FICHA FORMATIVA – 10º ANO

NOME: ____ **N.º:** ___ **TURMA:** ___ **ANO LETIVO:** _____/_____

DATA: _____/_____/_____

CONDIÇÕES E RADICAIS

1. Considera as condições $p(x): x^2 > 0$ e $q(x): 2x - 1 = 0$.
Responde às seguintes questões, apresentando, para cada uma, justificação para a tua resposta.

1.1 A condição $p(x)$ é universal em $\mathbb{R}$?

1.2 A condição $q(x)$ é possível em $\mathbb{N}$?

2. Considera a condição $2x^2 < x$.
Indica um conjunto no qual esta condição seja:

2.1 universal;

2.2 impossível.

3. Escreve em linguagem simbólica, usando quantificadores, as proposições seguintes:

3.1 Há pelo menos um número natural entre $0{,}1$ e $1{,}1$.

3.2 Todos os números naturais são positivos.

3.3 Existe pelo menos um número inteiro no intervalo $]-1, 2[$.

3.4 Todos os números naturais são divisíveis por 1.

4. Considera as condições $p(x): x \geq 5$ e $q(x): x^2 \geq 25$.

4.1 Indica o valor lógico da proposição $\forall x \in \mathbb{R},\ p(x) \Rightarrow q(x)$. Justifica a tua resposta.

4.2 Mostra, apresentando um contraexemplo, que a proposição $\forall x \in \mathbb{R}, q(x) \Rightarrow p(x)$ é falsa.

5. Considera os conjuntos:

$A=\{x\in\mathbb{R}: x>5 \wedge x<18\}$ $\quad$ $B=\{x\in\mathbb{R}: x<9\}$ $\quad$ $C=\{x\in\mathbb{R}: x>16\}$

Determina sob a forma de intervalo ou união de intervalos:

5.1 $\overline{A}$ $\quad$ **5.2** $\overline{B}$ $\quad$ **5.3** $A\cap B$

5.4 $B\cup C$ $\quad$ **5.5** $A\setminus C$ $\quad$ **5.6** $A\cap\overline{\overline{C}}$

6. No universo $U=\{-5,-1,0,1,3,4,5\}$, considera os conjuntos:

$A=\{x: x>0\}$ $\quad$ $B=\{x\in\mathbb{R}: x<0\}$ $\quad$ $C=\{x\in\mathbb{R}: |x|=1\}$

Determina em extensão:

6.1 A $\quad$ **6.2** B $\quad$ **6.3** C

6.4 $\overline{C}$ $\quad$ **6.5** $A\setminus C$ $\quad$ **6.6** $B\cap\overline{C}$

