SÍNTESE

1. Revisões

Dados dois conjuntos A e B, uma **função** de A em B é uma correspondência que a cada elemento de A faz corresponder um e um só elemento de B.

Duas funções f e g são **iguais** se e somente se:

- $D_f = D_g$;
- têm o mesmo conjunto de chegada;
- $\forall\, x \in D_f,\ f(x) = g(x)$.

2. Generalidades acerca de funções

Produto cartesiano de *A* por *B*: $A \times B = \{(a, b): a \in A \wedge b \in B\}$

Um conjunto $G \subset A \times B$ é o **gráfico de uma função de *A* em *B*** quando e apenas quando para todo o $a \in A$ existir um e somente um elemento $b \in B$ tal que $(a, b) \in G$.

Sejam A e B conjuntos, $f: A \longrightarrow B$ uma função e C um conjunto qualquer.
Chama-se **restrição de *f* a *C*** à função $f|_C: C \cap A \longrightarrow B$ tal que $\forall\, x \in C \cap A,\ f|_C(x) = f(x)$.

A função $f: A \longrightarrow B$ diz-se **injetiva** se, para todos os x_1 e x_2 pertencentes a A, $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$.

A função $f: A \longrightarrow B$ diz-se **sobrejetiva** se e só se para todo o y pertencente a B existir um elemento x pertencente a A tal que $y = f(x)$.

A função f é sobrejetiva se e somente se o conjunto de chegada de f coincidir com o contradomínio de f.

Quando uma função é simultaneamente injetiva e sobrejetiva, diz-se **bijetiva**.

Sejam $f: D_f \longrightarrow A$ e $g: D_g \longrightarrow B$ duas funções. A função **composta de *g* com *f*** é a função $g \circ f: D_{g \circ f} \longrightarrow B$ tal que $D_{g \circ f} = \{x \in D_f: f(x) \in D_g\}$ e $\forall x \in D_{g \circ f},\ g \circ f(x) = g(f(x))$.

Sejam A e B conjuntos e $f: A \longrightarrow B$ uma função bijetiva.
Designa-se por **função inversa** de f a função $f^{-1}: B \longrightarrow A$ tal que $\forall\, y \in B,\ f^{-1}(y) = x_y$, sendo que x_y é o único elemento pertencente a A tal que $f(x_y) = y$.

Dado um plano munido de um referencial cartesiano e uma função bijetiva $f: A \longrightarrow B$ (onde $A \subset \mathbb{R}$ e $B \subset \mathbb{R}$), verifica-se que os gráficos cartesianos das funções f e f^{-1} são **simétricos em relação à reta de equação $y = x$**, isto é, são a imagem um do outro pela reflexão axial de eixo de equação $y = x$.

3. Generalidades acerca de funções reais de variável real

Uma **função real de variável real** é uma função cujo domínio e o conjunto de chegada estão contidos em $\mathbb{R}$.

Na **determinação de domínios** de funções reais de variável real definidas pela respetiva expressão analítica, deve ter-se sempre em atenção as seguintes situações:

- se a variável independente x se encontrar em denominador, é preciso garantir que o denominador é diferente de zero;
- se a variável independente x se encontrar no radicando de um radical com índice par, garantir que o radicando é maior ou igual a zero.

No caso de se ter as duas situações em simultâneo, terá de se considerar a conjunção das duas condições.

Chama-se **zero** de uma função f a todo o objeto cuja imagem é zero.

Uma função real de variável real f diz-se:

- **positiva** em $a \in D_f$ se $f(a) > 0$;
- **negativa** em $a \in D_f$ se $f(a) < 0$.

Uma função real de variável real f é diz-se:

- **par** se para todo o $x \in D_f$ se tem $-x \in D_f$ e $f(-x) = f(x)$;
- **ímpar** se para todo o $x \in D_f$ se tem $-x \in D_f$ e $f(-x) = -f(x)$.

