	Cotações															
	1.ª Parte					2.ª Parte										
Questões	**1.**	**2.**	**3.**	**4.**	**5.**	**1.1. a)**	**1.1. b)**	**1.2.**	**2.**	**3.1.**	**3.2.**	**3.3.**	**4.1.**	**4.2.**	**5.1.**	**5.2.**
Cotações	8	8	8	8	8	12	12	20	20	10	12	20	12	15	12	15

1.ª Parte

1. $A(x, y, z)$ tal que $x<0 \wedge y<0 \wedge z>0 \wedge x^2+(y+1)^2+z^2 \leq 4$.

Opção (D)

2. $\vec{u}(3,-8,1)$, $A(3,0,-6)$ e $B(x, y, z)$

$\overrightarrow{AB}=B-A=(x-3, y, z+6)$

$$\vec{u}=\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \begin{cases} x-3=3 \\ y=-8 \\ z+6=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=6 \\ y=-8 \\ z=-5 \end{cases}$$

O ponto B tem coordenadas $(6,-8,-5)$.

Opção (C)

3. Uma equação da reta r: $x=-2$

O ponto $P(3k-4, 8k+2)$ pertence à reta r se e só se $3k-4=-2$, ou seja, $k=\frac{2}{3}$.

Opção (D)

4. $f(x)=-10 \Leftrightarrow \frac{1-3x}{2}=-10 \Leftrightarrow x=7$

$f^{-1}(-10)=7$

Opção (A)

5. $f(x)=(2+k)x-5$

A função f é decrescente se e só se $2+k<0$, ou seja, $k<-2$.

Opção (B)

2.ª Parte

1.1. a) $A\left(\frac{1}{2},3\right)$

O ponto A pertence à reta r se e só se existe $k \in \mathbb{R}$ tal que:

$$\begin{cases} \frac{1}{2} = -1+3k \\ 3 = 5-4k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = \frac{1}{2} \\ k = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Como existe $k = \frac{1}{2}$, conclui-se que A pertence à reta r.

1.1. b) Das equações paramétricas da reta r identifica-se o vetor $\vec{v}(3,-4)$ como sendo um vetor diretor da reta r. O declive da reta r é igual a $-\frac{4}{3}$.

A reta s pode ser representada pela seguinte equação na forma reduzida: $y = -\frac{4}{3}x + 8$, sendo o declive $-\frac{4}{3}$. Como as retas r e s têm igual declive, conclui-se que são paralelas.

1.2. s: $y = -\frac{4}{3}x + 8$

A interseção da reta s com o eixo Ox é o ponto $A(x,0)$ tal que $0 = -\frac{4}{3}x + 8$, ou seja, $x = 6$.

Assim, tem-se $A(6,0)$.

A interseção da reta s com o eixo Oy é o ponto $B(0,y)$, sendo y a ordenada na origem da reta s, ou seja, 8. Assim, tem-se $B(0,8)$.

O perímetro do triângulo $[OBC]$ é dado por: $\overline{OB} + \overline{OA} + \overline{AB}$.

$\overline{OB} = 8$, $\overline{OA} = 6$ e $\overline{AB} = \sqrt{(6-0)^2 + (0-8)^2} = \sqrt{36+64} = 10$

Assim, tem-se $\overline{OB} + \overline{OA} + \overline{AB} = 8+6+10 = 24$.

O perímetro do triângulo $[OBC]$ é igual a 24 (unidades de comprimento).

2. Uma equação vetorial da reta r:

$$(x,y,z) = (-2,3,-1) + k(-1,2-,3)\ , k \in \mathbb{R}$$

O ponto P tem coordenadas $(x,y,2)$ e pertence à reta r.

Assim, tem-se:

$$(x,y,2) = (-2,3,-1) + k(-1,2,-3),\ k \in \mathbb{R}$$

Daqui resulta que:

$$\begin{cases} x=-2-k \\ y=3+2k \\ 2=-3k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2+\dfrac{2}{3} \\ y=3-\dfrac{4}{3} \\ k=-\dfrac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-\dfrac{4}{3} \\ y=\dfrac{5}{3} \\ k=-\dfrac{2}{3} \end{cases}$$

O ponto P tem coordenadas $\left(-\frac{4}{3},\frac{5}{3},2\right)$.

3.1. $D'_f=\{f(-1),f(0),f(1),f(2),f(3)\}$

$f(-1)=2$, $f(0)=0$, $f(1)=3$, $f(2)=2$, $f(3)=6$

$D'_f=\{0,2,3,6\}$

3.2. A proposição $\forall x_1,x_2\in A,\quad x_1\neq x_2 \Rightarrow f(x_1)\neq f(x_2)$ é falsa.

Basta observar que a função f é não injetiva. Pois, $-1\neq 2$ e $f(-1)=f(2)=2$.