6.7 $\left(\overline{B\cap C}\right)\setminus A$

7. Mostra, por dupla indicação, que:

$$\forall x\in\mathbb{R},\ x^2>5 \Leftrightarrow x>\sqrt{5} \vee x<-\sqrt{5}$$

8. Demonstra, por contrarrecíproco, que se um número natural n não é divisível por 2 então não é divisível por 10.

9. Considera em $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, a proposição:

$$\forall x,\ x>\frac{1}{2} \Rightarrow 2-\frac{1}{x}>0$$

9.1 Indica o valor lógico da proposição. Justifica a tua resposta.

9.2 Escreve, em linguagem simbólica e sem usar o sinal de negação, a negação da proposição dada.

10. Simplifica as expressões seguintes:

10.1 $\sqrt{20}\times\sqrt{3}$

10.2 $\sqrt[3]{6}\times\sqrt[3]{5}$

10.3 $\sqrt[3]{135} : \sqrt[3]{5}$

10.4 $\sqrt{\sqrt[3]{128}}$

10.5 $\left(\sqrt[5]{3}\right)^{21}$

10.6 $\sqrt[3]{7}\times\sqrt[3]{2}\times\sqrt[3]{4}$

10.7 $\dfrac{\sqrt[5]{2}\times\sqrt[5]{64}}{\sqrt[5]{9}}$

10.8 $\dfrac{1}{2}\sqrt{3}-2\sqrt{3}+\dfrac{5}{2}\sqrt{3}$

10.9 $2\sqrt{\sqrt{243}}+\sqrt[4]{3}$

10.10 $\dfrac{3}{2}\sqrt{2}-\sqrt[3]{3}-4\sqrt[3]{3}-\dfrac{3}{5}\sqrt{2}$

10.11 $\sqrt{2}\times\sqrt{16}-\sqrt[5]{2}+3\sqrt{2}+6\sqrt[5]{2}$

11. Racionaliza o denominador das seguintes frações:

11.1 $\dfrac{4}{5\sqrt{3}}$

11.2 $\dfrac{3\sqrt{2}}{2\sqrt{2}-1}$

11.3 $\dfrac{4}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}$

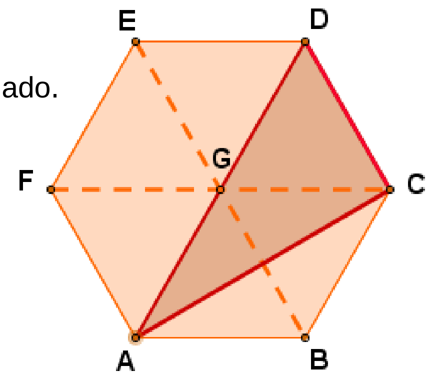
12. Simplifica as expressões seguintes, racionalizando o denominador:

12.1 $\dfrac{3}{\sqrt{a}+2}$, para $a\in\mathbb{R}_0^+\setminus\{4\}$

12.2 $\dfrac{2a}{\sqrt{a}-\sqrt{3}}$, para $a\in\mathbb{R}_0^+\setminus\{3\}$

12.3 $\dfrac{2}{\sqrt[5]{9a^4}}$, para $a\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$

13. Considera o hexágono regular $[ABCDEF]$, com 2 unidades de lado.
Determina a medida da área do triângulo $[ACD]$.
Apresenta o resultado na forma $a\sqrt{b}$, com $a,b\in\mathbb{N}$.



FIM

CONDIÇÕES E RADICAIS – PROPOSTA DE RESOLUÇÃO

1.

1.1 A condição $p(x)$ não é universal, pois não se verifica para $x=0$.

1.2 A condição $q(x)$ é impossível em $\mathbb{N}$. Com efeito, em $\mathbb{R}$, a condição apenas é verificada para $x=\frac{1}{2}$, mas $\frac{1}{2}\notin\mathbb{N}$.

2.

2.1 A condição $2x^2>x$ é universal para todos os números de $\left]0,\frac{1}{2}\right[$.

2.2 A condição $2x^2>x$ é impossível no universo dos números negativos $\left(\mathbb{R}^-\right)$.

3.

3.1 $\exists x\in\mathbb{N}: 0,1<x<1,1$

3.2 $\forall x\in\mathbb{N}: x>0$

3.3 $\exists x\in\mathbb{Z}: x\in\left]-1,2\right[$

3.4 $\forall x\in\mathbb{N}, \frac{x}{1}\in\mathbb{N}$

4.

4.1 À condição $x\geq 5$ corresponde o conjunto $\left[5,+\infty\right[$.

À condição $x^2\geq 25\Leftrightarrow x\geq 5\vee x\leq -5$ corresponde o conjunto $\left]-\infty,-5\right]\cup\left[5,+\infty\right[$.

O conjunto $\left]-\infty,-5\right]\cup\left[5,+\infty\right[$ contém o conjunto $\left[5,+\infty\right[$, pelo que a proposição é verdadeira.

4.2 Por exemplo, $x=-6$ verifica a condição $q(x)$ mas não verifica a condição $p(x)$. Sendo a proposição $p(-6)$ falsa e a proposição $q(-6)$ verdadeira, $q(-6)\Rightarrow p(-6)$ é falsa. Assim, a proposição $\forall x\in\mathbb{R}, q(x)\Rightarrow p(x)$ é falsa.

5.