Dado um plano munido de um referencial cartesiano e dada uma função f:

- f é **par** se e somente se o **eixo das ordenadas for eixo da simetria** do respetivo gráfico;
- f é **ímpar** se e somente se o **respetivo gráfico for simétrico relativamente à origem** O do referencial.

Para se estudar a **paridade de uma função**, devem seguir-se os seguintes passos:

1.º passo: Averiguar se o domínio obedece à seguinte condição: se um elemento pertence ao domínio, então o seu simétrico também pertence ($\forall x \in D_f, -x \in D_f$).

2.º passo: Determinar $f(-x)$ para $x \in D_f$.

3.º passo: Comparar a expressão obtida com a de $f(x)$ e a de $-f(x)$ e concluir de acordo com o esquema:

$$\text{Se } f(-x) = \begin{cases} f(x) \longrightarrow f \text{ é } \textbf{par} \\ -f(x) \longrightarrow f \text{ é } \textbf{ímpar} \end{cases}$$

Para provar que f **não é par** basta mostrar que existe um $a \in D_f$ tal que $f(a) \neq f(-a)$.

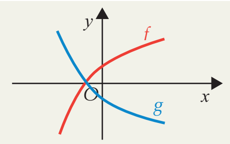
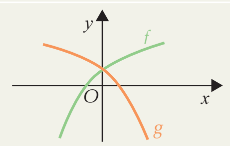
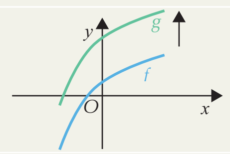
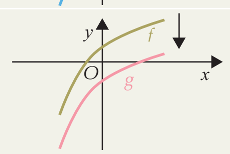
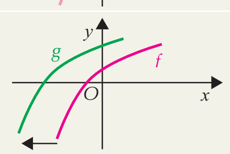
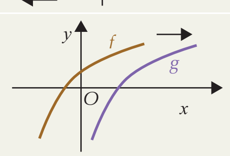
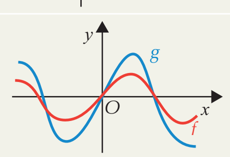
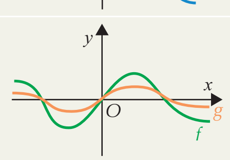
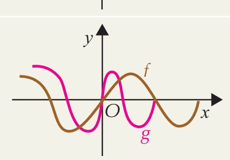
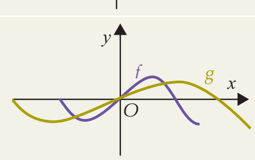
Para provar que f **não é ímpar** basta mostrar que existe um $a \in D_f$ tal que $f(-a) \neq -f(a)$.

SÍNTESE

Relação entre o gráfico de uma função f e os gráficos das funções $af(x)$, $f(bx)$, $f(x + c)$, $f(x) + d$, $-f(x)$ e $f(-x)$

Na tabela seguinte encontra-se um resumo dos efeitos que determinadas transformações têm na representação gráfica de uma dada função f.

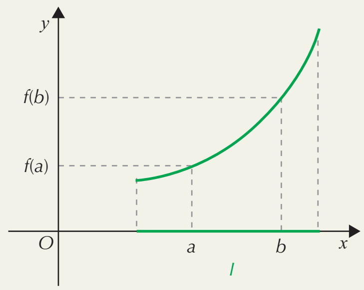
Seja $k \in \mathbb{R}^+$.

