Teste de Matemática A

2018 / 2019

Teste N.º 3

Matemática A

Duração do Teste: 90 minutos

NÃO É PERMITIDO O USO DE CALCULADORA

10.º Ano de Escolaridade

Nome do aluno: ____ N.º: ___ Turma: ___

Na resposta aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Na resposta aos restantes itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias. Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

1. Considere, num plano munido de um referencial ortonormado de origem O, os pontos $A(0\,,2)$, $B(0\,,-3)$ e $C(-\sqrt{2}\,,-1)$. Seja M o ponto médio de $[BC]$.

Uma condição que define a circunferência de centro M e raio $\|2\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{AC}\|$ é:

(A) $\left(x+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+(y+2)^2=11$

(B) $\left(x+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+(y+2)^2=25$

(C) $\left(x+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+(y+1)^2=11$

(D) $\left(x+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+(y+1)^2=25$

2. Num referencial o.n. $Oxyz$, considere a esfera definida por $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2\leq 18$ e a reta definida por $(x,y,z)=(1{,}2,3)+k(0{,}0,1), k\in\mathbb{R}$.

A interseção da esfera com a reta é:

(A) o conjunto vazio.

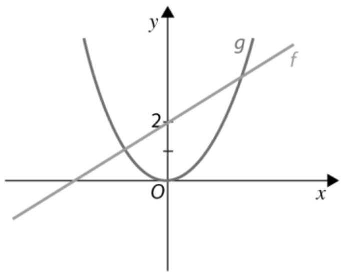
(B) um ponto.

(C) dois pontos.

(D) um segmento de reta.

3. Considere as funções f e g cujos gráficos se encontram representados na figura.

Sabe-se que o ponto de coordenadas $(0,2)$ é um ponto do gráfico de f.



3.1. Qual das seguintes proposições é verdadeira?

(A) $\forall x\in\mathbb{R},\ g(x)>0$

(B) $\forall x\in\mathbb{R}^-,\ g(x)\geq f(x)$

(C) $\exists x\in\mathbb{R}:\ f(x)=g(x)$

(D) $\exists x\in\mathbb{R}^+:\ f(x)=1$

3.2. De acordo com as condições da figura e sabendo que f é uma função afim cujo zero é -3, determine a expressão analítica que defina a função f.

4. Considere, num referencial ortonormado do plano, o quadrado definido pela condição $0\leq x\leq 5\ \wedge\ 1\leq y\leq 6$ e a reta r definida por $(x,y)=(0,7)+k(\sqrt{3}-1,\ 2), k\in\mathbb{R}$.

4.1. Defina, por uma condição, a circunferência inscrita neste quadrado.

4.2. Considere as proposições a, b e c:

a: "O ponto de interseção da reta r com o eixo das ordenadas é um ponto do quadrado."

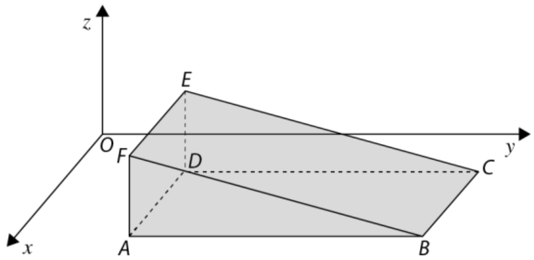
b: "A reta r é paralela ao eixo das abcissas."

c: "A reta r é paralela à reta de equação $y=(\sqrt{3}+1)x$."

Indique, justificando, o valor lógico da proposição $(\sim a\wedge b)\vee c$.

5. Na figura está representado, num referencial o.n. $Oxyz$, um prisma triangular $[ABCDEF]$.

Sabe-se que:



- $[ABF]$ e $[DCE]$ são triângulos retângulos;
- $[ADEF]$ é um quadrado e está contido no plano de equação $y = 2$;
- $[ABCD]$ está contido no plano xOy;
- a reta EC tem equação vetorial $(x, y, z) = (2, -6, 8) + k(0, 4, -2), k \in \mathbb{R}$;
- o ponto A tem coordenadas (6, 2, 0).

