SÍNTESE

1. Radicais

- Se a é um número real e $n \in \mathbb{N}$ **ímpar**, então existe um único número real b tal que $b^n = a$.
- Se a um número real positivo e $n \in \mathbb{N}$ **par**, então existe um único número real positivo b tal que $b^n = a$. Esse número chama-se **raiz índice *n* de *a*** e representa-se por $\sqrt[n]{a}$.

O número de soluções reais da equaçao $x^n = a$ é dado pelo seguinte esquema:

n é par $\longrightarrow$ $a < 0$ $\longrightarrow$ zero soluções

n é par $\longrightarrow$ $a = 0$ $\longrightarrow$ uma solução: $x = 0$

n é par $\longrightarrow$ $a > 0$ $\longrightarrow$ duas soluções simétricas: $x = \sqrt[n]{a}$ e $x = -\sqrt[n]{a}$

n é ímpar $\longrightarrow$ uma solução, com o mesmo sinal de a: $x = \sqrt[n]{a}$

Nas operações com radicais devem ser tidas em conta as seguintes propriedades (considerem-se os valores de a, b, n e m para os quais as expressões seguintes têm significado):

Operações	Regras operatórias
Distributividade da multiplicação relativamente à adição	$a\sqrt[n]{b} \pm c\sqrt[n]{b} = (a \pm c)\sqrt[n]{b}$
Multiplicação	$\sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \times b}$
Potenciação	• $\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$ • Se $a \neq 0$, $\left(\sqrt[n]{a}\right)^{-m} = \sqrt[n]{a^{-m}}$ • $\sqrt[n]{a^n} = a$, se n é ímpar • $\sqrt[n]{a^n} = \lvert a \rvert$, se n é par
Divisão	Se $b \neq 0$, $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$
Radiciação	$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[nm]{a}$

Propriedade

$\sqrt[n]{a} = \sqrt[n \times k]{a^k}$, onde $n, k \in \mathbb{N}$ e $a \in \mathbb{R}_0^+$ ou $n, k \in \mathbb{N}$, n, k são ímpares e $a \in \mathbb{R}$.

SÍNTESE

Para **extrair fatores para fora de um radical**, devem seguir-se os seguintes passos:

1.º passo: Decompor o radicando num produto de fatores primos.

2.º passo: Caso se trate de uma raiz quadrada, agrupar os fatores comuns aos pares; caso se trate de uma raiz cúbica, agrupar os fatores comuns aos ternos, …

3.º passo: Aplicar a propriedade da multiplicação de radicais $\sqrt[n]{a \times b} = \sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b}$.

4.º passo: Aplicar a propriedade:

- $\sqrt[n]{a^n} = a$ se n é ímpar e $a > 0$
- $\sqrt[n]{a^n} = |a|$ se n é par

Racionalização de denominadores
Caso 1: denominador do tipo $\sqrt{a}$, $a \in \mathbb{N}$ Multiplicar o numerador e o denominador da fração pelo radical $\sqrt{a}$, com o objetivo de se obter uma fração equivalente com $(\sqrt{a})^2$ no denominador.
Caso 2: denominador do tipo $\sqrt[n]{a^p}$, $a \in \mathbb{N}$, $n > 1$, $n > p$ Multiplicar o numerador e o denominador da fração pelo radical $\sqrt[n]{a^{n-p}}$, de forma a obter-se uma fração equivalente com $\sqrt[n]{a^n}$ em denominador.
Caso 3: denominador do tipo $a\sqrt{b} \pm c\sqrt{d}$, $a, c \in \mathbb{Z}$, $b, d \in \mathbb{N}$ Multiplicar o numerador e o denominador da fração pelo conjugado da expressão no denominador $a\sqrt{b} \mp c\sqrt{d}$, respetivamente, de forma a obter-se o caso notável "diferença de quadrados".

2. Potências de expoente racional

Se $a \in \mathbb{R}$, $\frac{m}{n} \in \mathbb{Q}_0^+$ ($m, n \in \mathbb{Z}$, $m \geq 0$ e $n \geq 2$), então $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$.

Se $a \in \mathbb{R}^+$ e $q \in \mathbb{Q}^+$, então $a^{-q} = \frac{1}{a^q}$.

