TESTE N.º 2 – Proposta de resolução

Grupo I

1. Opção (B)

p	q	a	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p \vee \sim q$	$\sim p \wedge \sim q$	$\sim p \vee q$	$p \wedge \sim q$
V	V	F	F	F	F	F	V	F
V	F	F	F	V	V	F	F	V
F	V	F	V	F	V	F	V	F
F	F	V	V	V	V	V	V	F

Como as colunas relativas à proposição a e à proposição $\sim p \wedge \sim q$ são iguais, então $a \Leftrightarrow \sim p \wedge \sim q$.

2. Opção (D)

$$x^2 - x = 6 \Leftrightarrow x^2 - x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1+24}}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = -2 \vee x = 3$$

Logo, $A = \{-2,3\}$.

$$\frac{x+2}{2} \leq x + 3 \Leftrightarrow x + 2 \leq 2x + 6$$

$$\Leftrightarrow -x \leq 4$$

$$\Leftrightarrow x \geq -4$$

Logo, $B = [-4, +\infty[$.

Como A está contido em B, então a proposição $\exists x \in \mathbb{R}: x \in A \wedge x \notin B$ é falsa.

$A \cup B \neq \mathbb{R}$, logo a proposição $\forall x \in \mathbb{R}, x \in A \vee x \in B$ é falsa.

A proposição $\forall x \in \mathbb{R}, x \in A \vee x \notin B$ é falsa, uma vez que, por exemplo, $-1 \notin A$ e $-1 \in B$.

A proposição $\exists x \in \mathbb{R}: x \notin A \wedge x \in B$ é verdadeira, pois, por exemplo, $-1 \notin A$ e $-1 \in B$.

3. Opção (A)

Pelo Teorema de Pitágoras:

$$\overline{AC}^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 \Leftrightarrow \overline{AC}^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \Leftrightarrow \overline{AC}^2 = 1$$

Logo, $\overline{AC} = 1 = \overline{AE}$.

Assim, $A_{[AEFD]} = 1 \times 1 = 1$ e $A_{\text{setor circular}} = \frac{\pi \times 1^2}{4} = \frac{\pi}{4}$.

Portanto, $A_{\text{sombreada}} = 1 - \frac{\pi}{4} = \frac{1}{4}(4 - \pi)$ u.a.

4. Opção (D)

$$\frac{\sqrt{b}}{a-\sqrt{b}}=\frac{\sqrt{b}}{a-\sqrt{b}}\times\frac{a+\sqrt{b}}{a+\sqrt{b}}=\frac{a\sqrt{b}+(\sqrt{b})^2}{a^2-(\sqrt{b})^2}=\frac{a\sqrt{b}+b}{a^2-b}$$

5. Opção (A)

Uma vez que o resto da divisão de $P(x)$ por $x-2$ é igual a -7, tem-se, pelo Teorema do Resto, que:

$$\begin{aligned} P(2)=-7 \Leftrightarrow 2^3+2^2+k\times 2+15=-7 &\Leftrightarrow 8+5+2k+15=-7 \\ &\Leftrightarrow 2k=-34 \\ &\Leftrightarrow k=-17 \end{aligned}$$

Grupo II

1. $$\begin{aligned} \big((p\vee q)\wedge(p\vee r)\big)\Rightarrow(q\vee r) \Leftrightarrow p\vee(q\wedge r)\Rightarrow q\vee r &\Leftrightarrow \sim\big(p\vee(q\wedge r)\big)\vee(q\vee r) \\ &\Leftrightarrow \big(\sim p\wedge\sim(q\wedge r)\big)\vee(q\vee r) \\ &\Leftrightarrow (\sim p\vee q\vee r)\wedge\big(\sim(q\wedge r)\vee(q\vee r)\big) \\ &\Leftrightarrow (\sim p\vee q\vee r)\wedge(\sim q\vee\sim r\vee q\vee r) \\ &\Leftrightarrow (\sim p\vee q\vee r)\wedge \mathrm{V} \\ &\Leftrightarrow \sim p\vee q\vee r \end{aligned}$$

2. $\sqrt{(-2)^2}=\sqrt{4}=2$, logo p é uma proposição falsa.

$\left(\left(\frac{1}{2}\right)^2\right)^3=\left(\frac{1}{2}\right)^6\neq\left(\frac{1}{2}\right)^{2^3}=\left(\frac{1}{2}\right)^8$, logo q é uma proposição falsa.

$\sqrt{\sqrt[3]{2}}=\left(2^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}=2^{\frac{1}{6}}$, logo r é uma proposição verdadeira.

