Proposta de teste de avaliação

Matemática A

10.º ANO DE ESCOLARIDADE

Duração: 90 minutos | **Data:**

O teste é constituído por dois grupos, I e II.

O Grupo I inclui quatro questões de escolha múltipla.

O Grupo II inclui dez questões de resposta aberta, algumas delas subdivididas em alíneas, num total de catorze.

Grupo I

- Os **quatro** itens deste grupo são de escolha múltipla.
- Em cada um deles, são indicadas quatro opções, das quais só uma está correta.
- Escreva, na sua folha de respostas, **apenas o número de cada item e a letra** correspondente à opção que selecionar para responder a esse item.
- **Não apresente cálculos nem justificações**.
- Se apresentar mais do que uma opção, a resposta será classificada com zero pontos, o mesmo acontecendo se a letra transcrita for ilegível.

1. Sejam *a* e *b* duas proposições. Sabe-se que a proposição $\sim a \Rightarrow b$ é falsa.

Então necessariamente o valor lógico de:

(A) $a \Leftrightarrow \sim b$ é verdadeiro;

(B) $\sim a \wedge b$ é verdadeiro;

(C) $a \vee b$ é falso;

(D) $a \Rightarrow \sim b$ é falso.

2. Qual das seguintes proposições é **verdadeira**?

(A) $\forall n \in \mathbb{N}, \ 4n - 4 > 0$

(B) $\forall x \in \mathbb{R}, \ x - 1 \leq 2x - 2$

(C) $\exists x \in \mathbb{Z} : 2(x-3) = 5$

(D) $\exists n \in \mathbb{N} : \sqrt[3]{n - 28} = -3$

3. Considere o conjunto $A = \{x \in \mathbb{R} : -1 < 1 - x \leq 6\}$.

Seja $\overline{A}$ o complementar do conjunto *A*.

Qual dos seguintes é o conjunto $\overline{A}$?

(A) $\overline{A} = \{x \in \mathbb{R} : x < -5 \vee x \geq 2\}$

(B) $\overline{A} = \{x \in \mathbb{R} : 1 \geq 1 - x > -6\}$

(C) $\overline{A} = \{x \in \mathbb{R} : x < -7 \vee x \geq 0\}$

(D) $\overline{A} = \{x \in \mathbb{R} : x \leq 5 \wedge x \geq -2\}$

4. Sejam *a* e *b* dois números reais positivos.

A expressão $\dfrac{\left(a^{-1}\sqrt{b}\right)^3 \times \left(\sqrt{a^3 b^{-2}}\right)}{\sqrt{b\sqrt[4]{a^{-2}}}}$ é equivalente a:

(A) $a^{-\frac{7}{4}}$

(B) $a^{-\frac{7}{4}}b$

(C) $b^{-\frac{1}{4}}$

(D) $a^{-\frac{5}{4}}$

Grupo II

Nas respostas aos itens deste grupo, apresente **todos os cálculos** que tiver de efetuar e **todas as justificações** que entender necessárias.

Atenção: quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre **o valor exato**.

1. Sejam *p* e *q* duas proposições. Sem recorrer a tabelas de verdade, mostre que a proposição $(\sim p \Rightarrow q) \wedge [\sim (p \wedge \sim q)] \wedge [(\sim p \Rightarrow \sim p) \wedge \sim q]$ é uma proposição falsa independentemente dos valores lógicos de *p* e de *q*.

2. Sejam *a*, *b* e *c* três proposições.

Complete a seguinte tabela de verdade.

a	b	c	$a \vee \sim b$	$\sim b \wedge c$	$(\sim b \wedge c) \Rightarrow (a \vee \sim b)$
V				V	
		F	F		
					F

3. Considere, em $\mathbb{R}$, as condições:

$$a(x):\ 4 + 2x^2 > 0 \qquad b(x):\ x^2 + x + 3 = 0 \qquad c(x):\ 1 - 2x \geq -x - 2$$

Classifique cada uma das condições e indique o seu conjunto-solução.