5.1. A condição $x = 6 \ \wedge \ z = 0$ define:

(A) a reta AF.

(B) a reta AB.

(C) a reta AD.

(D) o plano ABC.

5.2. Mostre que o ponto E tem coordenadas $(2, 2, 4)$ e o ponto C tem coordenadas $(2, 10, 0)$.

5.3. Identifique e defina, por uma condição, o conjunto de pontos do espaço equidistantes dos pontos C e E. Apresente a condição na forma $ax + by + cz + d = 0$, com $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

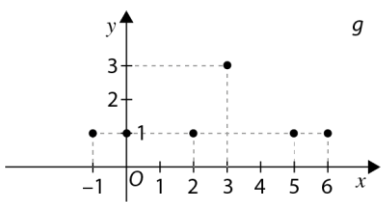
5.4. Determine o volume do prisma.

5.5. Determine equações paramétricas da reta BE.

5.6. Defina, por uma condição, a superfície esférica com centro em $C + \overrightarrow{BF}$ e que é tangente ao plano xOz.

6. Considere as funções $f: \{-1, 0, 1, 4, 5\} \to \mathbb{R}$ e $g: \{-1, 0, 2, 3, 5, 6\} \to \mathbb{R}$ definidas, respetivamente, por:

x	-1	0	1	4	5
$f(x)$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{2}$	$\sqrt{8}$	-3	3



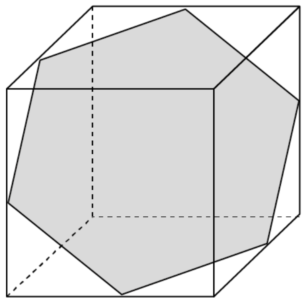
$(f \circ g)(5)$ é igual a:

(A) 1 **(B)** 3 **(C)** $\sqrt{2}$ **(D)** $2\sqrt{2}$

7. Considere o seguinte problema colocado pela professora de Matemática numa aula:

"Consideremos um cubo de aresta a e um hexágono cujos vértices são os pontos médios de algumas arestas do cubo, como está representado na figura ao lado.

Indique uma expressão que permita calcular a área A do hexágono em função de a."



Prove que uma resposta correta ao problema é $A = \frac{3}{4} \times a^2 \times 3^{\frac{1}{2}}$.

FIM

COTAÇÕES

Item														
Cotação (em pontos)														
1.	**2.**	**3.1**	**3.2**	**4.1**	**4.2**	**5.1**	**5.2**	**5.3**	**5.4**	**5.5**	**5.6**	**6.**	**7.**	
8	8	8	15	15	20	8	20	20	15	15	15	8	25	**200**

TESTE N.º 3 – Proposta de resolução

1. Opção (A)

$\overrightarrow{OB} = B - O = (0, -3)$

$\overrightarrow{AC} = C - A = (-\sqrt{2}, -3)$

$2\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{AC} = (0, -6) - \left(-\sqrt{2}, -3\right) = (\sqrt{2}, -3)$

$\left\|2\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{AC}\right\| = \sqrt{(\sqrt{2})^2 + (-3)^2} = \sqrt{11} =$ raio

$M = \left(\frac{0+(-\sqrt{2})}{2}, \frac{-3+(-1)}{2}\right) = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -2\right) =$ centro

Equação da circunferência de centro M e raio $\left\|2\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{AC}\right\|$: $\left(x + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + (y+2)^2 = 11$

2. Opção (D)

Observe-se que a esfera tem centro no ponto de coordenadas (1, 2, 3) e a reta contém este ponto e tem a direção do eixo Oz. A interseção desta esfera com esta reta é então um segmento de reta.

3.

