TESTE N.º 5 – Proposta de resolução

Grupo I

1. **Opção (A)**

   Como a proposição $((p \Rightarrow q) \Rightarrow (q \Rightarrow r)) \Rightarrow (p \vee q \Rightarrow r)$ é falsa, então $(p \Rightarrow q) \Rightarrow (q \Rightarrow r)$ é verdadeira e $p \vee q \Rightarrow r$ é falsa.

   Para que $p \vee q \Rightarrow r$ seja falsa, tem-se que $p \vee q$ é verdadeira e r é falsa. Como $p \vee q$ é verdadeira, então p e q são ambas verdadeiras ou apenas p é verdadeira ou apenas q é verdadeira.

   Se p e q são ambas verdadeiras ou se apenas q é verdadeira, então $p \Rightarrow q$ é verdadeira e $q \Rightarrow r$ é falsa, pelo que $(p \Rightarrow q) \Rightarrow (q \Rightarrow r)$ é falsa.

   Se apenas p é verdadeira, então $p \Rightarrow q$ é falsa e $q \Rightarrow r$ é verdadeira, pelo que $(p \Rightarrow q) \Rightarrow (q \Rightarrow r)$ é verdadeira.

   Assim, p é verdadeira, q é falsa e r é falsa.

2. **Opção (C)**

   $\overrightarrow{DF} - \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{DF} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{DF} + \overrightarrow{FI} = \overrightarrow{DI}$

   $G - \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{HF} = G + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{HF} = G + \overrightarrow{GH} + \overrightarrow{HF} = H + \overrightarrow{HF} = F$

   $D + 2\overrightarrow{GH} + \overrightarrow{ID} = D + \overrightarrow{DF} + \overrightarrow{ID} = F + \overrightarrow{FA} = A$

   $E + \overrightarrow{DE} - 2\overrightarrow{EC} = E + \overrightarrow{EF} + 2\overrightarrow{CE} = F + \overrightarrow{FI} = I$

3. **Opção (D)**

   $$\begin{aligned} V = 24\sqrt{3} &\Leftrightarrow a^3 = 24\sqrt{3} \\ &\Leftrightarrow a = \sqrt[3]{24\sqrt{3}} \\ &\Leftrightarrow a = 2\sqrt[3]{3\sqrt{3}} \\ &\Leftrightarrow a = 2\sqrt[3]{\sqrt{3^3}} \\ &\Leftrightarrow a = 2\sqrt[6]{3^3} \\ &\Leftrightarrow a = 2\sqrt{3} \text{ u.c. (medida da aresta do cubo)} \end{aligned}$$

   Assim, o centro da esfera é o ponto P de coordenadas $(\sqrt{3}, \sqrt{3}, \sqrt{3})$ e o seu raio é:

   $\|\overrightarrow{OP}\| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (\sqrt{3})^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{3+3+3} = \sqrt{9} = 3$ u.c.

   Logo, a esfera que contém todos os vértices do cubo é definida por:

   $(x - \sqrt{3})^2 + (y - \sqrt{3})^2 + (z - \sqrt{3})^2 \leq 9$

4. **Opção (D)**

Os gráficos II e III são gráficos de funções, ao passo que os gráficos I e IV não. Com efeito, nos gráficos II e III, a todo o número real corresponde um único número real, enquanto nos restantes gráficos há pelo menos um número real ao qual correspondem pelo menos dois números reais.

5. **Opção (C)**

Uma vez que f é ímpar, tem três zeros e $f(1) = 0$.

Então, o conjunto dos zeros de f é {−1, 0, 1}. O gráfico da função g obtém-se do gráfico da função f por uma translação associada ao vetor (1, 0), seguida de uma dilatação vertical de coeficiente 2. Então, os zeros de g são {0, 1, 2}.

Grupo II

1. $P(x) = a(x^2+1)(x-2)$

$$P\left(1+\sqrt{2}\right) = -2\sqrt{2} \Leftrightarrow a\left(\left(1+\sqrt{2}\right)^2+1\right)\left(1+\sqrt{2}-2\right) = -2\sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow a\left(1+2\sqrt{2}+2+1\right)\left(-1+\sqrt{2}\right) = -2\sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow a\left(4+2\sqrt{2}\right)\left(-1+\sqrt{2}\right) = -2\sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow a\left(-4+4\sqrt{2}-2\sqrt{2}+4\right) = -2\sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow a \times 2\sqrt{2} = -2\sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow a = -1$$

Logo, $P(x) = -1(x^2+1)(x-2) = -(x^3-2x^2+x-2) = -x^3+2x^2-x+2$.

2.

