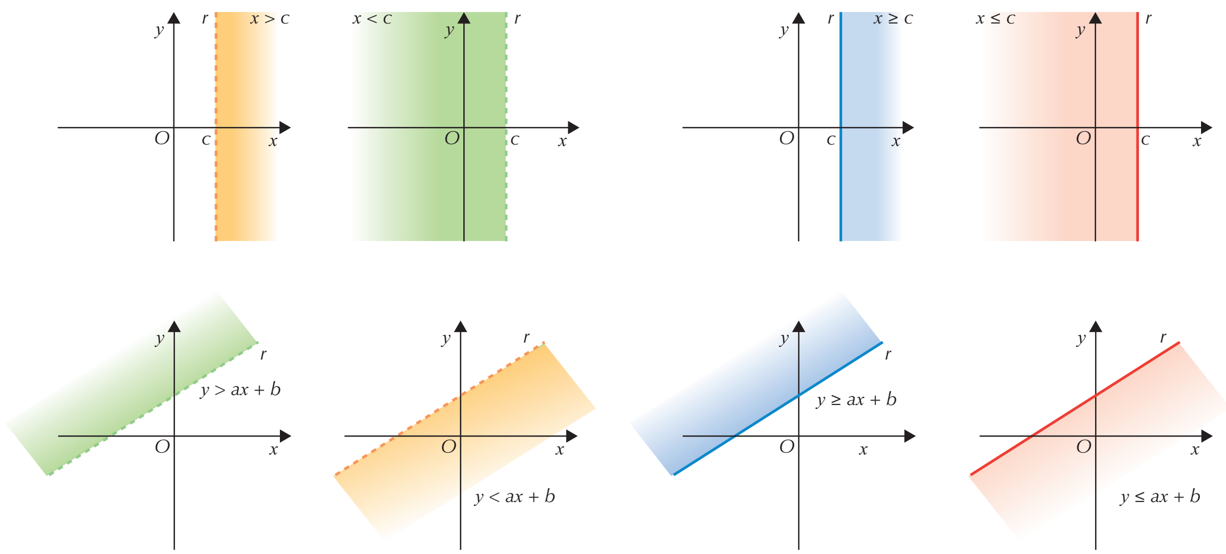
SÍNTESE

1. Geometria analítica no plano

Inequações cartesianas de semiplanos



Sejam $A(a_1, a_2)$ e $B(b_1, b_2)$ dois pontos do plano:

Distância entre A e B.	$\sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}$
Ponto médio do segmento de reta $[AB]$.	$\left(\frac{a_1 + b_1}{2}, \frac{a_2 + b_2}{2}\right)$
Mediatriz do segmento de reta $[AB]$.	$(x - a_1)^2 + (y - a_2)^2 = (x - b_1)^2 + (y - b_2)^2$
Circunferência de centro A e raio r.	$(x - a_1)^2 + (y - a_2)^2 = r^2$

Equação cartesiana da elipse de semieixo maior a e semieixo menor b: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

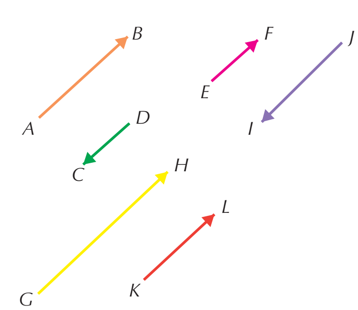
Distância focal: $2c$, onde $c = \sqrt{a^2 - b^2}$.

2. Cálculo vetorial no plano

Um vetor é definido por:

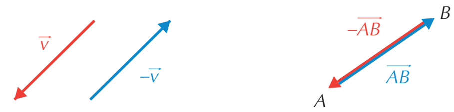
- um comprimento;
- uma direção;
- um sentido.

Vetores colineares são vetores que têm a mesma direção.

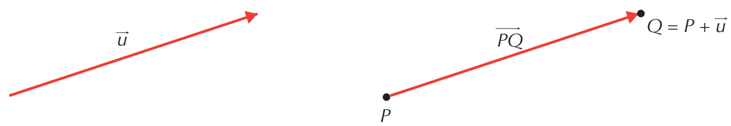


SÍNTESE

Vetores simétricos são vetores que têm a mesma direção, o mesmo comprimento e sentidos opostos.