5.1 $\overline{\left]5,18\right[}=\left]-\infty,5\right]\cup\left[18,+\infty\right[$

5.2 $\overline{\left]-\infty,9\right[}=\left[9,+\infty\right[$

5.3 $\left]5,18\right[\cap\left]-\infty,9\right[=\left]5,9\right[$

5.4 $\left]-\infty,9\right[\cup\left]16,+\infty\right[$

5.5 $\left]5,18\right[\setminus\left]16,+\infty\right[=\left]5,16\right]$

5.6 $\left]5,18\right[\cap\overline{\overline{\left]16,+\infty\right[}}=\left]5,18\right[\cap\left]16,+\infty\right[=\left]16,18\right[$

6.

6.1 $A=\{1,3,4,5\}$

6.2 $B=\{-5,-1\}$

6.3 $C=\{-1,1\}$

6.4 $U\setminus C=\{-5,-1,0,1,3,4,5\}\setminus\{-1,1\}=\{-5,0,3,4,5\}$

6.5 $A\setminus C=\{1,3,4,5\}\setminus\{-1,1\}=\{3,4,5\}$

6.6 $B\cap\overline{C}=\{-5,-1\}\cap\{-5,0,3,4,5\}=\{-5\}$

6.7 $\left(\overline{B\cap C}\right)\setminus A=\left(\overline{\{-5,-1\}\cap\{-1,1\}}\right)\setminus\{1,3,4,5\}=\overline{\{-1\}}\setminus\{1,3,4,5\}=$

$=\{-5,0,1,3,4,5\}\setminus\{1,3,4,5\}=\{-5,0\}$

7. Comecemos por mostrar que $\forall x\in\mathbb{R},\ x^2>5\Rightarrow x>\sqrt{5}\vee x<-\sqrt{5}$:

$x^2>5\Rightarrow x^2-5>0\Rightarrow\left(x-\sqrt{5}\right)\left(x+\sqrt{5}\right)>0\Rightarrow\left(x-\sqrt{5}>0\wedge x+\sqrt{5}>0\right)\vee\left(x-\sqrt{5}<0\wedge x+\sqrt{5}<0\right)\Rightarrow$

$\Rightarrow\left(x>\sqrt{5}\wedge x>-\sqrt{5}\right)\vee\left(x<\sqrt{5}\wedge x<-\sqrt{5}\right)\Rightarrow x>\sqrt{5}\vee x<-\sqrt{5}$

Mostremos agora que $\forall x\in\mathbb{R}, x>\sqrt{5}\vee x<-\sqrt{5}\Rightarrow x^2>5$:

$x>\sqrt{5}\vee x<-\sqrt{5}\Rightarrow x^2>5$ (basta considerar $x>\sqrt{5}\Rightarrow x^2>5$).

Conclui-se, portanto, que $\forall x\in\mathbb{R},\ x^2>5\Leftrightarrow x>\sqrt{5}\vee x<-\sqrt{5}$.

8. O contrarrecíproco da proposição dada é $\forall n\in\mathbb{N}$, n é divisível por 10 $\Rightarrow n$ é divisível por 2. Vejamos que é verdadeira.

Seja n um número natural divisível por 10. Então, n pode ser escrito na forma $n=10m$ com $m\in\mathbb{N}$, ou seja, $n=2\times 5m$. Concluímos que n é divisível por 2, pois é da forma $n=2k$, com $k=5m$ e $k\in\mathbb{N}$.

Sendo verdadeira a proposição $\forall n\in\mathbb{N}$, n é divisível por 10 $\Rightarrow n$ é divisível por 2, também é verdadeira a proposição $\forall n\in\mathbb{N}$, n não é divisível por 2 $\Rightarrow n$ não é divisível por 10.

9.

9.1 A proposição é verdadeira, pois tem-se: $x>\frac{1}{2}\underset{x>0}{\Rightarrow}\frac{1}{x}<2\Rightarrow -2+\frac{1}{x}<0\Rightarrow 2-\frac{1}{x}>0$.