	Gráficos	Descrição do efeito sobre o gráfico de f
$g(x) = -f(x)$		Reflexão em relação ao eixo Ox.
$g(x) = f(-x)$		Reflexão em relação ao eixo Oy.
$g(x) = f(x) + k$		Translação associada ao vetor $(0, k)$. O gráfico desloca-se k unidades para cima.
$g(x) = f(x) - k$		Translação associada ao vetor $(0, -k)$. O gráfico desloca-se k unidades para baixo.
$g(x) = f(x + k)$		Translação associada ao vetor $(-k, 0)$. O gráfico desloca-se k unidades para a esquerda.
$g(x) = f(x - k)$		Translação associada ao vetor $(k, 0)$. O gráfico desloca-se k unidades para a direita.
$g(x) = k \times f(x)$ $k > 1$		Dilatação vertical de coeficiente k.
$g(x) = k \times f(x)$ $0 < k < 1$		Contração vertical de coeficiente k.
$g(x) = f(kx)$ $k > 1$		Contração horizontal de coeficiente $\frac{1}{k}$.
$g(x) = f(kx)$ $0 < k < 1$		Dilatação horizontal de coeficiente $\frac{1}{k}$.

4. Monotonia, extremos e concavidades

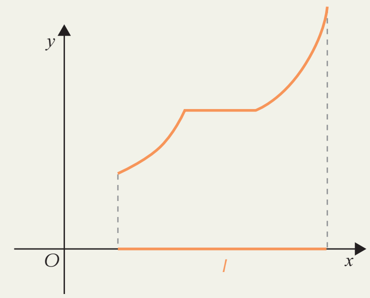
Uma **função real de variável real** é uma função cujo domínio e o conjunto de chegada estão contidos em $\mathbb{R}$.

Função estritamente crescente em *I*



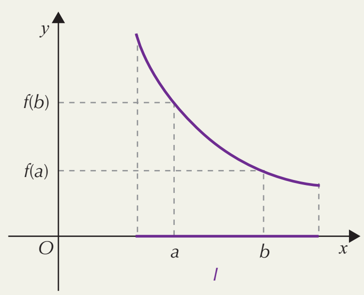
$\forall a, b \in I,\ a < b \Rightarrow f(a) < f(b)$

Função crescente, em sentido lato, em *I*



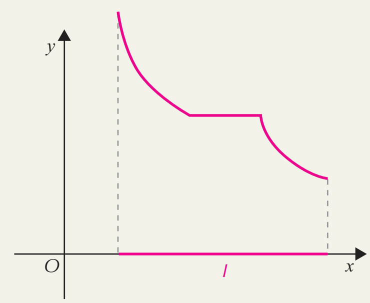
$\forall a, b \in I,\ a < b \Rightarrow f(a) \leq f(b)$

Função estritamente decrescente em *I*



$\forall a, b \in I,\ a < b \Rightarrow f(a) > f(b)$

Função decrescente, em sentido lato, em *I*



$\forall a, b \in I,\ a < b \Rightarrow f(a) \geq f(b)$

Dada uma função real de variável real f de domínio D_f, diz-se que:

- um número real M é um **majorante de *f*** quando $\forall x \in D_f,\ f(x) \leq M$; diz-se que ***f* é majorada** quando existir um majorante de f;
- um número real m é um **minorante de *f*** quando $\forall x \in D_f,\ f(x) \geq m$; diz-se que ***f* é minorada** quando existir um minorante de f.

Uma função simultaneamente majorada e minorada diz-se **limitada**.

Dada uma função real de variável real f e um valor $f(a)$ do contradomínio de f, diz-se que:

- $f(a)$ é um **máximo absoluto de *f*** se $\forall x \in D_f,\ f(a) \geq f(x)$.
- $f(a)$ é um **mínimo absoluto de *f*** se $\forall x \in D_f,\ f(a) \leq f(x)$.

Dada uma função real de variável real f, diz-se que:

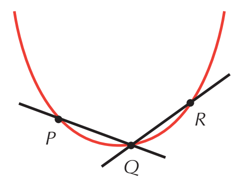
- f atinge um **máximo relativo** em $a \in D_f$ quando existe uma vizinhança r de a tal que $\forall x \in V_r(a) \cap D_f$, $f(a) \geq f(x)$;
- f atinge um **mínimo relativo** em $a \in D_f$ quando existe uma vizinhança r de a tal que $\forall x \in V_r(a) \cap D_f$, $f(a) \leq f(x)$.

