distância deste ponto ao ponto $A$ é metade da diagonal da base.

Como o ponto $A$ pertence ao eixo $Ox$, tem ordenada e cota iguais a zero.

Por outro lado, o ponto $A$ pertence ao plano $ADE$, pelo que as suas coordenadas verificam a equação deste plano.

Tem-se, assim: $6x+18\times 0-5\times 0=24 \Leftrightarrow x=4$

Portanto, as coordenadas do ponto $A$ são $(4,0,0)$.

Logo, a distância do centro da base ao ponto $A$ é $\sqrt{(4-3)^2+(0-2)^2+(0-0)^2}=\sqrt{5}$.

Assim, a diagonal da base é $2\sqrt{5}$.

Como um quadrado é um losango, a área da base pode ser obtida aplicando a fórmula que dá a área de um losango (metade do produto das diagonais).

Portanto, a área da base da pirâmide é igual a $\frac{2\sqrt{5}\times 2\sqrt{5}}{2}$, ou seja, é igual a $10$.

O volume da pirâmide é, assim, igual a $\frac{10\times 6}{3}=20$.

**2.3** Designemos por $A'$, $B'$, $C'$ e $D'$ os vértices da base superior do prisma, de tal modo que $[AA']$, $[BB']$, $[CC']$ e $[DD']$ sejam as arestas laterais do prisma.

A experiência aleatória consiste na escolha, ao acaso, de um vértice em cada base do prisma.

Assim, o número de casos possíveis desta experiência é $4\times 4=16$.

Destes dezasseis casos possíveis, são favoráveis ao acontecimento «a reta definida pelos dois pontos escolhidos é paralela ao plano $\alpha$» as seguintes escolhas: $A$ e $A'$, $B$ e $B'$, $C$ e $C'$, $D$ e $D'$, $A$ e $B'$, $B$ e $A'$, $C$ e $D'$, $D$ e $C'$.

Há, portanto, $8$ casos favoráveis.

Assim, a probabilidade pedida é $\frac{8}{16}=\frac{1}{2}$.

**3.** **(D)**

Comecemos por observar que «a Rita e o Pedro não fazerem simultaneamente parte do grupo escolhido» é o contrário de «a Rita e o Pedro fazerem simultaneamente parte do grupo escolhido».

Assim, o número pedido é a diferença entre o número total de comissões e o número de comissões às quais pertencem a Rita e o Pedro.

O número total de comissões é o número de maneiras de escolher seis dos trinta alunos da turma, ou seja, é ${}^{30}C_6$ .

O número de comissões às quais pertencem a Rita e o Pedro é o número de maneiras de escolher quatro dos restantes 28 alunos da turma, ou seja, é ${}^{28}C_4$ .

Assim, o número pedido é ${}^{30}C_6 - {}^{28}C_4 = 573\,300$ .

**4.** No universo das pessoas do sexo masculino presentes no baile, tem-se, de acordo com o enunciado:

- $\frac{4}{5}$ dessas pessoas são alunos, ou seja, $P(A) = \frac{4}{5}$ ;
- $\frac{2}{3}$ dessas pessoas vão de gravata, ou seja, $P(G) = \frac{2}{3}$ .

É também referido que $\frac{3}{4}$ dos alunos vão de gravata, ou seja, $P(G|A) = \frac{3}{4}$ .

É pedida a probabilidade de ser escolhido um professor que vai de laço, ou seja, é pedida a seguinte probabilidade: $P(\overline{A} \cap \overline{G})$

Tem-se: $P(\overline{A} \cap \overline{G}) = P(\overline{A \cup G}) = 1 - P(A \cup G) = 1 - [P(A) + P(G) - P(A \cap G)] =$

$= 1 - P(A) - P(G) + P(A \cap G) = 1 - P(A) - P(G) + P(A) \times P(G|A) =$

$= 1 - \frac{4}{5} - \frac{2}{3} + \frac{4}{5} \times \frac{3}{4} = \frac{2}{15}$

**5.** No instante da abertura do paraquedas, a distância, em metros, do paraquedista ao solo é igual a $d(0)$ .

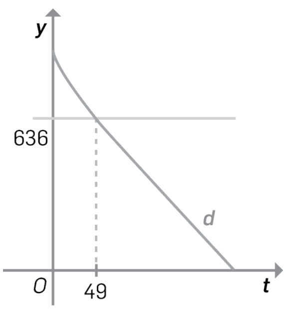
Tem-se $d(0) = 930 - 0 + 24\,e^0 = 954$ .