Assim:

$$\begin{aligned} p\vee\sim q\vee\sim r &\Leftrightarrow \mathrm{F}\vee\mathrm{V}\vee\mathrm{F} \\ &\Leftrightarrow \mathrm{V} \end{aligned}$$

e:

$$\begin{aligned} \sim p\wedge q\wedge r &\Leftrightarrow \mathrm{V}\wedge\mathrm{F}\wedge\mathrm{V} \\ &\Leftrightarrow \mathrm{F} \end{aligned}$$

Portanto:

$$(p \vee \sim q \vee \sim r) \Rightarrow (\sim p \wedge q \wedge r) \Leftrightarrow \mathrm{V} \Rightarrow \mathrm{F}$$
$$\Leftrightarrow \mathrm{F}$$

3.

3.1. $x \geq 0 \Rightarrow x^3 - x \neq 0$

3.2. $x^3 - x = 0 \Leftrightarrow x(x^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 1 \vee x = -1$

A proposição $\exists x \in \mathbb{R}: x^3 - x = 0 \Rightarrow x < 0$ é verdadeira, uma vez que substituindo x por -1, por exemplo, em $p(x)$ obtemos a proposição $p(-1)$ que é verdadeira, por se tratar de uma implicação em que o antecedente é verdadeiro e o consequente é verdadeiro.

3.3. $\sim (\exists x \in \mathbb{R}: x^3 - x = 0 \Rightarrow x < 0) \Leftrightarrow \sim (\exists x \in \mathbb{R}: x^3 - x \neq 0 \ \vee \ x < 0)$

$$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, x^3 - x = 0 \ \wedge \ x \geq 0$$

4.

4.1. $A = (2x^6y^8)^{-\frac{1}{4}} \times \sqrt[4]{8x^{-2}} = \frac{1}{\sqrt[4]{2x^6y^8}} \times \sqrt[4]{8x^{-2}} =$

$$= \sqrt[4]{\frac{8x^{-2}}{2x^6y^8}} =$$
$$= \sqrt[4]{\frac{4}{x^8y^8}} =$$
$$= \frac{\sqrt[4]{2^2}}{x^2y^2} =$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{(xy)^2}$$

4.2. $A = \frac{\sqrt{2}}{(\sqrt[3]{4} \times \sqrt{2})^2} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt[3]{2^4} \times 2} =$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt[3]{2} \times 2} =$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{4\sqrt[3]{2}} =$$
$$= \frac{1}{4} \times \frac{2^{\frac{1}{2}}}{2^{\frac{1}{3}}} =$$
$$= 2^{-2} \times 2^{\frac{1}{6}} =$$
$$= 2^{-\frac{11}{6}}$$

5. Seja x a altura de um dos triângulos que são as faces laterais da pirâmide.

Pelo Teorema de Pitágoras:

$$a^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + x^2 \Leftrightarrow a^2 - \frac{a^2}{4} = x^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 = \frac{3}{4}a^2$$

Logo, $x = \frac{\sqrt{3}}{2}a$.

Assim, a área pedida é dada por:

$$a^2 + 4 \times \frac{a \times \frac{\sqrt{3}}{2}a}{2} = a^2 + 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2}a^2 = a^2 + \sqrt{3}a^2 = \left(1 + \sqrt{3}\right)a^2$$

6.

6.1. $P\left(\sqrt{2}\right) = -3 \times \left(\sqrt{2}\right)^4 + 6 \times \left(\sqrt{2}\right)^3 + 21 \times \left(\sqrt{2}\right)^2 - 60 \times \sqrt{2} + 36 =$

$= -3 \times 4 + 6 \times 2\sqrt{2} + 21 \times 2 - 60\sqrt{2} + 36 =$

$= -12 + 12\sqrt{2} + 42 - 60\sqrt{2} + 36 =$

$= 66 - 48\sqrt{2}$

6.2.

	-3	6	21	-60	36
2		-6	0	42	-36
	-3	0	21	-18	0
2		-6	-12	18	
	-3	-6	9	0	

Logo, $P(x) = (x-2)(x-2)(-3x^2 - 6x + 9) = -3(x-2)(x-2)(x^2 + 2x - 3)$.

$x^2 + 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{4+12}}{2} \Leftrightarrow x = 1 \vee x = -3$

Assim, $P(x) = -3(x-2)(x-2)(x-1)(x+3)$.

6.3. $P(x) > -3x^4 + 36 \Leftrightarrow -3x^4 + 6x^3 + 21x^2 - 60x + 36 > -3x^4 - 15x + 36$

$\Leftrightarrow 6x^3 + 21x^2 - 45x > 0$

$\Leftrightarrow 3x(2x^2 + 7x - 15) > 0$

$\Leftrightarrow 3x(x+5)(3x-2) > 0$

Cálculo auxiliar

$$2x^2 + 7x - 15 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-7 \pm \sqrt{49 + 120}}{4}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-7 \pm 13}{4}$$

$$\Leftrightarrow x = -5 \vee x = \frac{3}{2}$$

x	$-\infty$	-5		0		$\frac{3}{2}$	$+\infty$
$3x$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$x+5$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$3x-2$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$3x(x+5)(3x-2)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

Logo, $x \in \left]-5, 0\right[\cup \left]\frac{3}{2}, +\infty\right[$.