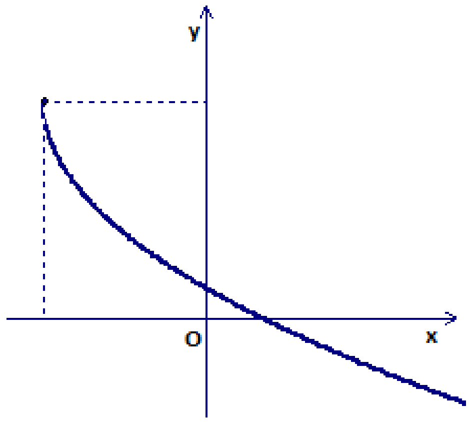
Nome: ____

Ano / Turma: _________ **N.º:** _____ **Data:** ___ - ____ - ___

1.ª Parte

Para cada questão indica a opção que consideras correta.

1. No referencial da figura está representada uma função *f* tal que $f(x) = a\sqrt{x-b} + c$, com $a \neq 0$.



Das seguintes afirmações, indica a verdadeira.

(A) $a > 0$; $b > 0$; $c > 0$

(B) $a < 0$; $b > 0$; $c < 0$

(C) $a < 0$; $b < 0$; $c > 0$

(D) $a > 0$; $b < 0$; $c > 0$

2. Considera a família de funções *f* tais que $f(x) = -(x+2)^2 + 3 - 2k$.

Os valores de k para os quais f tem zeros são:

(A) $k \in \left]\frac{3}{2}, +\infty\right[$

(B) $k \in \left]-\infty, \frac{3}{2}\right[$

(C) $k \in \mathbb{R}^+$

(D) $k \in \mathbb{R}^-$

3. De uma função quadrática sabe-se que -5 é um dos seus zeros e que $x = 1$ é uma equação do seu eixo de simetria. Pode afirmar-se que:

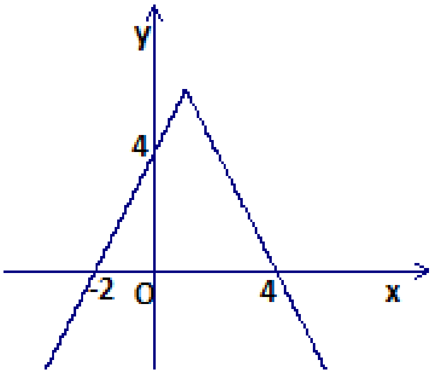
(A) $f(5) \times f(8) = 0$

(B) $f(7) \times f(4) = 0$

(C) $f(1) \times f(4) < 0$

(D) $f(-2) \times f(8) > 0$

4. Na figura está representada a função *f* tal que $f(x)=a|x-b|+c$.



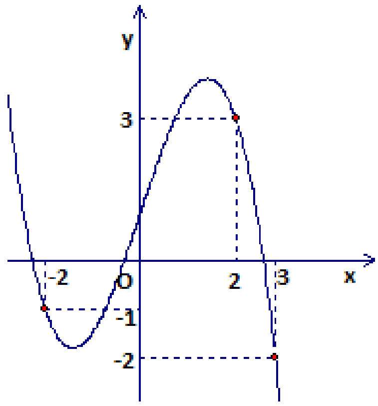
Os zeros de *f* são -2 e 4 e o ponto $(0\,,\,4)$ pertence ao gráfico de *f*.

O contradomínio da função *g* tal que $g(x)=-4f(x-5)-1$ é:

(A) $[-25\,,+\infty[$ **(B)** $]-\infty\,,5]$

(C) $]-\infty\,,20]$ **(D)** $[-21\,,+\infty[$

5. Considera as funções *f* e *g*, de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, estando representada na figura parte da função *g* e sendo *f* tal que $f(x)=\dfrac{2x-5}{3}$.