SÍNTESE

Dada uma função real de variável real f e um intervalo $I \subset D_f$, diz-se que o gráfico de f tem:

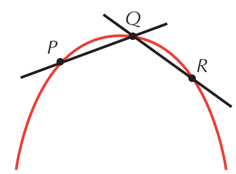
- a **concavidade (estritamente) voltada para cima em *I*** se dados quaisquer três pontos P, Q e R do gráfico, de abcissas em I tais que $x_P < x_Q < x_R$, o declive da reta PQ é inferior ao da reta QR;
- a **concavidade (estritamente) voltada para baixo em *I*** se dados quaisquer três pontos P, Q e R do gráfico, de abcissas em I tais que $x_P < x_Q < x_R$, o declive da reta PQ é superior ao da reta QR.

Concavidade voltada para cima



$m_{PQ} < m_{QR}$

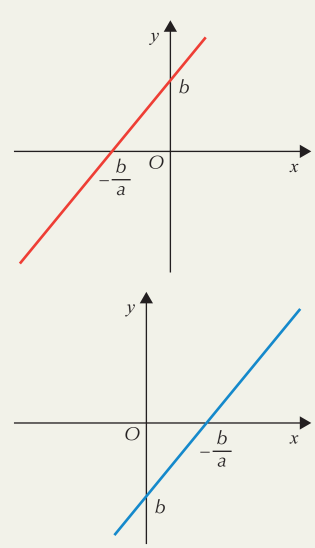
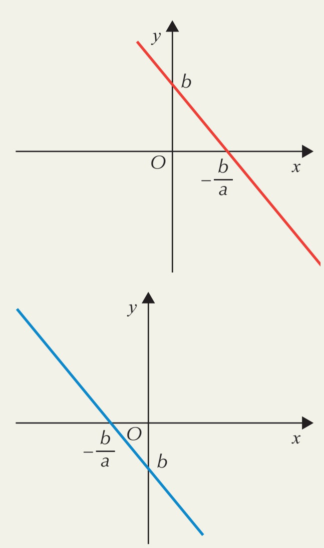
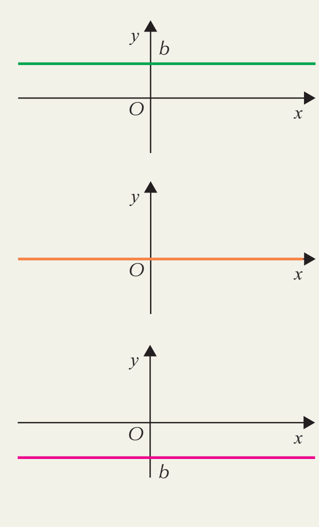
Concavidade voltada para baixo



$m_{PQ} > m_{QR}$

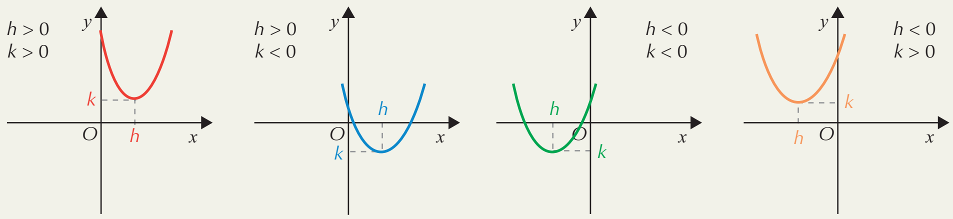
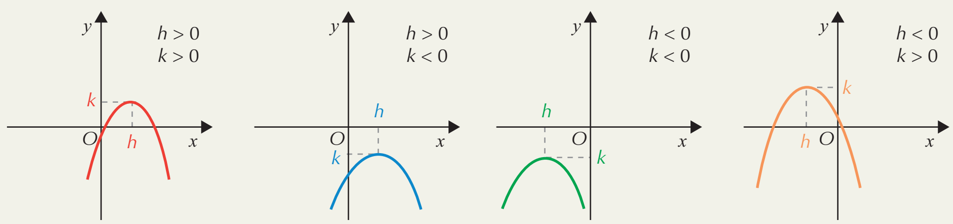
5. Estudo elementar de algumas funções

