**TESTE N.º 1 – Proposta de resolução**

**Grupo I**

1. **Opção (C)**

Tem-se que:

$$a⇔V$$

$$b⇔F$$

$$c⇔V$$

Assim:

$$(\~a⇔b)⇔(F⇔F)⇔V$$

$$(a⇒(b⇒c))⇔(V⇒\left(F⇒V\right))⇔(V⇒V)⇔V$$

$$(a∧c⇒b)⇔(V∧V⇒F)⇔(V⇒F)⇔F$$

$$(\~a∨\~b)⇔(F∨V)⇔V$$

1. **Opção (A)**

 $p$: “Em $Z$, a condição $x^{2}=2$ é impossível.” – Proposição verdadeira

$q$: “Em $Q$, a condição $x^{2}=2$ é possível, não universal.” – Proposição falsa

$r$: “Em $R$, a condição $x^{2}=2$ é universal.” – Proposição falsa

1. **Opção (B)**

 Das opções apresentadas, apenas a proposição $∀x\in R, x\geq x$ é verdadeira.

**4. Opção (D)**

“Não é verdade que o Pedro vai ao ginásio todos os dias da semana” é equivalente a “Há pelo menos um dia da semana em que o Pedro não vai ao ginásio”.

**5. Opção (B)**

 $A=\left\{x ϵ N:x é ímpar\right\}=\{1, 3, 5, 7, 9, …\}$

 $B=\left\{x ϵ N:x é divisor de 14\right\}=\{1, 2, 7, 14\}$

 $C=\left\{x ϵ N:x é primo\right\}=\{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, …\}$

 $A∩B=\{1, 7\}$

 $(A∩B)\C=\{1\}$

**Grupo II**

**1.1.**

**1.1.1.** $p∧(q∨r)$: “De manhã, o João vai ter teste de Matemática e, à tarde, vai treinar futebol ou estudar com a Joana”.

**1.1.2.** $\~r⟹q$: “Se o João não vai estudar com a Joana à tarde, então à tarde vai treinar futebol”.

**1.1.3.** $q⟺\~r$: “O João vai treinar futebol à tarde se e só se não vai estudar, à tarde, com a Joana”.

**1.2.**

**1.2.1.** $p∧\~q∧\~r$

**1.2.2.** $p∧\~q⇒r$

**1.2.3.** $r⇒\~q$

**1.3.** “Se o João de manhã vai ter teste de Matemática, então à tarde não vai estudar com a Joana” pode ser traduzido simbolicamente por $p⇒\~r$.

Assim, a sua negação é $\~(p⇒\~r)⇔(p∧\~(\~r))⇔(p∧r)$.

Ou seja, “O João de manhã vai ter teste de Matemática e à tarde vai estudar com a Joana”.

**1.4.** Como a proposição $\left(p∧r\right)∨\left(p⇒q\right)$ é falsa, então as proposições $\left(p∧r\right)$ e $\left(p⇒q\right)$ são também falsas, visto tratar-se da disjunção de proposições, que só é falsa no caso em que ambas as proposições são falsas.

Como $\left(p⇒q\right)$ é falsa, então $p$ é verdadeira e $q$ é falsa, pois uma implicação de proposições só é falsa no caso em que o antecedente é verdadeiro e o consequente é falso.

Como $\left(p∧r\right)$ é falsa e $p$ é verdadeira, então $r$ terá de ser uma proposição falsa, visto tratar-se da conjunção de proposições com valores lógicos diferentes.

Assim, $p⇔V, q⇔F$ e $r⇔F$, isto é, nesse dia de manhã o João teve teste de Matemática, mas à tarde não foi treinar futebol nem estudar com a Joana.