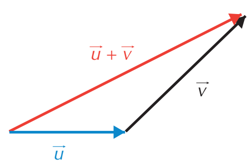
O ponto Q é a soma do ponto P com o vetor $\vec{u}$, e escreve-se $Q = P + \vec{u}$, quando dado um ponto P e um vetor $\vec{u}$, existe um único ponto Q tal que $\vec{u} = \overrightarrow{PQ}$.



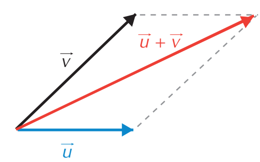
A **norma de um vetor** $\vec{v}$ é a medida do comprimento de um segmento orientado representante de $\vec{v}$ e representa-se por $||\vec{v}||$.

Adição de vetores

Regra do triângulo



Regra do paralelogramo
(só para vetores não colineares)



Propriedade comutativa: $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$, para quaisquer vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

Propriedade associativa: $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$, para quaisquer vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$.

Existência de elemento neutro: $\vec{u} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{u} = \vec{u}$, para qualquer vetor $\vec{u}$.

Existência de elemento simétrico para cada vetor: $\vec{u} + (-\vec{u}) = (-\vec{u}) + \vec{u} = \vec{0}$, para qualquer vetor $\vec{u}$.

Multiplicação de um vetor por um escalar

O produto de $\vec{v}$ por λ ($\lambda \neq 0$) é o vetor $\lambda\vec{v}$ com:

- a direção de $\vec{v}$;
- sentido de $\vec{v}$ se $\lambda > 0$ ou sentido contrário ao de $\vec{v}$ se $\lambda < 0$;
- norma igual a $|\lambda| \times ||\vec{v}||$.

Dado um vetor $\vec{v}$, não nulo, um vetor $\vec{u}$ **é colinear a** $\vec{v}$ se e somente se existir um número real λ tal que $\vec{u} = \lambda\vec{v}$ e, nesse caso, λ é único.

Sendo $\vec{u}$ e $\vec{v}$ dois vetores e λ e μ números reais:

Distributividade em relação à adição de números reais.	$(\lambda + \mu)\vec{v} = \lambda\vec{v} + \mu\vec{v}$
Distributividade em relação à adição de vetores.	$\lambda(\vec{u} + \vec{v}) = \lambda\vec{u} + \lambda\vec{v}$
Associatividade mista.	$\lambda(\mu\vec{v}) = (\lambda\mu)\vec{v}$

Fixado um plano munido de um referencial ortonormado de origem O e dado um ponto A, chama-se **vetor posição do ponto *A*** ao vetor $\overrightarrow{OA}$.

Sejam $\vec{u}(u_1, u_2)$ e $\vec{v}(v_1, v_2)$ dois vetores do plano e λ um número real:

- $\vec{u} = \vec{v} \Leftrightarrow u_1 = v_1 \ \wedge \ u_2 = v_2$
- $\vec{u} + \vec{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2)$
- $\vec{u} - \vec{v} = (u_1 - v_1, u_2 - v_2)$
- $\lambda\vec{u} = (\lambda u_1, \lambda u_2)$
- $-\vec{u} = (-u_1, -u_2)$

Sejam $\vec{u}(u_1, u_2)$ e $\vec{v}(v_1, v_2)$ dois vetores do plano, não nulos. $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são **colineares** se e somente se u_1, u_2, v_1, $v_2 \neq 0$ e $\frac{u_1}{v_1} = \frac{u_2}{v_2}$ ou as primeiras coordenadas de ambos forem nulas ou as segundas coordenadas de ambos forem nulas.

Dados os pontos $A(a_1, a_2)$ e $B(b_1, b_2)$ e um vetor $\vec{v}(v_1, v_2)$, tem-se:

- $\overrightarrow{AB} = B - A = (b_1 - a_1, b_2 - a_2)$
- $A + \vec{v} = (a_1 + v_1, a_2 + v_2)$
- $\|\vec{v}\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$

Um vetor $\vec{v}$, não nulo, **tem a direção da reta *r*** se as retas suporte dos representantes de $\vec{v}$ têm a direção de r.

Designa-se por **vetor diretor** de uma dada reta r qualquer vetor não nulo com a mesma direção de r.