Funções afins

	$f(x) = ax + b$, com $a > 0$	$f(x) = ax + b$, com $a < 0$	$f(x) = b$
Domínio	$\mathbb{R}$		
Contradomínio	$\mathbb{R}$		$\{b\}$
Zeros	$-\dfrac{b}{a}$		$b \neq 0$, não tem zeros. $b = 0$, todos os números reais são zeros.
Monotonia	Estritamente crescente.	Estritamente decrescente.	Constante.
Sinal	Negativa em $\left]-\infty, -\dfrac{b}{a}\right[$ e positiva em $\left]-\dfrac{b}{a}, +\infty\right[$.	Positiva em $\left]-\infty, -\dfrac{b}{a}\right[$ e negativa em $\left]-\dfrac{b}{a}, +\infty\right[$.	$b > 0$, positiva em todo o seu domínio. $b < 0$, negativa em todo o seu domínio.
Representação gráfica			

Funções quadráticas

Uma **função quadrática** é uma função real de variável real definida por um polinómio do 2.º grau, $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $a, b, c \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$.

	$\boldsymbol{f(x) = a(x - h)^2 + k,\ a \neq 0}$
Representação gráfica	**$a > 0$**  **$a < 0$** 
Vértice	(h, k)
Eixo de simetria	$x = h$
Domínio	$\mathbb{R}$
Contradomínio	Se $a > 0$, $D' = [h, +\infty[$. Se $a < 0$, $D' =]-\infty, h]$.
Zeros	Se a e k têm o mesmo sinal, a função não tem zeros. Se a e k têm sinais diferentes, a função tem dois zeros: $h + \sqrt{-\frac{k}{a}}$ e $h - \sqrt{-\frac{k}{a}}$.
Monotonia	Se $a > 0$, f é estritamente decrescente em $]-\infty, h]$ e estritamente crescente em $[h, +\infty[$. Se $a < 0$, f é estritamente crescente em $]-\infty, h]$ e estritamente decrescente em $[h, +\infty[$.
Extremos	Se $a > 0$, a função f tem um mínimo absoluto k em h. Se $a < 0$, a função f tem um máximo absoluto k em h.
Sentido da concavidade do gráfico	Se $a > 0$, o gráfico tem a concavidade voltada para cima, em $\mathbb{R}$. Se $a < 0$, o gráfico tem a concavidade voltada para baixo, em $\mathbb{R}$.

SÍNTESE

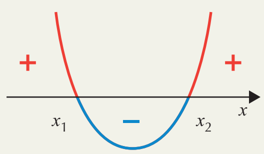
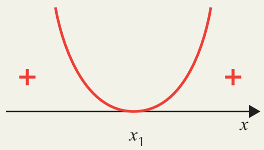
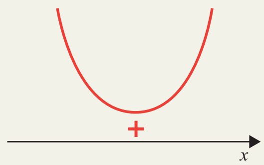
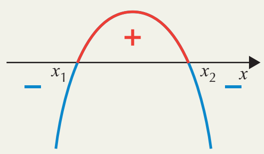
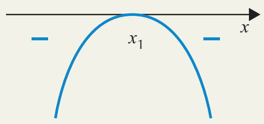
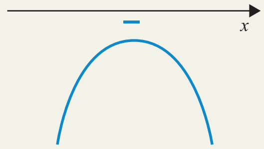
Métodos para determinar as coordenadas do vértice da parábola

1.º processo: Transformar a expressão analítica $ax^2 + bx + c$ na forma $a(x-h)^2 + k$, $a \neq 0$.