3.3. $g(x)=-\frac{2x}{3}+2$

A reta r pode ser definida pela equação $y=-\frac{2x}{3}+2$.

O ponto A tem coordenadas $(x,0)$ e $0=-\frac{2x}{3}+2$, ou seja, $x=3$. Assim, o ponto A tem coordenadas $(3,0)$. O ponto B tem coordenadas $(0,2)$, atendendo a que 2 é a ordenada na origem da equação reduzida da reta r .

O ponto C, centro da circunferência, é o ponto médio de $[AB]$. Assim, tem-se $C\left(\frac{3+0}{2},\frac{0+2}{2}\right)$, ou seja, $C\left(\frac{3}{2},1\right)$.

O raio da circunferência é igual a $\frac{\overline{AB}}{2}$. Como $\overline{AB}=\sqrt{(3-0)^2+(0-2)^2}=\sqrt{13}$, o raio é igual $\frac{\sqrt{13}}{2}$.

A região colorida representada na figura pode ser definida pela condição:

$$y\geq -\frac{2x}{3}+2 \wedge \left(x-\frac{3}{2}\right)^2+(y-1)^2\leq \frac{13}{4}$$

4. $f(x)=3x-1$ e $g(x)=\frac{x}{2}+1$

4.1. $f\circ g(4)=f(g(4))=f(3)=8$

Assim, tem-se: $f\circ g(4)=8$.

4.2. $A=\{x: \ f(x)>0\}$ e $B=\{x: \ g(x)\leq 0\}$.

$f(x)>0 \Leftrightarrow 3x-1>0 \Leftrightarrow x>\dfrac{1}{3}$ $\qquad A=\left]\dfrac{1}{3},+\infty\right[$

$g(x)\leq 0 \Leftrightarrow \dfrac{x}{2}+1\leq 0 \Leftrightarrow x+2\leq 0 \Leftrightarrow x\leq -2$ $\qquad B=\left]-\infty,-2\right]$

Então, $A\cup B=\left]-\infty,-2\right]\cup\left]\dfrac{1}{3},+\infty\right[$. Daqui resulta que $\overline{A\cup B}=\left]-2,\dfrac{1}{3}\right]$.

5.1. $V(0,x,2x+1)$

Sendo a pirâmide quadrangular regular, a projeção ortogonal do vértice V sobre o plano xOy é o ponto de coordenadas $(0,x,0)$, centro do quadrado $[ABCD]$.

Coordenadas dos vértices da base da pirâmide:

$A(x,0,0)$, $B(x,2x,0)$, $C(-x,2x,0)$ e $D(-x,0,0)$

5.2. Área da base da pirâmide, em função de x, é dada por $(2x)^2$, ou seja, $4x^2$.

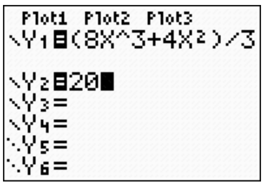
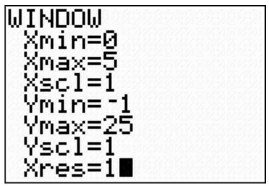
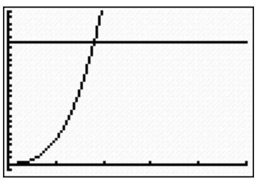
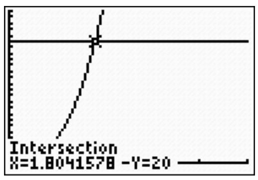
Altura da pirâmide, em função de x, é igual à cota do vértice V, ou seja, $2x+1$.

Volume da pirâmide, em função de x, é igual a $\dfrac{1}{3}\times(4x^2)(2x+1)$, ou seja, $\dfrac{8x^3+4x^2}{3}$.

Pretende-se determinar x, de modo que $\dfrac{8x^3+4x^2}{3}=20$.

Recorrendo à calculadora, pode-se obter o valor pretendido procedendo tal como é sugerido a seguir.

Resolver graficamente a equação $\dfrac{8x^3+4x^2}{3}=20$.

<table>
<tr><td>1. Definir funções.</td><td>
</td><td>2. Escolher a janela de visualização adequada.</td><td>
</td></tr>
<tr><td>3. Visualizar as representações gráficas.</td><td></td><td>4. Identificar o ponto de interseção dos gráficos e obter respetivas coordenadas.</td><td>
</td></tr>
</table>

O valor de x arredondado às décimas é 1,8.

Assim, as coordenadas do vértice V são $(0;\ 1,8;\ 4,6)$.

Nota: a ordenada e a cota são valores não exatos.

FIM