Ora, um terço desta distância é $\frac{954}{3}$ metros, ou seja, é $318$ metros.

Após ter percorrido $318$ metros, o paraquedista está a $954 - 318$ metros do solo, ou seja, está a $636$ metros do solo.

Uma equação que traduz o problema é, portanto, $d(t) = 636$ .

Na figura ao lado está representado o gráfico da função $d$ , bem como a reta de equação $y = 636$ .




A abcissa, arredondada às unidades, do ponto de interseção destas duas linhas é $49$.

Assim, a resposta ao problema é: $49$ segundos.

**6.** **(B)**
Seja $z = x + yi$ .
Como o afixo de $z$ pertence à circunferência de centro na origem do referencial e raio $\sqrt{3}$, tem-se $|z| = \sqrt{3}$ .
Portanto, tem-se: $w = 3 + x + yi - (x - yi) = 3 + 2yi$
Assim: $\operatorname{Re}(w) \times \operatorname{Im}(w) = 9 \Leftrightarrow 3 \times 2y = 9 \Leftrightarrow y = \frac{3}{2}$

**7.** Tem-se: $\sum_{k=1}^{m} u_k = 220 \Leftrightarrow \frac{u_1+u_m}{2} \times m = 220 \Leftrightarrow \frac{20}{2} \times m = 220 \Leftrightarrow m = 22$

$u_1 + u_m = 20 \Leftrightarrow u_1 + u_{22} = 20 \Leftrightarrow u_1 + u_1 + 21r = 20 \Leftrightarrow 2u_1 + 21 \times \left(-\frac{2}{3}\right) = 20 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 2u_1 - 14 = 20 \Leftrightarrow u_1 = 17$

$17 + (n-1) \times \left(-\frac{2}{3}\right) = -203 \Leftrightarrow (n-1) \times \left(-\frac{2}{3}\right) = -220 \Leftrightarrow n - 1 = 330 \Leftrightarrow n = 331$

$-203$ é o termo de ordem $331$.

**8.** **(B)**
Tem-se: $D = A + \overrightarrow{AD} = A + \overrightarrow{BC} = A + (-\overrightarrow{CB})$
Notemos agora que o ponto $E$ é o ponto médio do segmento de reta $[AC]$.
Portanto, tem-se: $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AE} = 2(4,3) = (8,6)$
Vem, então: $A = C + \overrightarrow{CA} = C + \left(-\overrightarrow{AC}\right) = (7,10) + (-8,-6) = (-1,4)$
Logo: $D = A + (-\overrightarrow{CB}) = (-1,4) + (5,-2) = (4,2)$

Outro processo:
Tem-se: $D = C + \overrightarrow{CD}$
Notemos agora que o ponto $E$ é o ponto médio do segmento de reta $[AC]$.
Portanto, tem-se: $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AE} = 2(4,3) = (8,6)$
Vem, então: $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AD} = -\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{AC} + (-\overrightarrow{CB}) =$
$= (-8,-6) + (5,-2) = (-3,-8)$
Logo: $D = C + \overrightarrow{CD} = (7,10) + (-3,-8) = (4,2)$

## Caderno 2

**9.** **(C)**

Seja $a$ a abcissa do ponto $A$; $a$ é, portanto, o semieixo maior da elipse.
Designemos o semieixo menor por $b$ e a semidistância focal por $c$.
Como $F$ é o ponto médio do segmento de reta $[OA]$, tem-se $c = \frac{a}{2}$.
Vem, então:

$$a^2 = b^2 + c^2 \Leftrightarrow a^2 = b^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 \Leftrightarrow b^2 = a^2 - \frac{a^2}{4} \Leftrightarrow b^2 = \frac{3\,a^2}{4}$$

A equação reduzida da elipse é $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, ou seja, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{\frac{3\,a^2}{4}} = 1$.