9.2 $\sim\left(\forall x,\ x>\frac{1}{2}\Rightarrow 2-\frac{1}{x}>0\right)\Leftrightarrow\exists x:\sim\left(x>\frac{1}{2}\Rightarrow 2-\frac{1}{x}>0\right)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\exists x: x>\frac{1}{2}\wedge\sim\left(2-\frac{1}{x}>0\right)\Leftrightarrow\exists x: x>\frac{1}{2}\wedge 2-\frac{1}{x}\leq 0$

10.

10.1 $\sqrt{20}\times\sqrt{3}=\sqrt{2^2\times3\times5}=2\sqrt{15}$

10.2 $\sqrt[3]{6}\times\sqrt[3]{5}=\sqrt[3]{30}$

10.3 $\sqrt[3]{135}:\sqrt[3]{5}=\sqrt[3]{135:5}=\sqrt[3]{27}=\sqrt[3]{3^3}=3$

10.4 $\sqrt{\sqrt[3]{128}}=\sqrt[6]{2^7}=\sqrt[6]{2^6\times2}=2\sqrt[6]{2}$

10.5 $\left(\sqrt[5]{3}\right)^{21}=\sqrt[5]{3^{21}}=\sqrt[5]{3^{20}\times3}=3^4\sqrt[5]{3}=81\sqrt[5]{3}$

10.6 $\sqrt[3]{7}\times\sqrt[3]{2}\times\sqrt[3]{4}=\sqrt[3]{56}=2\sqrt[3]{7}$

10.7 $\dfrac{\sqrt[5]{2}\times\sqrt[5]{64}}{\sqrt[5]{9}}=\sqrt[5]{\dfrac{2\times64}{9}}=\sqrt[5]{\dfrac{2^2\times2^5}{9}}=2\sqrt[5]{\dfrac{4}{9}}$

10.8 $\dfrac{1}{2}\sqrt{3}-2\sqrt{3}+\dfrac{5}{2}\sqrt{3}=\left(\dfrac{1}{2}-2+\dfrac{5}{2}\right)\sqrt{3}=\sqrt{3}$

10.9 $2\sqrt{\sqrt{243}}+\sqrt[4]{3}=2\sqrt[4]{3^5}+\sqrt[4]{3}=2\times3\sqrt[4]{3}+\sqrt[4]{3}=7\sqrt[4]{3}$

10.10 $\dfrac{3}{2}\sqrt{2}-\sqrt[3]{3}-4\sqrt[3]{3}-\dfrac{3}{5}\sqrt{2}=\left(\dfrac{3}{2}-\dfrac{3}{5}\right)\sqrt{2}+(-1-4)\sqrt[3]{3}=\dfrac{9}{10}\sqrt{2}-5\sqrt[3]{3}$

10.11 $\sqrt{2}\times\sqrt{16}-\sqrt[5]{2}+3\sqrt{2}+6\sqrt[5]{2}=4\sqrt{2}+3\sqrt{2}+(6-1)\sqrt[5]{2}=7\sqrt{2}+5\sqrt[5]{2}$

11.

11.1 $\dfrac{4}{5\sqrt{3}}=\dfrac{4\times\sqrt{3}}{5\sqrt{3}\times\sqrt{3}}=\dfrac{4\sqrt{3}}{5\times3}=\dfrac{4\sqrt{3}}{15}$

11.2 $\dfrac{3\sqrt{2}}{2\sqrt{2}-1}=\dfrac{3\sqrt{2}\left(2\sqrt{2}+1\right)}{\left(2\sqrt{2}-1\right)\left(2\sqrt{2}+1\right)}=\dfrac{6\left(\sqrt{2}\right)^2+3\sqrt{2}}{\left(2\sqrt{2}\right)^2-1}=\dfrac{6\times2+3\sqrt{2}}{4\times2-1}=\dfrac{12+3\sqrt{2}}{7}$

11.3 $\dfrac{4}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}=\dfrac{4\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)}=\dfrac{4\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{6}\right)^2-\left(\sqrt{2}\right)^2}=\dfrac{4\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)}{6-2}=\sqrt{6}-\sqrt{2}$

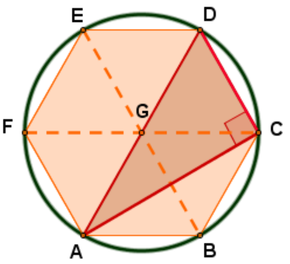
12.