4. Considere as proposições *p* e *q* tais que:

$$p : \forall x \in \mathbb{R}, |x| > 0 \qquad\qquad q : \exists n \in \mathbb{N} : -3 < n - 1 \leq 0$$

4.1. Indique, justificando, o valor lógico das proposições *p* e *q*.

4.2. Escreva em linguagem simbólica e sem utilizar o símbolo $\sim$, a negação das proposições *p* e *q*.

5. Mostre que $\dfrac{2\sqrt{3} \times \sqrt{18} + \sqrt[4]{36}}{\sqrt{24} - 2\sqrt{54}} = -\dfrac{7}{4}$.

6. Considere, em $\mathbb{R}$, os conjuntos definidos por:

$$A = \left\{x \in \mathbb{R} : 9 - 3x > 0 \vee x - \sqrt[3]{125} > 0\right\}$$

$$B = \left\{x \in \mathbb{R} : 6 - x > 2\right\}$$

$$C = \left\{x \in \mathbb{R} : -12 < -3x \leq 6\right\}$$

6.1. Determine, na forma de intervalo ou união de intervalos de números reais, cada um dos seguintes conjuntos:

a) $\overline{A}$ **b)** $B \setminus A$ **c)** $\left(A \cup C\right) \setminus \mathbb{R}_0^-$

6.2. Considere a proposição $\forall x \in C,\ x \in \overline{A}$.

Mostre, através de um contraexemplo, que a proposição é falsa.

7. Em $\mathbb{N}$, considere as proposições:

$a(n)$: n é divisor de 12

$b(n)$: n não é primo

$c(n)$: n é ímpar

$d(n)$: n é não superior a 6

Represente, em extensão, o conjunto:

7.1. $P = \left\{n : a(n) \wedge c(n)\right\}$

7.2. $Q = \left\{n : \sim b(n) \wedge d(n)\right\}$

8. Considere as proposições:

$a(n)$: n^4 não é múltiplo de 4

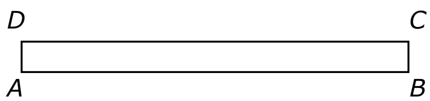
$b(n)$: b é ímpar

Considere, ainda, a implicação $a(n) \Rightarrow b(n)$.

8.1. Escreva a implicação contrarrecíproca da implicação dada.

8.2. Demonstre, por contrarrecíproco, que a implicação dada é universal em $\mathbb{N}$.

9. Na figura está representado um retângulo $\left[ABCD\right]$.



Sabe-se que:

▪ $\overline{BC} = \dfrac{\sqrt{2} + 1}{3}$

▪ a área do retângulo $\left[ABCD\right]$ é igual a $4 + 3\sqrt{2}$.

Mostre que o perímetro do retângulo $\left[ABCD\right]$ é igual a $\dfrac{20\sqrt{2} + 38}{3}$.

10. Mostre que $2^{-\frac{5}{2}} + 2^{-\frac{1}{2}} + 2^{-\frac{3}{2}} - 8^{\frac{1}{2}} = -\dfrac{9\sqrt{2}}{8}$.

Grupo I	Grupo II																Total
	1	2	3	4.1.	4.2.	5	6.1. a)	6.1. b)	6.1. c)	6.2	7.1.	7.2.	8.1.	8.2.	9	10	
32	12	12	20	10	10	12	6	8	10	10	8	8	6	12	12	12	200

PROPOSTA DE RESOLUÇÕES

Grupo I

1. A implicação $\sim a \Rightarrow b$ é falsa se e só se $\sim a$ é verdadeira e b é falsa, ou seja, se e só se ***a* e *b* são ambas falsas**.

▪ A proposição $a \Leftrightarrow \sim b$ é falsa, uma vez que a e $\sim b$ têm valores lógicos diferentes.

▪ A proposição $\sim a \wedge b$ só é verdadeira quando $\sim a$ e b forem simultaneamente verdadeiras, o que não acontece.

▪ A proposição $a \vee b$ é falsa apenas quando a e b são ambas falsas, o que acontece.

▪ A implicação $a \Rightarrow \sim b$ é verdadeira uma vez que o antecedente, a, é falso.