3.1. Opção (C)

Por observação dos gráficos de f e g, conclui-se que:

- $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) > 0$ não é verdadeira, pois a função g não é positiva para todo o valor real x. Em $x = 0$, tem-se que $g(x) = 0$;
- $\forall x \in \mathbb{R}^-, g(x) \geq f(x)$ não é verdadeira, pois existem valores reais negativos para os quais se verifica que as imagens desses valores por g são inferiores às imagens desses mesmos valores por f;
- $\exists x \in \mathbb{R}: f(x) = g(x)$ é verdadeira, pois a observação dos gráficos de f e de g permite concluir que estes se intersetam, isto é, existe pelo menos um valor real x tal que a sua imagem por f é igual à sua imagem por g;
- $\exists x \in \mathbb{R}^+: f(x) = 1$ é falsa, pois não existe nenhum valor real positivo tal que a sua imagem por f seja 1.Observa-se que o gráfico de f não interseta a reta de equação $y = 1$ em $\mathbb{R}^+$.

3.2. O gráfico de f é uma reta que passa pelos pontos de coordenadas $(-3, 0)$ e (0, 2).

Assim, a expressão analítica de f é da forma $f(x) = mx + b$, onde $m = \frac{2-0}{0-(-3)} = \frac{2}{3}$ e $b = 2$.

Logo, $f(x) = \frac{2}{3}x + 2$.

4.

4.1. A circunferência inscrita no quadrado definido pela condição $0 \leq x \leq 5 \ \wedge \ 1 \leq y \leq 6$ tem centro no ponto de coordenadas $\left(\frac{0+5}{2}, \frac{1+6}{2}\right) = \left(\frac{5}{2}, \frac{7}{2}\right)$ e tem raio igual a $\frac{|5-0|}{2} = \frac{5}{2}$.

Portanto, a condição que define a circunferência pedida é $\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{7}{2}\right)^2 = \frac{25}{4}$.

4.2.

- Verifica-se que o ponto de coordenadas (0, 7) pertence à reta r e é o ponto de interseção desta reta com o eixo das ordenadas.
  Este ponto não pertence ao quadrado definido por $0 \leq x \leq 5 \ \wedge \ 1 \leq y \leq 6$, visto não satisfazer a condição, já que $y = 7$. A proposição a é, então, falsa.
- A reta r tem declive $\frac{2}{\sqrt{3}-1}$, que é diferente de zero, logo a reta r não é paralela ao eixo das abcissas. A proposição b é, então, falsa.
- A reta r tem declive $\frac{2}{\sqrt{3}-1}$, que é igual a $\frac{2(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)} = \frac{2(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3})^2-1^2} = \frac{2(\sqrt{3}+1)}{2} = \sqrt{3}+1$
  Como os declives das retas são iguais, as retas são paralelas (não são retas coincidentes, pois, por exemplo, o ponto de coordenadas (0, 7) pertence à reta r e não pertence à reta definida por $y = \left(\sqrt{3}+1\right)x$, já que $7 \neq (\sqrt{3}+1) \times 0$). A proposição c é, então, falsa.

Como $a \Leftrightarrow \mathrm{F}$, $b \Leftrightarrow \mathrm{F}$ e $c \Leftrightarrow \mathrm{V}$, tem-se que:

$$\begin{aligned}((\sim a \ \wedge \ b) \ \vee \ c) &\Leftrightarrow ((\mathrm{V} \ \wedge \ \mathrm{F}) \vee \ \mathrm{V}) \\ &\Leftrightarrow (\mathrm{F} \ \vee \ \mathrm{V}) \\ &\Leftrightarrow \ \mathrm{V}\end{aligned}$$

A proposição $(\sim a \ \wedge \ b) \ \vee \ c$ é, então, uma proposição verdadeira.

5.

5.1. Opção (B)

Dadas as condições do enunciado e da figura, os pontos de abcissa 6 e cota 0 são os pontos da reta AB.

AB pode então ser definida pela condição $x = 6 \ \wedge \ z = 0$.

Observe-se que:

- reta AF: $x = 6 \ \wedge \ y = 2$
- reta AD: $y = 2 \ \wedge \ z = 0$
- plano ABC: $z = 0$

5.2.

- O ponto E tem a mesma ordenada que o ponto A. Logo, $y = 2$. E como pertence à reta EC, existe $k \in \mathbb{R}$ tal que $(x, 2, z) = (2, -6, 8) + k(0, 4, -2)$.

  Como:

$$\begin{cases} x = 2 + 0k \\ 2 = -6 + 4k \\ z = 8 - 2k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ k = 2 \\ z = 4 \end{cases}$$

  tem-se que as coordenadas de E são (2, 2, 4).