12.1 $\frac{3}{\sqrt{a}+2}=\frac{3\left(\sqrt{a}-2\right)}{\left(\sqrt{a}+2\right)\left(\sqrt{a}-2\right)}=\frac{3\sqrt{a}-6}{\left(\sqrt{a}\right)^2-4}=\frac{3\sqrt{a}-6}{a-4}$, para $a\in\mathbb{R}_0^+\setminus\{4\}$.

12.2 $\frac{2a}{\sqrt{a}-\sqrt{3}}=\frac{2a\left(\sqrt{a}+\sqrt{3}\right)}{\left(\sqrt{a}-\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{a}+\sqrt{3}\right)}=\frac{2a\left(\sqrt{a}+\sqrt{3}\right)}{\left(\sqrt{a}\right)^2-\left(\sqrt{3}\right)^2}=\frac{2a\sqrt{a}+2a\sqrt{3}}{a-3}$, para $a\in\mathbb{R}_0^+\setminus\{3\}$.

12.3 $\frac{2}{\sqrt[5]{9a^4}}=\frac{2\times\sqrt[5]{3^3a}}{\sqrt[5]{3^2a^4}\times\sqrt[5]{3^3a}}=\frac{2\sqrt[5]{3^3a}}{\sqrt[5]{3^5a^5}}=\frac{2\sqrt[5]{3^3a}}{\sqrt[5]{(3a)^5}}=\frac{2\sqrt[5]{3^3a}}{3a}$, para $a\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

13. Se inscrevermos o hexágono numa circunferência, verificamos que o ângulo ACD está inscrito numa semicircunferência e, portanto, é reto. Sabemos, também, que o hexágono está decomposto em seis triângulos equiláteros geometricamente iguais, e, portanto, $\overline{AD}=4$. Então, pelo teorema de Pitágoras:



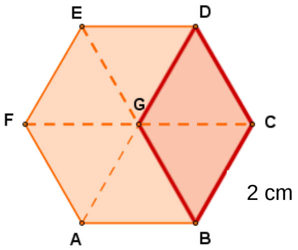
$\overline{AC}^2=\overline{AD}^2-\overline{CD}^2 \Leftrightarrow \overline{AC}^2=4^2-2^2 \Leftrightarrow$

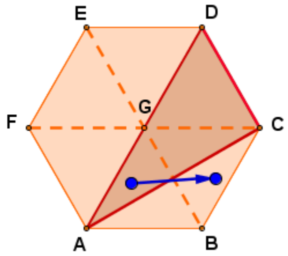
$\Leftrightarrow \overline{AC}^2=12 \underset{\overline{AC}>0}{\Leftrightarrow} \overline{AC}=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$

Finalmente, $A_{[ACD]}=\frac{\overline{AC}\times\overline{CD}}{2}=\frac{2\sqrt{3}\times 2}{2}=2\sqrt{3}\text{ cm}^2$.

Outro processo:

Observa:





A área do triângulo $[ACD]$ é igual à área do quadrilátero $[GBCD]$ porque, sendo I o ponto de interseção de AC com BG, os triângulos $[AIG]$ e $[BIC]$ são geometricamente iguais (o que se justifica pelo critério LLL, por exemplo). Por sua vez, $[GBCD]$ decompõe-se nos triângulos equiláteros $[GBC]$ e $[GCD]$, geometricamente iguais e, portanto, com a mesma área.

Altura, a, do triângulo $[GBC]$: $a^2=2^2-1^2 \underset{a>0}{\Leftrightarrow} a=\sqrt{3}$ cm.

Área de $[ACD]$: $A=2\times\frac{2\times\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{3}\text{cm}^2$.