Considera a reta que passa no ponto $A(a_1, a_2)$ e tem a direção do vetor $\vec{v}(v_1, v_2)$. Então:

Equação vetorial da reta

$(x, y) = (a_1, a_2) + k(v_1, v_2),\ k \in \mathbb{R}$

Sistema de equações paramétricas da reta

$$\begin{cases} x = a_1 + kv_1 \\ y = a_2 + kv_2 \end{cases},\ k \in \mathbb{R}$$

Equações cartesianas

$\frac{x - a_1}{v_1} = \frac{y - a_2}{v_2}$ se $v_1, v_2 \neq 0$

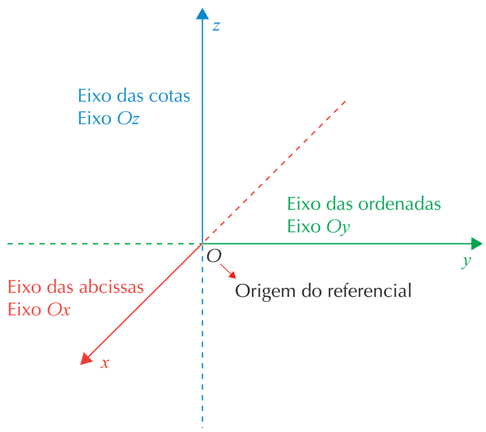
$y - a_2 = \frac{v_2}{v_1}(x - a_1)$ se $v_1 \neq 0$

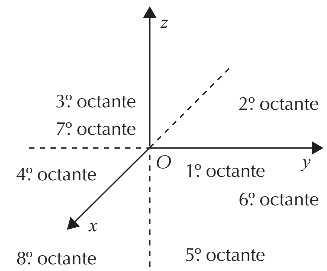
$y = mx + b \longrightarrow$ Equação reduzida da reta, onde $m = \frac{v_2}{v_1}$, se $v_1 \neq 0$, e b é a ordenada do ponto de interseção da reta com o eixo Oy.

SÍNTESE

3. Geometria analítica no espaço

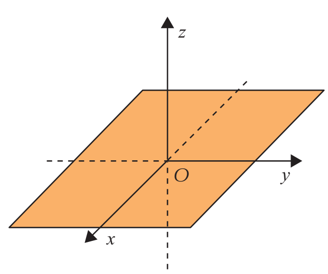
Referencial cartesiano *Oxyz*



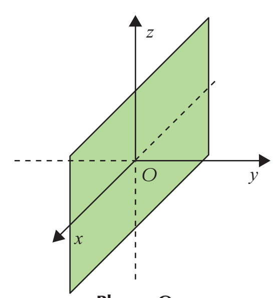


Os eixos ortogonais dividem o espaço em oito regiões: os **octantes**.

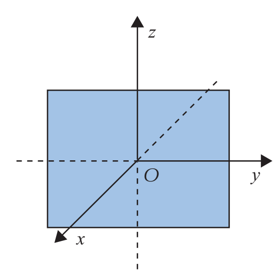
Dado um referencial ortonormado do espaço, a todo o ponto P está associado um e um só terno ordenado de números (a, b, c) a que chamamos **coordenadas**, sendo a a abcissa, b a ordenada e c a cota.



Plano xOy

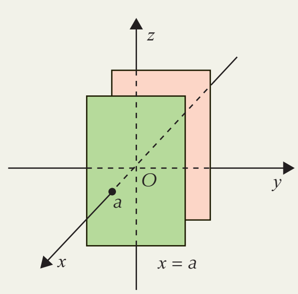
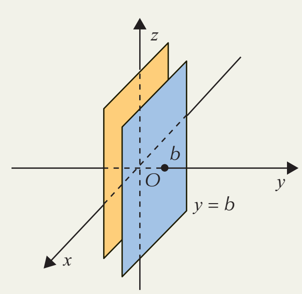
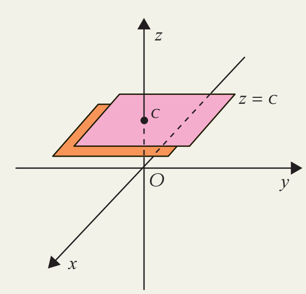