- O ponto C tem cota 0 e também pertence à reta EC.

  Assim, existe $k \in \mathbb{R}$ tal que $(x, y, 0) = (2, -6, 8) + k(0, 4, -2)$.

  Como:

$$\begin{cases} x = 2 + 0k \\ y = -6 + 4k \\ 0 = 8 - 2k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 10 \\ k = 4 \end{cases}$$

  tem-se que as coordenadas de C são (2, 10, 0).

5.3. O conjunto de pontos P do espaço equidistantes de C e de E é o plano mediador de $[CE]$ e pode ser definido por $d(C, P) = d(E, P)$.

$\sqrt{(x-2)^2 + (y-10)^2 + (z-0)^2} = \sqrt{(x-2)^2 + (y-2)^2 + (z-4)^2}$

$\Leftrightarrow (x-2)^2 + y^2 - 20y + 100 + z^2 = (x-2)^2 + y^2 - 4y + 4 + z^2 - 8z + 16$

$\Leftrightarrow -16y + 8z + 80 = 0$

$\Leftrightarrow -2y + z + 10 = 0$

Uma condição pretendida é $-2y + z + 10 = 0$.

5.4. Seja V o volume do prisma:

$$\begin{aligned} \text{Volume}_{\text{prisma}} = \text{Área}_{\text{base}} \times \text{altura} &= \frac{\overline{AF} \times \overline{AB}}{2} \times \overline{AD} = \\ &= \frac{4 \times |10-2|}{2} \times |6-2| = \\ &= \frac{4 \times 8}{2} \times 4 = \\ &= 64 \end{aligned}$$

5.5. $B(6,10,0)$ $E(2,2,4)$

$\overrightarrow{BE} = (-4, -8, 4)$

Equações paramétricas da reta BE:

$$\begin{cases} x = 2 - 4k \\ y = 2 - 8k \, , k \in \mathbb{R} \\ z = 4 + 4k \end{cases}$$

5.6. Centro: $C + \overrightarrow{BF} = E = (2,2,4)$

Com centro em E, para ser tangente ao plano xOz terá raio 2.

Assim, uma condição pode ser:

$$(x-2)^2 + (y-2)^2 + (z-4)^2 = 4$$

6. Opção (D)

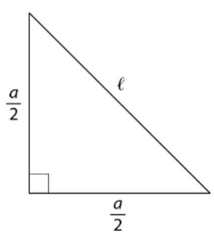
$(f \circ g)(5) = f\big(g(5)\big) = f(1) = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

7. Opção (D)

Seja a a aresta do cubo, l o lado do hexágono e h a altura de cada um dos seis triângulos equiláteros em que fica dividido o hexágono.

$A = 6 \times \dfrac{l \times h}{2} =$

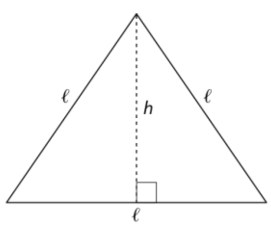
Cálculos auxiliares



$l^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 \Leftrightarrow l^2 = \frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{4}$

$\Leftrightarrow l^2 = \frac{2a^2}{4}$

Logo, $l = \frac{\sqrt{2}}{2}a$.



$h^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2 = l^2 \Leftrightarrow h^2 = l^2 - \frac{l^2}{4}$

$\Leftrightarrow h^2 = \frac{3}{4}l^2$

Logo, $h = \frac{\sqrt{3}}{2}l$.

Como $l = \frac{\sqrt{2}}{2}a$, vem que $h = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2}a = \frac{\sqrt{6}}{4}a$.

Assim:

$$A = 6 \times \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}a \times \frac{\sqrt{6}}{4}a}{2} = 6 \times \frac{\sqrt{12}a^2}{16} =$$

$$= 6 \times \frac{2\sqrt{3}a^2}{16} =$$

$$= \frac{3\sqrt{3}a^2}{4} =$$

$$= \frac{3}{4} \times a^2 \times 3^{\frac{1}{2}}$$