

## TESTE N.º 1 – Proposta de resolução

### Grupo I

#### 1. Opção (C)

A afirmação (A) é verdadeira. Se  $\sim q$  é uma proposição falsa, então  $q$  é uma proposição verdadeira. Assim,  $p \wedge q$  é uma proposição verdadeira, por se tratar da conjunção de duas proposições verdadeiras.

A afirmação (B) é verdadeira. A proposição  $p \Rightarrow (q \vee r)$  é equivalente à proposição  $\sim p \vee (q \vee r)$ , que é o mesmo que  $\sim p \vee q \vee r$ .

A afirmação (C) é falsa. Por exemplo, se a proposição  $p$  é verdadeira e as proposições  $q$  e  $r$  são ambas falsas, tem-se que  $p \vee (q \wedge r)$  é uma proposição verdadeira (por se tratar da disjunção de uma proposição verdadeira com uma proposição falsa) e que  $(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$  é uma proposição falsa (por se tratar da disjunção de duas proposições falsas).

A afirmação (D) é verdadeira. Se as proposições  $q$  e  $r$  são falsas, então a proposição  $q \wedge r$  é falsa, por se tratar da conjunção de duas proposições falsas. Como  $p$  é uma proposição verdadeira, então  $p \vee (q \wedge r)$  é uma proposição verdadeira, por se tratar da disjunção de uma proposição verdadeira com uma proposição falsa.

#### 2. Opção (D)

A proposição  $\sim p \wedge q$  é verdadeira, logo as proposições  $\sim p$  e  $q$  são ambas verdadeiras, uma vez que a conjunção de duas proposições só é verdadeira se ambas forem verdadeiras. Como  $\sim p$  é uma proposição verdadeira, então  $p$  é uma proposição falsa.

Na opção (A), a proposição  $p$  é falsa e a proposição  $q$  é falsa.

Na opção (B), a proposição  $p$  é verdadeira e a proposição  $q$  é falsa.

Na opção (C), a proposição  $p$  é verdadeira e a proposição  $q$  é verdadeira.

Na opção (D), a proposição  $p$  é falsa e a proposição  $q$  é verdadeira.

#### 3. Opção (B)

$$\sim (\forall x, (x \leq 2 \vee x > 1)) \Leftrightarrow \exists x: \sim (x \leq 2 \vee x > 1)$$

$$\Leftrightarrow \exists x: (x > 2 \wedge x \leq 1)$$

#### 4. Opção (B)

$$x^3 + x^2 + 2x = -x^3 + x^2 \Leftrightarrow 2x^3 + 2x = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x(x^2 + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x = 0 \vee \underbrace{x^2 + 1 = 0}_{\text{Equação impossível em } \mathbb{R}}$$

$$\Leftrightarrow x = 0$$

A equação é possível em  $\mathbb{R}$  e o seu conjunto-solução é  $\{0\}$ .

## 5. Opção (A)

$$2x - \frac{1}{2} \leq 3x \Leftrightarrow -x \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow x \geq -\frac{1}{2}$$

$$\text{Logo, } A = \left[-\frac{1}{2}, +\infty\right[.$$

$$3x > -4 \wedge 4x \leq 9 \Leftrightarrow x > -\frac{4}{3} \wedge x \leq \frac{9}{4}$$

$$\text{Logo, } B = \left]-\frac{4}{3}, \frac{9}{4}\right] \cap \mathbb{Z} = \{-1, 0, 1, 2\}.$$

$$\text{Assim, } B \setminus A = B \cap \bar{A} = \{-1, 0, 1, 2\} \cap \left]-\infty, -\frac{1}{2}\right[ = \{-1\}.$$

## Grupo II

1.

1.1.

1.1.1. “Um quadrado é um retângulo e um retângulo não é um paralelogramo e um quadrado é um paralelogramo.”

1.1.2. “Se um quadrado não é um retângulo, então nem um retângulo é um paralelogramo nem um quadrado é um paralelogramo.”

1.2.  $(p \wedge q) \Rightarrow \sim r$

$$\begin{aligned} \text{Negação: } \sim((p \wedge q) \Rightarrow \sim r) &\Leftrightarrow \sim(\sim(p \wedge q) \vee \sim r) \\ &\Leftrightarrow \sim(\sim(p \wedge q)) \wedge \sim(\sim r) \\ &\Leftrightarrow p \wedge q \wedge r \end{aligned}$$

1.3. A proposição  $p$  é falsa, a proposição  $q$  é verdadeira e a proposição  $r$  é verdadeira.

Assim,  $\sim r$  é uma proposição falsa e  $q \wedge \sim r$  é uma proposição falsa (por se tratar da conjunção de duas proposições em que uma delas é falsa). Logo,  $p \Rightarrow (q \wedge \sim r)$  é uma proposição verdadeira (por se tratar de uma implicação em que o antecedente e o conseqüente são ambos falsos) e  $\sim(p \Rightarrow (q \wedge \sim r))$  é uma proposição falsa.

2.

2.1.