O valor de $\left(f^{-1}\circ g\right)(3)$ é:

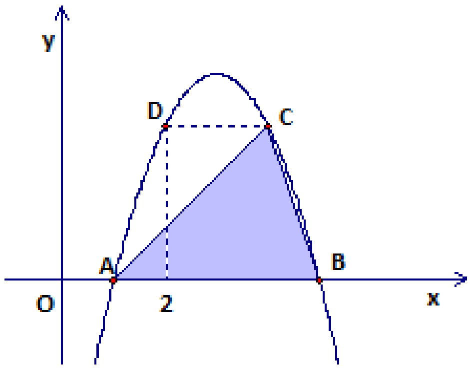
(A) $\dfrac{1}{3}$ **(B)** $-\dfrac{1}{2}$

(C) $\dfrac{11}{2}$ **(D)** -2

2.ª Parte

Dá respostas completas apresentando todos os cálculos e justificações necessárias.

1. Na figura está representada a função *f*, de domínio $\mathbb{R}$, tal que $f(x) = -x^2 + 6x - 5$.



Sabe-se que *A*, *B*, *C* e *D* são pontos do gráfico de *f* tais que *A* e *B* pertencem ao eixo das abcissas, a reta *CD* é paralela a *AB* e o ponto *D* tem abcissa 2.

Considera ainda a função *i* tal que $i(x) = x^2 - x$.

Usando processos exclusivamente analíticos, determina:

1.1. o contradomínio de *f*;

1.2. a área do triângulo [*ABC*];

1.3. os valores de *x* para os quais $f(x) \times i(x) \leq 0$.

2. Considera as funções reais de variável real *g* e *h* tais que $g(x) = |x+5| - 4$ e $h(x) = x + \sqrt{3-4x}$.

2.1. Identifica os zeros da função *f* sendo $f(x) = g(2x)$.

2.2. Determina:

a) o domínio de h;

b) os valores de *x* para os quais $h(x) = g(-8)$.

2.3. Recorrendo às capacidades gráficas da calculadora, determina valores arredondados às décimas das coordenadas dos pontos de interseção dos gráficos de *g* e *h*.

3. No plano, em referencial ortonormado *Oxy* tem-se uma circunferência definida pela equação $x^2 + 10x + y^2 - 8y = -16$ e uma reta *r* definida por $y = x + 9$.

3.1. Mostra que o centro da circunferência pertence à reta *r*.

3.2. Determina o comprimento do segmento de reta [*AB*] sendo *A* e *B* os pontos de interseção da circunferência com o eixo das abcissas.

FIM

	Cotações													
	1.ª Parte					2.ª Parte								
Questões	**1.**	**2.**	**3.**	**4.**	**5.**	**1.1.**	**1.2.**	**1.3.**	**2.1.**	**2.2.a)**	**2.2.b)**	**2.3.**	**3.1.**	**3.2.**
Cotações	10	10	10	10	10	18	16	20	16	15	20	15	15	15

1.ª Parte

1. Por observação do gráfico, partindo do conhecimento da função $r(x)=\sqrt{x}$ e atendendo às transformações de funções, deduz-se que $b<0$, $a<0$ e $c>0$.

Opção (C)

2. O vértice da parábola representativa de *f* é $V(-2\ ,\ 3-2k)$ e a parábola tem a concavidade voltada para baixo. Para a função não ter zeros, tem-se $3-2k<0 \Leftrightarrow -2k<-3 \Leftrightarrow k>\frac{3}{2}$

Então, $k\in \left]\frac{3}{2}\ ,+\infty\right[$.

Opção (A)

3. Atendendo à simetria da parábola, o outro zero da parábola é 7.

Então, $f(7)\times f(4)=0\times f(4)=0$.

Opção (B)

4. Como -2 e 4 são zeros da função, o eixo de simetria é definido por $x=1$.

Então, $f(x)=a|x-1|+c$.

$\begin{cases} f(-2)=0 \\ f(0)=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a+c=0 \\ a+c=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-2 \\ c=6 \end{cases}$. Então, $f(x)=-2|x-1|+6$.

O gráfico de *g* obtém-se a partir do gráfico de *f* por uma translação de vetor $(5\ ,0)$ seguida de uma dilatação vertical de coeficiente 4, de uma reflexão de eixo *Ox* e de uma translação de vetor $(0,-1)$.

O contradomínio de *g* é, então, $[-25\ ,+\infty[$.