Como o ponto de coordenadas $(-2, 3)$ pertence à elipse, tem-se:

$\frac{(-2)^2}{a^2} + \frac{3^2}{\frac{3\,a^2}{4}} = 1 \Leftrightarrow \frac{4}{a^2} + \frac{12}{a^2} = 1 \Leftrightarrow \frac{16}{a^2} = 1 \Leftrightarrow a^2 = 16$. Como $a > 0$, vem $a = 4$.

**10.** $$w = -2 + \frac{4\,e^{i\,\frac{2\pi}{9}} \times \left(\overline{e^{i\,\frac{\pi}{18}}}\right)}{2 + \left(\sqrt{2}\,e^{i\,\frac{5\pi}{12}}\right)^3} = -2 + \frac{4\,e^{i\,\frac{2\pi}{9}} \times e^{-i\,\frac{\pi}{18}}}{2 + 2\sqrt{2}\,e^{i\,\frac{5\pi}{4}}} =$$

$$= -2 + \frac{4\,e^{i\,\frac{\pi}{6}}}{2 + 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\,\text{sen}\frac{5\pi}{4}\right)} = -2 + \frac{4\,e^{i\,\frac{\pi}{6}}}{2 + 2\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\,i\right)} = -2 + \frac{4\,e^{i\,\frac{\pi}{6}}}{2 - 2 - 2i} =$$

$$= -2 + \frac{4\,e^{i\,\frac{\pi}{6}}}{-2i} = -2 - \frac{2\,e^{i\,\frac{\pi}{6}}}{i} = -2 - \frac{2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\,\text{sen}\frac{\pi}{6}\right)}{i} =$$

$$= -2 - \frac{2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\,i\right)}{i} = -2 - \frac{\sqrt{3} + i}{i} = -2 - (\sqrt{3} + i) \times (-i) =$$

$$= -2 + \sqrt{3}\,i - 1 = -3 + \sqrt{3}\,i = 2\sqrt{3}\,e^{i\,\frac{5\pi}{6}}$$

**11.** **(C)**

$$a = \lim\left(\frac{n^2 - n}{n^2 + n}\right)^{2n} = \lim\left[\frac{n^2\left(1 - \frac{1}{n}\right)}{n^2\left(1 + \frac{1}{n}\right)}\right]^{2n} = \lim\left[\left(\frac{1 - \frac{1}{n}}{1 + \frac{1}{n}}\right)^n\right]^2 =$$

$$= \left[\lim\frac{\left(1 + \frac{-1}{n}\right)^n}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}\right]^2 = \left(\frac{e^{-1}}{e}\right)^2 = \left(e^{-2}\right)^2 = e^{-4}$$

$$\ln(a) = \ln(e^{-4}) = -4$$

**12.** Uma vez que apenas os números positivos têm logaritmo, é necessário que $\sqrt{3}\,x > 0$ e que $x - 2 > 0$ .

Ora: $\sqrt{3}\,x > 0 \ \wedge \ x - 2 > 0 \Leftrightarrow x > 0 \wedge x > 2 \Leftrightarrow x > 2$

Para $x > 2$ , tem-se:

$$2\log_3\left(\sqrt{3}\,x\right) \geq 3 + \log_3(x-2) \Leftrightarrow \log_3\left[\left(\sqrt{3}\,x\right)^2\right] \geq \log_3(3^3) + \log_3(x-2) \Leftrightarrow$$

$$\log_3(3x^2) \geq \log_3[27(x-2)] \Leftrightarrow 3x^2 \geq 27(x-2) \Leftrightarrow x^2 \geq 9(x-2) \Leftrightarrow \ x^2 - 9x + 18 \geq 0$$

Cálculo auxiliar: $x^2 - 9x + 18 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{9 \pm \sqrt{81 - 4\times 1\times 18}}{2} \Leftrightarrow x = 3 \vee x = 6$

Portanto: $x^2 - 9x + 18 \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 3 \vee x \geq 6$

Tem-se: $x > 2 \wedge (x \leq 3 \vee x \geq 6) \Leftrightarrow x \in \,]2, 3] \cup [6, +\infty[$

Assim, o conjunto dos números reais tais que $2\log_3\left(\sqrt{3}\,x\right) \geq 3 + \log_3(x-2)$ é:
$]2, 3] \cup [6, +\infty[$