2.º processo: Utilizar a fórmula $V\left(-\frac{b}{2a}, f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)$.

3.º processo: Obter a abcissa do vértice como ponto médio de quaisquer dois objetos com a mesma imagem e calcular a respetiva imagem.

Sinal de uma função quadrática – inequações do 2.º grau

	Dois zeros: x_1, x_2	Um zero: x_1	Não tem zeros
$a > 0$			
$a < 0$			

Na **resolução de uma inequação de 2.º grau**, devem seguir-se os seguintes passos:

1.º passo: Transformar a inequação numa do tipo $ax^2 + bx + c < 0$, $ax^2 + bx + c > 0$, $ax^2 + bx + c \leq 0$ ou $ax^2 + bx + c \geq 0$.

2.º passo: Determinar os zeros de $x \longmapsto ax^2 + bx + c$.

3.º passo: Fazer um esboço da parábola (gráfico de $x \longmapsto ax^2 + bx + c$).

4.º passo: De acordo com o gráfico obtido no passo anterior, apresentar a condição que corresponde aos valores de x que são solução da inequação.

5.º passo: Apresentar o conjunto-solução.

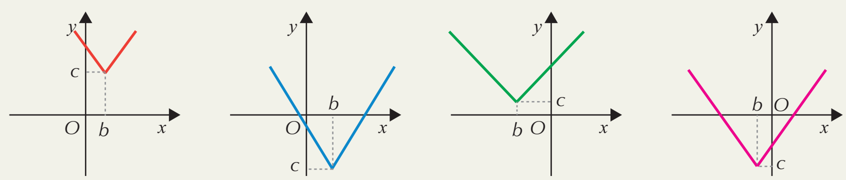
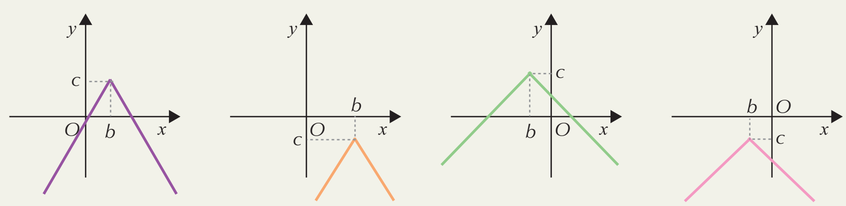
Funções definidas por ramos

Uma função f diz-se **definida por ramos** quando é definida por expressões analíticas diferentes em partes diferentes do seu domínio.

Função módulo

A **função módulo** é uma função de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ que a cada número real faz corresponder o seu valor absoluto.

Tem-se que $|x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$.

	$f(x) = a\lvert x-b\rvert + c,\ a, b, c \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$
Representação gráfica	$b > 0$, $c > 0$; $b > 0$, $c < 0$; $b < 0$, $c > 0$; $b < 0$, $c < 0$ **a > 0**  **a < 0** 
Domínio	$\mathbb{R}$
Contradomínio	Se $a > 0$, $D' = [c, +\infty[$. Se $a < 0$, $D' =]-\infty, c]$.
Zeros	Se a e c têm o mesmo sinal, a função não tem zeros. Se a e c têm sinais diferentes, a função tem dois zeros.
Monotonia	Se $a > 0$, f é estritamente decrescente em $]-\infty, b]$ e estritamente crescente em $[b, +\infty[$. Se $a < 0$, f é estritamente crescente em $]-\infty, b]$ e estritamente decrescente em $[b, +\infty[$.
Extremos	Se $a > 0$, f tem um mínimo absoluto c em b. Se $a < 0$, f tem um máximo absoluto c em b.