2.1. $\overline{AC}+\overline{BC} = 2\sqrt{7} \Leftrightarrow 2a = 2\sqrt{7} \Leftrightarrow a = \sqrt{7}$

Como $A(-2,0)$ e $B(2,0)$, então $c = 2$.

Logo:

$a^2 = b^2+c^2 \Leftrightarrow 7 = b^2+4 \Leftrightarrow b^2 = 3$

Então, $b = \sqrt{3}$.

Assim, a equação reduzida da elipse é $\frac{x^2}{7}+\frac{y^2}{3} = 1$.

2.2. $C(2,y), y > 0$

$3 \times 2^2 + 4y^2 = 48 \Leftrightarrow 12+4y^2 = 48 \Leftrightarrow 4y^2 = 36 \Leftrightarrow y^2 = 9$

Como $y > 0$, então $y = 3$ e, assim, $C(2,3)$.

$m_{AC} = \frac{3-0}{2+2} = \frac{3}{4}$

$AC: y = \frac{3}{4}x + b$

Como A pertence a AC:

$0 = \frac{3}{4} \times (-2) + b \Leftrightarrow b = \frac{6}{4} \Leftrightarrow b = \frac{3}{2}$

Logo, $AC: y = \frac{3}{4}x + \frac{3}{2}$.

$BC: x = 2$

$AB: y = 0$

Assim, uma condição que define o triângulo $[ABC]$ é $y \leq \frac{3}{4}x + \frac{3}{2} \wedge x \leq 2 \wedge y \geq 0$.

3. $\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{CB} = \left(\overrightarrow{DN} + \overrightarrow{NM} + \overrightarrow{MA}\right) + \left(\overrightarrow{CN} + \overrightarrow{NM} + \overrightarrow{MB}\right) =$

$= \overrightarrow{DN} + \overrightarrow{CN} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{NM} + \overrightarrow{NM} =$

$= \vec{0} + \vec{0} + 2\overrightarrow{NM} =$

$= 2\overrightarrow{NM}$

4.

4.1. $H = A + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BF} =$

$= (2,1,0) + \left((1,2,4) - (0,0,2)\right) + \left((-2,2,1) - (0,0,2)\right) =$

$= (2,1,0) + (1,2,2) + (-2,2,-1) =$

$= (1,5,1)$

4.2. $A(2,1,0)$ e a reta é paralela a Oz, logo as equações pedidas são $x = 2 \wedge y = 1$.

4.3. DFH é o plano mediador de $[AC]$, logo:

$(x-2)^2 + (y-1)^2 + z^2 = (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-4)^2$

$\Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 + y^2 - 2y + 1 + z^2 = x^2 - 2x + 1 + y^2 - 4y + 4 + z^2 - 8z + 16$

$\Leftrightarrow -2x + 2y + 8z - 16 = 0$

$\Leftrightarrow x - y - 4z + 8 = 0$

5.

5.1. $D_f = \{-2,-1,0,1,2\}$

$D'_f = \{1,2,3,4,5\}$

5.2. f é uma função injetiva, pois a objetos distintos correspondem imagens distintas.

5.3. $D_g = \{x \in \mathbb{R}: 2x + 1 \geq 0 \wedge x \neq 0\} = \left\{x \in \mathbb{R}: x \geq -\frac{1}{2} \wedge x \neq 0\right\} =$

$$= \left[-\frac{1}{2}, 0\right[\cup]0, +\infty[$$

5.4.

5.4.1. $f \circ g\left(-\frac{1}{2}\right) = f\left(g\left(-\frac{1}{2}\right)\right) =$

$$= f\left(\frac{\sqrt{2\times\left(-\frac{1}{2}\right)+1}}{-\frac{1}{2}}\right) =$$

$$= f(0) =$$

$$= 5$$

5.4.2. $g \circ f^{-1}(2) = g\left(f^{-1}(2)\right) =$

$$= g(1) =$$

$$= \frac{\sqrt{2\times1+1}}{1} =$$

$$= \sqrt{3}$$

6.

6.1.

x	-4		-3		0	1		2		5		6
Variação de f	n.d.	↘	-1	↗	2	n.d.	↗	3	↘	0	↗	1

f é estritamente decrescente em $]-4, 3]$ e em $[2, 5]$; é estritamente crescente em $[-3, 0]$, em $]1, 2]$ e em $[5, 6]$.

-1 é um mínimo absoluto da função e -3 é um minimizante.

3 é um máximo absoluto da função e 2 é um maximizante.

0 é um mínimo relativo da função e 5 é um minimizante.

2 e 1 são máximos relativos da função e 0 e 6 são maximizantes.

6.2. $f(x) < 1 \Leftrightarrow x \in]-4, -1[\cup]4, 6[$