**13.1** **(A)**

De acordo com o enunciado, a função $f$ é contínua.
Portanto, a função $f$ é contínua, em particular, no ponto 0.
Logo, tem-se que: $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$

Ora:

- $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \operatorname{sen} 0 \ \times \ (1 + \cos 0) = 0 \times 2 = 0$

- $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} \frac{e^{kx} - (1+x)^2}{x} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim\limits_{x\to 0^-} \frac{e^{kx} - (1+2x+x^2)}{x} = \lim\limits_{x\to 0^-} \frac{e^{kx} - 1 - 2x - x^2}{x} =$

$$= \lim_{x\to 0^-}\left(\frac{e^{kx}-1}{x} - 2 - x\right) = -2 + \lim_{x\to 0^-}\frac{e^{kx}-1}{x} = -2 + \lim_{x\to 0^-}\frac{k\left(e^{kx}-1\right)}{kx} =$$

$$= -2 + k\lim_{x\to 0^-}\frac{e^{kx}-1}{kx} \overset{y = kx}{=} -2 + k\lim_{y\to 0^-}\frac{e^{y}-1}{y} = -2 + k \times 1 = k - 2$$

Tem-se, assim: $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) \Leftrightarrow k - 2 = 0 \Leftrightarrow k = 2$

**13.2** Uma vez que o domínio da função é majorado, só existirá assíntota oblíqua ao gráfico da função $f$ quando $x \to -\infty$.

Note-se também que, como $k > 0$, tem-se que $kx$ tende para $-\infty$ quando $x$ tende para $-\infty$.

Vem, então:

$$m = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{e^{kx}-1-2x-x^2}{x^2} = \lim_{x\to-\infty} \left( \frac{e^{kx}}{x^2} - \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} - 1 \right) =$$

$$= \frac{e^{-\infty}}{+\infty} - \frac{1}{+\infty} - \frac{2}{-\infty} - 1 = \frac{0}{+\infty} - 0 - 0 - 1 = 0 - 0 - 0 - 1 = -1$$

$$b = \lim_{x\to-\infty} [f(x) - mx] = \lim_{x\to-\infty} [f(x) + x] = \lim_{x\to-\infty} \left( \frac{e^{kx}-1-2x-x^2}{x} + x \right) =$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \left( \frac{e^{kx}-1-2x-x^2+x^2}{x} \right) = \lim_{x\to-\infty} \left( \frac{e^{kx}-1-2x}{x} \right) = \lim_{x\to-\infty} \left( \frac{e^{kx}}{x} - \frac{1}{x} - 2 \right) =$$

$$= \frac{0}{-\infty} - 0 - 2 = -2$$

Assim, a equação reduzida da assíntota oblíqua é: $y = -x - 2$

**13.3** No intervalo $\left]0, \frac{3\pi}{2}\right]$, tem-se: $f'(x) = [\operatorname{sen} x\,(1+\cos x)]' =$

$$= \cos x(1+\cos x) + \operatorname{sen} x\,(-\operatorname{sen} x) = \cos x + \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x = \cos x + \cos(2x)$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \cos x + \cos(2x) = 0$$

Em $\mathbb{R}$, tem-se: $\cos x + \cos(2x) = 0 \Leftrightarrow \cos(2x) = -\cos x \Leftrightarrow \cos(2x) = \cos(\pi - x) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 2x = \pi - x + 2k\pi \ \vee\ 2x = -\pi + x + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3x = \pi + 2k\pi \ \vee\ x = -\pi + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3} \ \vee\ x = -\pi + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

Em $\left]0, \frac{3\pi}{2}\right]$, as soluções da equação $f'(x) = 0$ são $\frac{\pi}{3}$ e $\pi$.

Tem-se o seguinte quadro:

| $x$ | $0$ | $\frac{\pi}{3}$ | | $\pi$ | | $\frac{3\pi}{2}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $-$ | $-$ |
| $f$ | ↗ | Máx. | ↘ | | | Mín. |

Portanto, a função é crescente em $\left]0, \frac{\pi}{3}\right]$ e é decrescente em $\left[\frac{\pi}{3}, \frac{3\pi}{2}\right]$.