$p$	$q$	$\sim p$	$\sim p \Rightarrow q$	$\sim q$	$(p \wedge \sim q)$	$(\sim p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \wedge \sim q)$
V	V	F	V	F	F	F
V	F	F	V	V	V	V
F	V	V	V	F	F	F
F	F	V	F	V	F	V

As colunas correspondentes a  $(\sim p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \wedge \sim q)$  e a  $\sim q$  são iguais, logo as proposições  $(\sim p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \wedge \sim q)$  e  $\sim q$  são equivalentes.

$$\begin{aligned} 2.2. (\sim p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \wedge \sim q) &\Leftrightarrow \sim(\sim p \Rightarrow q) \vee (p \wedge \sim q) \\ &\Leftrightarrow \sim(p \vee q) \vee (p \wedge \sim q) \\ &\Leftrightarrow (\sim p \wedge \sim q) \vee (p \wedge \sim q) \\ &\Leftrightarrow \sim q \wedge (\sim p \vee p) \\ &\Leftrightarrow \sim q \wedge V \\ &\Leftrightarrow \sim q \end{aligned}$$

3. Como  $(p \vee (\sim q \Rightarrow r)) \wedge \sim(q \vee r)$  é uma proposição verdadeira, tem-se que as proposições  $(p \vee (\sim q \Rightarrow r))$  e  $\sim(q \vee r)$  são verdadeiras.

Sendo  $\sim(q \vee r)$  uma proposição verdadeira, então  $q \vee r$  é uma proposição falsa, logo  $q$  e  $r$  são ambas proposições falsas.

Uma vez que  $q$  e  $r$  são proposições falsas, vem que  $\sim q$  é uma proposição verdadeira e, então,  $\sim q \Rightarrow r$  é uma proposição falsa.

Para que  $(p \vee (\sim q \Rightarrow r))$  seja uma proposição verdadeira, tem-se, então, que  $p$  é uma proposição verdadeira.

Logo, o João vai ao cinema.

4.

4.1.  $x^2 + 4 \geq 0$  é uma condição possível universal em  $\mathbb{Z}^-$ .

$$\begin{aligned} 4.2. x^3 - 8 = 0 \wedge |x| \leq 2 &\Leftrightarrow x = 2 \wedge (x \geq -2 \wedge x \leq 2) \\ &\Leftrightarrow x = 2 \end{aligned}$$

Logo, a condição é possível não universal em  $\mathbb{R}$ .



5.

$$5.1. p(x): x^2 - 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{16-12}}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{4 \pm 2}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = 1 \vee x = 3$$

$$q(x): x - \frac{5}{4} \geq -\frac{x+1}{2} \Leftrightarrow 4x - 5 \geq -2x - 2$$

$$\Leftrightarrow 6x \geq 3$$

$$\Leftrightarrow x \geq \frac{1}{2}$$

$$r(x): x^2 > 9 \Leftrightarrow x > 3 \vee x < -3$$

Assim, o conjunto-solução de  $p(x) \vee (q(x) \wedge r(x))$  é:

$$\begin{aligned} \{1,3\} \cup \left( \left[ \frac{1}{2}, +\infty[ \cap (]-\infty, -3[ \cup ]3, +\infty[) \right) &= \{1,3\} \cup ]3, +\infty[ = \\ &= \{1\} \cup [3, +\infty[ \end{aligned}$$

5.2. Se, por exemplo,  $x = 1$ , então  $q(1)$  é uma proposição verdadeira e  $r(1)$  é uma proposição falsa, pelo que  $q(1) \Rightarrow r(1)$  é uma proposição falsa e, portanto, a proposição  $\forall x, q(x) \Rightarrow r(x)$  é falsa.

$$5.3. \sim(\exists x: p(x) \Rightarrow q(x)) \Leftrightarrow \forall x, \sim(\sim p(x) \vee q(x))$$

$$\Leftrightarrow \forall x, p(x) \wedge \sim q(x)$$

$$\Leftrightarrow \forall x, x^2 - 4x + 3 = 0 \wedge x - \frac{5}{4} < -\frac{x+1}{2}$$

$$5.4. P = \{1,3\}$$

$$Q = \left[ \frac{1}{2}, +\infty[ \right.$$

$$\bar{P} \cap Q = \mathbb{R} \setminus \{1,3\} \cap \left[ \frac{1}{2}, +\infty[ = \left[ \frac{1}{2}, 1[ \cup ]1,3[ \cup ]3, +\infty[ = \left[ \frac{1}{2}, +\infty[ \setminus \{1,3\}$$

6. Para provar que  $\forall n \in \mathbb{N}, 3n + 5$  é um número natural ímpar  $\Rightarrow n$  é um número natural par, vamos provar a implicação contrarrecíproca:

$$n \text{ é um número natural ímpar } \Rightarrow 3n + 5 \text{ é um número natural par}$$

Suponhamos que  $n$  é um número natural ímpar. Então, existe  $k \in \mathbb{N}$  tal que  $n = 2k + 1$ . Logo,  $3n = 3 \times (2k + 1) = 2 \times 3k + 3$  é um número ímpar. Tem-se então que  $3n + 5$  é a soma de um número ímpar com outro número ímpar e, portanto, é um número par.