**2.**

**2.1.**

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| $$p$$ | $$q$$ | $$\~p$$ | $$\~q$$ | $$\~p∨\~q$$ | $$\~(\~p∨\~q)$$ | $$p⇔q$$ | $$\~(p⇔q)$$ | $$\~\left(\~p∨\~q\right)∨\~(p⇔q)$$ | $$p∨q$$ |
| V | V | F | F | F | V | V | F | V | V |
| V | F | F | V | V | F | F | V | V | V |
| F | V | V | F | V | F | F | V | V | V |
| V | F | V | V | V | F | V | F | F | F |

Como as colunas que dizem respeito às proposições$\~\left(\~p∨\~q\right)∨\~(p⇔q)$ e $(p∨q)$ são iguais, conclui-se que as proposições são equivalentes.

**2.2.** $\~\left(\~p∨\~q\right)∨\~\left(p⟺q\right)⇔(\left(p∧q\right)∨\~(\left(p⇒q\right)∧\left(q⇒p\right))$

 $⇔(\left(p∧q\right)∨\~\left(p⇒q\right)∨\~\left(q⇒p\right))$

 $⇔(\left(p∧q\right)∨\left(p∧\~q\right)∨\left(q∧\~p\right))$

 $⇔(\left(p∧(q∨\~q\right))∨\left(q∧\~p\right))$

 $⇔((p∧V)∨\left(q∧\~p\right))$

 $⇔(p∨\left(q∧\~p\right))$

 $⇔((p∨q)∧\left(p∨\~p\right))$

 $⇔((p∨q)∧V)$

 $⇔(p∨q)$

**3.**

**3.1.**

**Cálculos auxiliares**

$5-\frac{x-2}{2}>5$ ⇔ $-x+2>0$

 ⇔ $-x>-2$

 ⇔ $x<2$

$$x^{2}-x-2=0⇔x=\frac{1\pm \sqrt{(-1)^{2}-4×1×(-2)}}{2×1}$$

 $⇔x=\frac{1+3}{2}$ ∨ $x=\frac{1-3}{2}$

 $⇔x=2$ ∨ $x=-1$

A proposição “$∃x\in R: a\left(x\right)∧b(x)"$ é verdadeira, já que a concretização da variável $x$ por $-1$ transforma tanto a condição $a(x)$ como a condição $b(x)$ em proposições verdadeiras.

**3.2.** $\~(∃x\in R: a\left(x\right)∧b(x))⇔(∀x\in R,\~\left( a\left(x\right)∧ b\left(x\right))\right)$

 $⇔(∀x\in R, \~a\left(x\right)∨\~b\left(x\right))$

 $⇔(∀x\in R, 5-\frac{x-2}{2}\leq 5∨ x^{2}-x-2\ne 0)$

**3.3.**

**3.3.1.** Tem-se que $A=\left]-\infty , 2\right[$ e $B=\left\{-1, 2\right\}$.

A proposição$∀x,x\in B⇒x\in A$ é uma proposição falsa, já que a concretização da variável $x$ por 2 transforma a condição $x\in B$ numa proposição verdadeira e a condição $x\in A$ numa proposição falsa.

**3.3.2.** $A=\left]-\infty , 2\right[$; $B=\left\{-1, 2\right\}$; $C=\left]-1, π\right]$

**(i)** $C\B=\left]-1, 2\right[∪\left]2, π\right]$

**(ii)** $A∪\overbar{ C }=\left]-\infty ,2\right[∪\left( \left]-\infty , -1\right]∪\left]π, +\infty \right[\right)=$

 $=\left]-\infty ,2\right[∪\left]π, +\infty \right[$

**4.** A provar: “Se um número natural $n$ não é divisível por 7, então não é divisível por 21”.

 O que é equivalente a provar: “Se um número natural $n$ é divisível por 21, então é divisível por 7”.

 Seja $n\in N$. Se $n$ é divisível por 21, então $n$ é da forma $n=21k$, com $k\in N$.

 Assim, $n=7×3k$, isto é, $n$ é da forma $7×k'$, com $k^{'}\in N$.

 Logo, $n$ é divisível por 7, como queríamos demonstrar.