Opção (A)

5. $\left(f^{-1}\circ g\right)(3)=f^{-1}\left(g(3)\right)=f^{-1}(-2)$

Como *f* é uma função afim, sabe-se que é bijetiva, admitindo inversa f^{-1}.

Sabe-se que $f^{-1}(-2)=x \Leftrightarrow f(x)=-2 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2x-5}{3}=-2 \quad \Leftrightarrow \quad x=-\frac{1}{2}$

Então, $f^{-1}(-2)=-\frac{1}{2}$.

Opção (B)

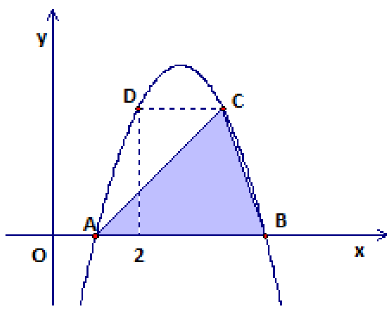
2.ª Parte

1.

1.1. $f(x)=-x^2+6x-5=-\left(x^2-6x+5\right)=-\left(x^2-6x+3^2-3^2+5\right)=$

$=-\left((x-3)^2-4\right)=-(x-3)^2+4$

Então, $D'_f=\left]-\infty,4\right]$.



1.2. $f(x)=0 \quad \Leftrightarrow \quad -x^2+6x-5=0 \quad \Leftrightarrow \quad x=\frac{-6\pm\sqrt{36-20}}{-2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \; x=\frac{-6\pm4}{-2} \quad \Leftrightarrow \quad x=1 \;\vee\; x=5$

$A(1,0)$ e $B(5,0)$

$f(2)=-2^2+6\times2-5=-4+12-5=3$. Então, $D(2,3)$.

Note-se que $f(2)$ representa a altura do triângulo [*ABC*].

$f(x)=3 \quad \Leftrightarrow \quad -x^2+6x-5=3 \Leftrightarrow \quad -x^2+6x-8=0 \Leftrightarrow x=\frac{-6\pm\sqrt{36-32}}{-2} \quad \Leftrightarrow x=2 \;\vee\; x=4$

$C(4,3)$.

Assim, tem-se $A_{[ABC]}=\frac{\overline{AB}\times f(2)}{2}=\frac{4\times3}{2}=6$.

A área do triângulo [*ABC*] é de 6 unidades de área.

1.3. $f(x)\times i(x)\leq 0 \Leftrightarrow \left(-x^2+6x-5\right)\times\left(x^2-x\right)\leq 0$

Zeros de i:

$i(x)=0 \Leftrightarrow x^2-x=0 \Leftrightarrow x^2-x=0$

$\Leftrightarrow x(x-1)=0 \Leftrightarrow x=0 \vee x=1$

x	$-\infty$	0		1		5	$+\infty$
$f(x)$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	0	$-$
$i(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$f(x)\times i(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$

$f(x)\times i(x)\leq 0 \Leftrightarrow x\in \left]-\infty, 0\right] \cup \left[5, +\infty\right[\cup \{1\}$

2. $g(x)=|x+5|-4$ e $h(x)=x+\sqrt{3-4x}$.

2.1. Zeros de *g:*

$g(x)=0 \Leftrightarrow |x+5|-4=0 \Leftrightarrow |x+5|=4 \Leftrightarrow x+5=4 \vee x+5=-4 \Leftrightarrow x=-1 \vee x=-9$

Como o gráfico de *f* se obtém a partir do gráfico de g através de uma contração de coeficiente $\frac{1}{2}$, os zeros de f são $-\frac{9}{2}$ e $-\frac{1}{2}$.