No geral, tem-se que:

$a > 0$	$\lvert x\rvert = a \Leftrightarrow x = a \ \vee \ x = -a$ $\Leftrightarrow x \in \{-a, a\}$	$\lvert x\rvert < a \Leftrightarrow x < a \ \wedge \ x > -a$ $\Leftrightarrow -a < x < a$ $\Leftrightarrow x \in]-a, a[$	$\lvert x\rvert > a \Leftrightarrow x > a \ \vee \ x < -a$ $\Leftrightarrow x \in]-\infty, -a[\cup]a, +\infty[$
$a = 0$	$\lvert x\rvert = 0 \Leftrightarrow x = 0$ $\Leftrightarrow x \in \{0\}$	$\lvert x\rvert < 0$ Condição impossível em $\mathbb{R}$.	$\lvert x\rvert > 0 \Leftrightarrow x > 0 \ \vee \ x < 0$ $\Leftrightarrow x \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$
$a < 0$	$\lvert x\rvert = a$ Condição impossível em $\mathbb{R}$.	$\lvert x\rvert < a$ Condição impossível em $\mathbb{R}$.	$\lvert x\rvert > a$ Condição universal em $\mathbb{R}$.

SÍNTESE

Estudo de algumas funções que envolvem radicais (quadráticos e cúbicos)

- **Função $y = \sqrt{x}$**

Se $f\colon \mathbb{R}_0^+ \longrightarrow \mathbb{R}_0^+$, então $f^{-1}\colon \mathbb{R}_0^+ \longrightarrow \mathbb{R}_0^+$.
$\quad x \longmapsto x^2 \qquad\qquad x \longmapsto \sqrt{x}$

A partir do gráfico da função $y = \sqrt{x}$, e aplicando as transformações geométricas do gráfico de uma função, pode obter-se o gráfico de qualquer função do tipo $y = a\sqrt{x-b} + c$ ($a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$).

- **Função $y = \sqrt[3]{x}$**

Se $g\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, então $g^{-1}\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$.
$\quad x \longmapsto x^3 \qquad\qquad x \longmapsto \sqrt[3]{x}$

A partir do gráfico da função $y = \sqrt{x}$, e aplicando as transformações geométricas do gráfico de uma função, pode obter-se o gráfico de qualquer função do tipo $y = a\sqrt[3]{x-b} + c$ ($a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$).

No geral, para resolver uma **equação que envolva radicais quadrados ou cúbicos**, podem seguir-se os seguintes passos:

1.º passo: Isolar um radical num dos membros da equação.

2.º passo: Elevar ao quadrado, ou ao cubo, ambos os membros da equação consoante se trate de uma equação que envolva radicais quadrados ou cúbicos.

3.º passo: Se a equação assim obtida ainda envolver radicais, repetir os passos anteriores.

4.º passo: No caso de envolver radicais quadrados, verificar se as soluções obtidas são também soluções da equação inicial.

Funções polinomiais

Uma **função polinomial** é uma função que pode ser definida analiticamente por um polinómio com uma só variável.

6. Operações algébricas com funções

Dadas duas funções $f\colon D_f \longrightarrow \mathbb{R}$ e $g\colon D_g \longrightarrow \mathbb{R}$:

- $f+g\colon D_{f+g} = D_f \cap D_g$ e $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$
- $f-g\colon D_{f-g} = D_f \cap D_g$ e $(f-g)(x) = f(x) - g(x)$
- $f\times g\colon D_{f\times g} = D_f \cap D_g$ e $(f\times g)(x) = f(x) \times g(x)$
- $\frac{f}{g}\colon D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap \{x \in D_g\colon g(x) \neq 0\}$ e $\frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$
- $\alpha f\colon D_{\alpha f} = D_f$ e $(\alpha f)(x) = \alpha f(x)$, sendo $\alpha \in \mathbb{R}$
- $f^r\colon D_{f^r} = \{x \in D_f\colon f(x) \geq 0\}$ se $r > 0$ ou $D_{f^r} = \{x \in D_f\colon f(x) \neq 0\}$ se $r \neq 0$ ou $D_{f^r} = \{x \in D_f\colon f(x) > 0\}$ se $r < 0$ e $f^r(x) = (f(x))^r$