Resposta: (C)

2.

▪ A proposição $\forall n \in \mathbb{N}$, $4n - 4 > 0$ é falsa, pois $1 \in \mathbb{N}$ e $4 \times 1 - 4 > 0$ é uma proposição falsa.

▪ A proposição $\forall x \in \mathbb{R}$, $x - 1 \leq 2x - 2$ é falsa, pois para $x = -2$, $-2 - 1 \leq 2 \times (-2) - 2 \Leftrightarrow -3 \leq -6$ é uma proposição falsa.

▪ A proposição $\exists x \in \mathbb{Z}$: $2(x-3) = 5$ é falsa, pois:

$$2(x-3) = 5 \Leftrightarrow 2x - 6 = 5 \Leftrightarrow 2x = 11 \Leftrightarrow x = \frac{11}{2} \notin \mathbb{Z}$$

▪ A proposição $\exists n \in \mathbb{N} : \sqrt[3]{n - 28} = -3$ é verdadeira, pois para $n = 1$ obtém-se uma proposição verdadeira.

Resposta: (D)

3. $A = \{x \in \mathbb{R} : -1 < 1 - x \leq 6\} = \{x \in \mathbb{R} : -1 - 1 < -x \leq 6 - 1\} = \{x \in \mathbb{R} : -2 < -x \leq 5\} =$

$= \{x \in \mathbb{R} : -5 \leq -x < 2\} = \{x \in \mathbb{R} : x \geq -5 \wedge x < 2\}$

Portanto, $\overline{A} = \{x \in \mathbb{R} : x < -5 \vee x \geq 2\}$.

Resposta: (A)

4. $$\frac{\left(a^{-1}\sqrt{b}\right)^3 \times \left(\sqrt{a^3 b^{-2}}\right)}{\sqrt{b\sqrt[4]{a^{-2}}}} = \frac{\left(a^{-1}b^{\frac{1}{2}}\right)^3 \times \left(a^3 b^{-2}\right)^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{\sqrt[4]{a^{-2}b^4}}} = \frac{a^{-3}b^{\frac{3}{2}} \times a^{\frac{3}{2}}b^{-1}}{\sqrt[8]{a^{-2}b^4}} = \frac{a^{-\frac{3}{2}}b^{\frac{1}{2}}}{\left(a^{-2}b^4\right)^{\frac{1}{8}}} =$$

$$\frac{a^{-\frac{3}{2}}b^{\frac{1}{2}}}{a^{-\frac{1}{4}}b^{\frac{1}{2}}} = \frac{a^{-\frac{3}{2}}}{a^{-\frac{1}{4}}} = a^{-\frac{3}{2}-\left(-\frac{1}{4}\right)} = a^{-\frac{5}{4}}$$

Resposta: (D)

Grupo II

1. $(\sim p \Rightarrow q) \wedge [\sim (p \wedge \sim q)] \wedge [(\sim p \Rightarrow \sim p) \wedge \sim q] \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (\sim p \vee q) \wedge [(p \vee \sim p) \wedge \sim q] \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow [q \vee (p \wedge \sim p)] \wedge [\mathrm{V} \wedge \sim q] \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow [q \vee \mathrm{F}] \wedge \sim q \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow q \wedge \sim q \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \mathrm{F}$

Portanto, a proposição dada é uma proposição falsa independentemente dos valores lógicos de p e de q.

2.

a	b	c	$a \vee \sim b$	$\sim b \wedge c$	$(\sim b \wedge c) \Rightarrow (a \vee \sim b)$
V	F	V	V	**V**	V
F	V	**F**	**F**	F	V
F	F	V	F	V	**F**

3.

- $4 + 2x^2 > 0 \Leftrightarrow 2x^2 > -4 \Leftrightarrow x^2 > -2$

Como $\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 \geq 0$, a condição $x^2 > -2$ é universal em $\mathbb{R}$, ou seja, $4 + 2x^2 > 0$ é uma condição universal em $\mathbb{R}$ e o seu conjunto-solução é $\mathbb{R}$.