Plano xOz

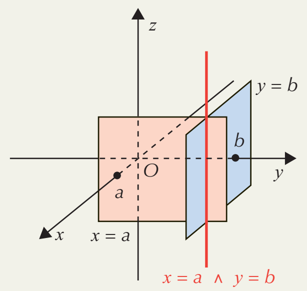
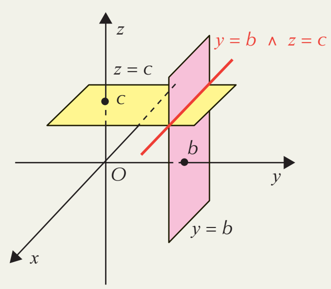
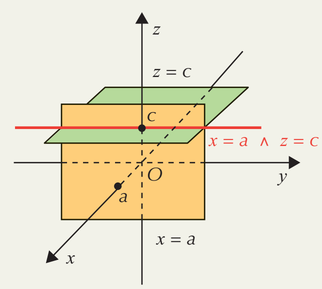


Plano yOz

Equações de planos paralelos aos planos coordenados

Condição: $x = a$, $a \in \mathbb{R}$	**Condição: $y = b$, $b \in \mathbb{R}$**	**Condição: $z = c$, $c \in \mathbb{R}$**
		
• Plano paralelo a yOz. • Passa pelo ponto $A(a, 0, 0)$. • Perpendicular ao eixo Ox.	• Plano paralelo a xOz. • Passa pelo ponto $B(0, b, 0)$. • Perpendicular ao eixo Oy.	• Plano paralelo a xOy. • Passa pelo ponto $C(0, 0, c)$. • Perpendicular ao eixo Oz.
Caso particular: $x = 0$ define o plano yOz.	Caso particular: $y = 0$ define o plano xOz.	Caso particular: $z = 0$ define o plano xOy.

Equações de retas paralelas aos eixos coordenados

Condição: $x = a \ \wedge \ y = b,\ a, b \in \mathbb{R}$	**Condição:** $y = b \ \wedge \ z = c,\ c, b \in \mathbb{R}$	**Condição:** $x = a \ \wedge \ z = c,\ a, c \in \mathbb{R}$
		
• Reta paralela a Oz e perpendicular ao plano xOy. • Interseta o plano xOy no ponto $(a, b, 0)$.	• Reta paralela a Ox e perpendicular ao plano yOz. • Interseta o plano yOz no ponto $(0, b, c)$.	• Reta paralela a Oy e perpendicular ao plano xOz. • Interseta o plano xOz no ponto $(a, 0, b)$.
Caso particular: $x = 0 \ \wedge \ y = 0$ define o eixo Oz.	Caso particular: $y = 0 \ \wedge \ z = 0$ define o eixo Ox.	Caso particular: $x = 0 \ \wedge \ z = 0$ define o eixo Oy.

Sejam $A(a_1, a_2, a_3)$ e $B(b_1, b_2, b_3)$ dois pontos do espaço:

Distância entre A e B.	$\sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2}$
Ponto médio do segmento de reta $[AB]$.	$\left(\frac{a_1 + b_1}{2}, \frac{a_2 + b_2}{2}, \frac{a_3 + b_3}{2}\right)$
Plano mediador do segmento de reta $[AB]$.	$(x - a_1)^2 + (y - a_2)^2 + (z - a_3)^2 = (x - b_1)^2 + (y - b_2)^2 + (z - b_3)^2$
Superfície esférica de centro A e raio r.	$(x - a_1)^2 + (y - a_2)^2 + (z - a_3)^2 = r^2$

4. Cálculo vetorial no espaço

Dois segmentos orientados do espaço dizem-se **equipolentes** quando são complanares e equipolentes num plano que os contenha.

No espaço, segmentos orientados equipolentes determinam o **mesmo vetor**.

Depois de definirmos um vetor no espaço, estendem-se do plano ao espaço as definições de **norma de um vetor** (fixada uma unidade de comprimento), de **adição de um ponto com um vetor**, de **translação de um dado vetor** e as operações de **subtração de dois pontos**, de **adição** e **subtração de vetores**, de **multiplicação de um vetor por um escalar** e as respetivas propriedades geométricas e algébricas.

Consideremos a reta que passa no ponto $A(a_1, a_2, a_3)$ e tem a direção do vetor $\vec{v}(v_1, v_2, v_3)$. Então:

Equação vetorial da reta

$(x, y, z) = (a_1, a_2, a_3) + k(v_1, v_2, v_3),\ k \in \mathbb{R}$

Sistema de equações paramétricas da reta

$$\begin{cases} x = a_1 + kv_1 \\ y = a_2 + kv_2 \\ z = a_3 + kv_3 \end{cases},\ k \in \mathbb{R}$$