2.2.

a) o domínio de *h*;

$D_h=\{x\in\mathbb{R}:\ 3-4x\geq 0\}$

$3-4x\geq 0 \Leftrightarrow -4x\geq -3 \Leftrightarrow x\leq\frac{3}{4}$

$D_h=\left]-\infty, \frac{3}{4}\right]$

b) $h(x)=g(-8) \Leftrightarrow x+\sqrt{3-4x}=|-8+5|-4 \Leftrightarrow x+\sqrt{3-4x}=-1 \Leftrightarrow \sqrt{3-4x}=-1-x \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3-4x=(-1-x)^2 \wedge 3-4x\geq 0 \wedge -1-x\geq 0 \Leftrightarrow 3-4x=1+2x+x^2 \wedge 4x\leq 3 \wedge x\leq -1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2+6x-2=0 \wedge x\leq\frac{3}{4} \wedge x\leq -1 \Leftrightarrow$

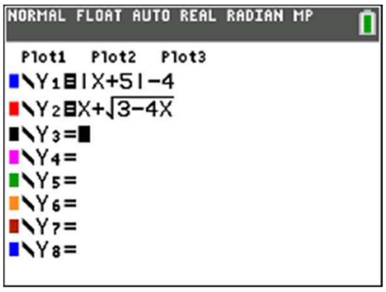
$\Leftrightarrow x=\frac{-6\pm\sqrt{36+8}}{2} \wedge x\leq -1 \Leftrightarrow x=\frac{-6\pm 2\sqrt{11}}{2} \wedge x\leq -1 \Leftrightarrow$

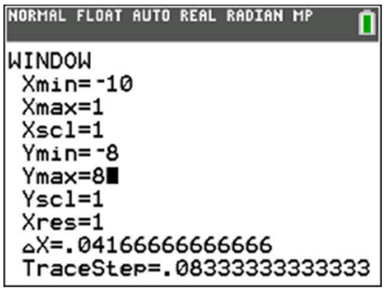
$\Leftrightarrow \left(x=-3-\sqrt{11} \vee x=-3+\sqrt{11}\right) \wedge x\leq -1$

Como $-3+\sqrt{11}>-1$, a única solução é $x=-3-\sqrt{11}$.

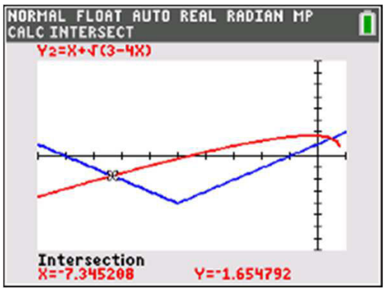
2.3. Inserem-se na calculadora gráfica as expressões das funções $g(x)=|x+5|-4$ e $h(x)=x+\sqrt{3-4x}$ definindo uma janela adequada atendendo aos domínios.

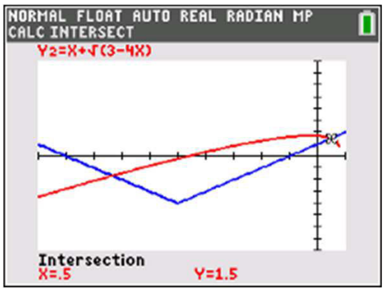
$D_h=\left]-\infty,\frac{3}{4}\right]$ e $D_g=\mathbb{R}$





Identificam-se as coordenadas dos pontos de interseção.





Os pontos de interseção são $(-7{,}3\ ;\ -1{,}7)$ e $(0{,}5\ ;\ 1{,}5)$

3.

Circunferência: $x^2+10x+y^2-8y=-16$

Reta *r*: $y=x+9$

3.1. $x^2+10x+y^2-8y=-16 \Leftrightarrow x^2+10x+25-25+y^2-8y+16-16=-16$

$\Leftrightarrow (x+5)^2-25+(y-4)^2-16=-16 \Leftrightarrow (x+5)^2+(y-4)^2=25$

Seja C o centro da circunferência. $C(-5\,,4)$

As coordenadas do ponto C são solução da equação $y=x+9$, pois $4=-5+9$.

3.2.

$$\begin{cases}(x+5)^2+(y-4)^2=25\\ y=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(x+5)^2=9\\ y=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x+5=3 \vee x+5=-3\\ y=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=-2\\ y=0\end{cases} \vee \begin{cases}x=-8\\ y=0\end{cases}$$

Coordenadas dos pontos de interseção da circunferência com o eixo das abcissas: $(-2\,,0)$ e $(-8\,,\,0)$.

Assim, $\overline{AB}=|-2-(-8)|=6$.

FIM