Propriedades

Se $q, r \in \mathbb{Q}$ e $a, b \in \mathbb{R}^+$, tem-se que:

- $a^q \times a^r = a^{q+r}$
- $a^q \times b^q = (a \times b)^q$
- $a^q \div a^r = a^{q-r}$
- $a^q \div b^q = (a \div b)^q$
- $(a^q)^r = a^{q \times r}$

3. Divisão inteira de polinómios

Dados dois polinómios $A(x)$ e $B(x)$, com $B(x) \neq 0$, existem **dois polinómios únicos** $Q(x)$ e $R(x)$ tais que $A(x) = B(x) \times Q(x) + R(x)$ e $R(x)$ ou é o polinómio nulo ou tem grau inferior ao grau de $B(x)$.

$A(x)$: polinómio dividendo
$B(x)$: polinómio divisor
$Q(x)$: polinómio quociente
$R(x)$: polinómio resto

Diz-se que **$A(x)$ é divisível por $B(x)$** se e só se o resto da divisão de $A(x)$ por $B(x)$ é zero.

Teorema do Resto

Dado um polinómio $P(x)$ e um número $a \in \mathbb{R}$, o resto da divisão inteira de $P(x)$ por $x - a$ é igual a $P(a)$.

Um número real a diz-se **raiz ou zero** de um polinómio $P(x)$ se $P(a) = 0$.

A **multiplicidade de uma raiz a** é o maior número natural n para o qual se tem $P(x) = (x - a)^n\, Q(x)$.

Dado um polinómio $P(x)$ de coeficientes inteiros, o respetivo termo de grau zero é múltiplo inteiro de qualquer raiz inteira desse polinómio.

Dado um polinómio $P(x)$ de grau $n \in \mathbb{N}$, cujas raízes distintas $x_1, x_2, \ldots, x_k$ têm multiplicidade $n_1, n_2, \ldots, n_k$, respetivamente, existe um polinómio $Q(x)$, sem raízes, tal que $P(x) = (x - x_1)^{n_1} \times (x - x_2)^{n_2} \times \cdots \times (x - x_k)^{n_k}\, Q(x)$.

Dado um polinómio $P(x)$ de segundo grau, com a como coeficiente do termo de grau 2:

- se $P(x)$ tem **duas raízes distintas** x_1 e x_2, então $P(x) = a(x - x_1) \times (x - x_2)$;
- se $P(x)$ **tem uma raiz x_1 com multiplicidade 2**, então $P(x) = a(x - x_1)^2$.

Para **decompor um polinómio $P(x)$ de 3.º grau em fatores**, basta:

- conhecer uma raiz a do polinómio;
- efetuar a divisão inteira do polinómio por $x - a$;
- decompor o polinómio em $P(x) = (x - a)Q(x)$, sendo $Q(x)$ um polinómio de grau 2;
- se possível, determinar as raízes de $Q(x)$ e decompô-lo

Pode **decompor-se um polinómio $P(x)$ de grau superior ao terceiro em fatores**, se:

- conhecermos um número suficiente de raízes do polinómio que permita sucessivamente decompor o polinómio em fatores de grau 1 e de grau 2;
- determinarmos as soluções, caso existam, do(s) polinómio(s) de grau 2 e correspondente fatorização.

SÍNTESE

Na resolução de uma **equação de grau superior a dois**, devem seguir-se os seguintes passos:

1.º passo: Escrever a equação na forma $P(x) = 0$.

2.º passo: Decompor $P(x)$ em fatores de grau 1 e/ou grau 2.

3.º passo: Aplicar a lei do anulamento do produto.

4.º passo: Resolver as equações de grau 1 e/ou grau 2 obtidas.

5.º passo: Apresentar o conjunto-solução.

Na resolução de uma **inequação polinomial de grau superior ao segundo**, devem seguir-se os seguintes passos:

1.º passo: Transformar a equação numa do tipo $P(x) < 0$, $P(x) > 0$, $P(x) \leq 0$ ou $P(x) \geq 0$.

2.º passo: Decompor $P(x)$ em fatores de 1.º grau e/ou 2.º grau.

3.º passo: Estudar num quadro o sinal de cada fator.

4.º passo: De acordo com o estudo feito no passo anterior, apresentar a condição que corresponde aos valores de x que são solução da inequação.

5.º passo: Apresentar o conjunto-solução.