- $x^2 + x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1 - 4 \times 3}}{2} \Leftrightarrow x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{-11}}{2}$. Como $\sqrt{-11} \notin \mathbb{R}$, a condição é impossível em $\mathbb{R}$, pelo que o seu conjunto-solução é $\varnothing$.

- $1 - 2x \geq -x - 2 \Leftrightarrow -2x + x \geq -2 - 1 \Leftrightarrow -x \geq -3 \Leftrightarrow x \leq 3$

A condição $1 - 2x \geq -x - 2$ é possível não universal em $\mathbb{R}$. O seu conjunto-solução é $]-\infty, 3]$.

4.1. A proposição p é falsa, pois basta substituir x por 0 e obtém-se uma proposição falsa.

Por outro lado, $-3 < n - 1 \leq 0 \Leftrightarrow -3 + 1 < n \leq 1 \Rightarrow -2 < n \leq 1$, logo a proposição q é verdadeira, já que substituindo n por 1 obtém-se uma proposição verdadeira.

4.2. $\sim p : \sim \left(\forall x \in \mathbb{R},\ |x| > 0\right) \Leftrightarrow \exists x \in \mathbb{R} : |x| \leq 0$

$\sim q : \sim \left(\exists n \in \mathbb{N},\ -3 < n - 1 \leq 0\right) \Leftrightarrow \sim \left(\exists n \in \mathbb{N} : n - 1 > -3 \wedge n - 1 \leq 0\right) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N},\ n - 1 \leq -3 \vee n - 1 > 0 \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N},\ n \leq -2 \vee n > 1$

5. $\dfrac{2\sqrt{3} \times \sqrt{18} + \sqrt[4]{36}}{\sqrt{24} - 2\sqrt{54}} = \dfrac{2\sqrt{3} \times 3\sqrt{2} + \sqrt[4]{6^2}}{2\sqrt{6} - 2 \times 3\sqrt{6}} = \dfrac{6\sqrt{6} + \sqrt[4:2]{6^{2:2}}}{2\sqrt{6} - 6\sqrt{6}} = \dfrac{6\sqrt{6} + \sqrt{6}}{-4\sqrt{6}} = -\dfrac{6\sqrt{6}}{4\sqrt{6}} - \dfrac{\sqrt{6}}{4\sqrt{6}} = -\dfrac{6}{4} - \dfrac{1}{4} = -\dfrac{7}{4}$

6.1.

a) $A = \left\{x \in \mathbb{R} : 9 - 3x > 0 \vee x - \sqrt[3]{125} > 0\right\} = \left\{x \in \mathbb{R} : 3x < 9 \vee x > \sqrt[3]{125}\right\} = \left\{x \in \mathbb{R} : x < 3 \vee x > 5\right\}$

Portanto, $\overline{A} = \left\{x \in \mathbb{R} : x \geq 3 \wedge x \leq 5\right\} = \left\{x \in \mathbb{R} : 3 \leq x \leq 5\right\} = [3,\ 5]$.

b) $B = \left\{x \in \mathbb{R} : 6 - x > 2\right\} = \left\{x \in \mathbb{R} : -x > 2 - 6\right\} = \left\{x \in \mathbb{R} : x < 4\right\} =]-\infty,\ 4[$

Assim, $B \setminus A = B \cap \overline{A} =]-\infty,\ 4[\cap [3,\ 5] = [3,\ 4[$.

c) $C = \left\{x \in \mathbb{R} : -12 < -3x \leq 6\right\} = \left\{x \in \mathbb{R} : 12 > 3x \geq -6\right\} = \left\{x \in \mathbb{R} : 4 > x \geq -2\right\} = [-2, 4[$

Assim:

$(A \cup C) \setminus \mathbb{R}_0^- = \left(\left(]-\infty,\ 3[\cup]5,\ +\infty[\right) \cup [-2,\ 4[\right) \setminus \mathbb{R}_0^- = \left(]-\infty,\ 4[\cup]5,\ +\infty[\right) \setminus \mathbb{R}_0^- =]0,\ 4[\cup]5,\ +\infty[$

6.2. Por **6.1.**, temos que $C =]-2,\ 4[$ e $\overline{A} = [3,\ 5]$.

Assim, um contraexemplo poderá ser -1 , pois $-1 \in C$ e $-1 \notin \overline{A}$.