A função tem um máximo relativo para $x = \frac{\pi}{3}$ e um mínimo relativo para $x = \frac{3\pi}{2}$.

Tem-se: $f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \operatorname{sen}\frac{\pi}{3} \times \left(1 + \cos\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \left(1 + \frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{3}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{4}$

$f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \operatorname{sen}\frac{3\pi}{2} \times \left(1 + \cos\frac{3\pi}{2}\right) = -1 \times (1+0) = -1$

**14.** **(D)**

Tem-se: $g'(x) = (\ln x)^2 + x \times 2 \times \ln x \times \frac{1}{x} = (\ln x)^2 + 2\ln x$

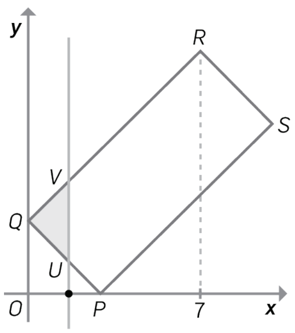
Portanto: $g'\left(\frac{1}{e}\right) = \left(\ln\left(\frac{1}{e}\right)\right)^2 + 2\ln\left(\frac{1}{e}\right) = (-1)^2 + 2 \times (-1) = -1$

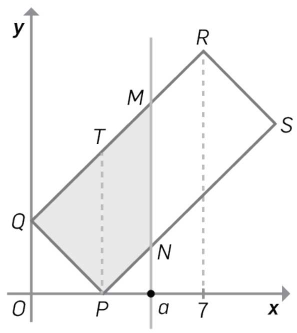
Logo, a reta $r$ tem equação reduzida da forma $y = -x + b$ .

Como $g\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{1}{e} \times \left(\ln\left(\frac{1}{e}\right)\right)^2 = \frac{1}{e}$ , vem: $\frac{1}{e} = -\frac{1}{e} + b \Leftrightarrow b = \frac{2}{e}$

**15.** Tal como se mostra nas figuras abaixo, tem-se:

- se $0 < a \leq 3$ , a área da região sombreada é a área de um triângulo;
- se $3 < a \leq 7$ , a área da região sombreada é a soma da área de um triângulo com a área de um paralelogramo.




Tendo em vista o cálculo da área do triângulo $[QUV]$ , para cada $a$ pertencente ao intervalo $]0, 3]$ , comecemos por determinar as equações reduzidas das retas $QP$ e $QR$ .

Tem-se $\overrightarrow{PQ} = Q - P = (0,3) - (3,0) = (-3,3)$ , pelo que a reta $QP$ tem declive $-1$ .

Como a ordenada na origem desta reta é igual a $3$, tem-se que a equação reduzida da reta $QP$ é $y = -x + 3$ .

A reta $QR$ é perpendicular à reta $QP$ , pelo que tem declive $1$. Como a ordenada na origem da reta $QR$ também é igual a 3, tem-se que a equação reduzida desta reta é $y = x + 3$ .

Assim, para cada $a$ pertencente ao intervalo $]0, 3]$ , tem-se:

$\overline{UV} = a + 3 - (-a + 3) = a + 3 + a - 3 = 2a$

A área do triângulo $[QUV]$ é, portanto, $\frac{2a \times a}{2} = a^2$ .

Para $a = 3$ , obtemos a área do triângulo $[PQT]$: $3^2 = 9$

Determinemos agora a área do paralelogramo $[PTMN]$ .

A base é $\overline{PT}$ . Como o ponto $T$ pertence à reta $QR$ , cuja equação reduzida é $y = x + 3$ , tem-se $\overline{PT} = 3 + 3 = 6$ .

Para cada $a$ pertencente ao intervalo $]3, 7]$ , a altura do paralelogramo é $a - 3$ .

Assim, a área do paralelogramo é $6(a - 3) = 6a - 18$ .

Portanto, para cada $a$ pertencente ao intervalo $]3, 7]$ , a área da região sombreada é $9 + 6a - 18 = 6a - 9$ .

Logo, $f$ é a função de domínio $]0, 7]$ definida por: $f(a) = \begin{cases} a^2 & \text{se } 0 < a \leq 3 \\ 6a - 9 & \text{se } 3 < a \leq 7 \end{cases}$