7.1. Seja $A = \left\{n \in \mathbb{N} : a(n)\right\}$, então $A = \left\{1, 2, 3, 4, 6, 12\right\}$.

Assim, os elementos de A que são ímpares são o 1 e o 3. Portanto, $P = \left\{1, 3\right\}$.

7.2. Seja $D = \left\{n \in \mathbb{N} : d(n)\right\}$, então $D = \left\{1, 2, 3, 4, 5, 6\right\}$.

Assim, os elementos de D que são primos são o 2, o 3 e o 5. Portanto, $Q = \left\{2, 3, 5\right\}$.

8.1. A contrarrecíproca da implicação dada é:

$$\sim b(n) \Rightarrow \sim a(n)$$

Isto é, se n é par, então n^4 é múltiplo de 4.

8.2. Pretende-se provar que $\forall n \in \mathbb{N}$, $a(n) \Rightarrow b(n)$.

Seja n um número natural qualquer. Sabe-se que $a(n) \Rightarrow b(n) \Leftrightarrow \sim b(n) \Rightarrow \sim a(n)$.

Sendo n um número par, existe um número natural k tal que $n = 2k$.

Por outro lado, $n^4 = (2k)^4 = 16k^4 = 4 \times 4k^4$, pelo que existe um número natural p tal que $p = 4k^4$, ou seja, $n^4 = 4p$, portanto n^4 é múltiplo de 4.

Assim, demonstrou-se que $\forall n \in \mathbb{N}, \sim b(n) \Rightarrow \sim a(n)$, ou seja, $\forall n \in \mathbb{N}, a(n) \Rightarrow b(n)$.

9. A área do retângulo $[ABCD]$ é igual a $4 + 3\sqrt{2}$, pelo que $\overline{BC} \times \overline{AB} = 4 + 3\sqrt{2}$.

$$\overline{BC} \times \overline{AB} = 4 + 3\sqrt{2} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}+1}{3} \times \overline{AB} = 4 + 3\sqrt{2} \Leftrightarrow \overline{AB} = \frac{4+3\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{2}+1}{3}} \Leftrightarrow \overline{AB} = \frac{12+9\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \overline{AB} = \frac{(12+9\sqrt{2})(\sqrt{2}-1)}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)} \Leftrightarrow \overline{AB} = \frac{12\sqrt{2}-12+18-9\sqrt{2}}{(\sqrt{2})^2-1^2} \Leftrightarrow \overline{AB} = 3\sqrt{2}+6$$

Por outro lado, o perímetro P do retângulo $[ABCD]$ é dado por:

$$P = 2 \times \overline{AB} + 2 \times \overline{BC} = 2(3\sqrt{2}+6) + 2\left(\frac{\sqrt{2}+1}{3}\right) = 6\sqrt{2} + 12 + \frac{2\sqrt{2}}{3} + \frac{2}{3} = \frac{20\sqrt{2}+38}{3}$$

10. $$2^{-\frac{5}{2}} + 2^{-\frac{1}{2}} + 2^{-\frac{3}{2}} - 8^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2^{\frac{5}{2}}} + \frac{1}{2^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{2^{\frac{3}{2}}} - \sqrt{8} = \frac{1}{\sqrt{2^5}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2^3}} - 2\sqrt{2} = \frac{1}{4\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2\sqrt{2}} - 2\sqrt{2} =$$

$$= \frac{1}{4\sqrt{2}} + \frac{4}{4\sqrt{2}} + \frac{2}{4\sqrt{2}} - 2\sqrt{2} = \frac{7}{4\sqrt{2}} - 2\sqrt{2} = \frac{7\sqrt{2}}{8} - 2\sqrt{2} = \frac{7\sqrt{2}}{8} - \frac{16\sqrt{2}}{8} = -\frac{9\sqrt{2}}{8}$$