Nome: ____

Ano / Turma: _________ **N.º:** _____ **Data:** ___ - ____ - ___

- Não é permitido o uso de corretor. Deves riscar aquilo que pretendes que não seja classificado.
- A prova inclui um formulário.
- As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.

CADERNO 1
(É permitido o uso de calculadora gráfica.)

1. Na figura estão representadas as 15 bolas de um bilhar, numeradas de 1 a 15, dispostas em "triângulo".

As bolas foram distribuídas ao acaso pelo "triângulo".

Determina a probabilidade de:

1.1. os números das bolas nos vértices do "triângulo" serem primos.

Apresenta o resultado arredondado às milésimas.

1.2. o produto dos números das bolas dos vértices do "triângulo" ser 30.

Apresenta o resultado na forma de fração irredutível.

2. Numa caixa foram colocadas n bolas numeradas, sendo cinco com número ímpar e as restantes com números pares. O número de bolas com número ímpar é diferente do número de bolas com número par.

Sabe-se que se se retirar duas bolas, ao acaso, a probabilidade de a soma dos números das bolas retiradas ser ímpar é $\frac{5}{9}$.

Determina a probabilidade de, ao retirar três bolas ao acaso, a soma dos números das bolas retiradas ser par.

Apresenta o resultado na forma de fração irredutível.

3. Numa cidade, 15% dos hotéis são de 5 estrelas, 60% são de 4 estrelas e os restantes são de 3 estrelas.

Foram consultados os registos dos hóspedes, em todos estes hotéis, durante o último fim de semana, e chegou-se à seguinte conclusão: 20% dos hóspedes dos hotéis de 5 estrelas são nacionais; 35% dos hóspedes dos hotéis de 4 estrelas são estrangeiros; e, nos hotéis de 3 estrelas, 70% dos hóspedes são estrangeiros.

Dos hotéis da cidade escolhe-se um, ao acaso, e seleciona-se, também ao acaso, um dos hóspedes desse hotel.

Determina a probabilidade de cada um dos seguintes acontecimentos:

3.1. ser escolhido um hóspede estrangeiro de um hotel de 5 estrelas.

Apresenta o resultado em percentagem.

3.2. ser escolhido um hóspede de um hotel de 3 estrelas, sabendo que é nacional.

Apresenta o resultado na forma de fração irredutível.

FIM (Caderno 1)

Cotações						Total
Questões – Caderno 1	**1.1.**	**1.2.**	**2.**	**3.1.**	**3.2.**	
Pontos	15	20	20	10	15	**80**

CADERNO 2
(Não é permitido o uso de calculadora.)

4. Uma organização de solidariedade social organizou um jogo de "Raspadinha" para apoiar o financiamento de algumas iniciativas na época de Natal.
Na figura está representada uma "raspadinha" com três círculos para raspar.

Em cada círculo há uma imagem de um conjunto de 10 imagens diferentes, todas com igual probabilidade de ocorrer.

A Raquel comprou uma "raspadinha". Se, após raspar os três círculos, obtiver três imagens iguais, ganha o 1.º prémio e, se obtiver apenas duas imagens iguais, ganha o 2.º prémio.

4.1. A probabilidade de a Raquel ganhar o 1.º prémio é:

(A) 30% **(B)** 10% **(C)** 1% **(D)** 0,1%

4.2. Determina a probabilidade de a Raquel ganhar o 2.º prémio, sabendo que no círculo do meio está a imagem de um Pai Natal. Apresenta o resultado na forma de percentagem.

5. Seja Ω o espaço amostral associado a uma certa experiência aleatória e A e B dois acontecimentos ($A \subset \Omega$ e $B \subset \Omega$).

5.1. Se tivermos $P\left(A \cap \overline{B}\right) = a$ e $P\left(\overline{A \cup B}\right) = b$, mostra que $P(B) = 1 - (a + b)$.

5.2. Num congresso internacional, 25% dos congressistas falam inglês e não falam francês e 40% não falam qualquer uma das duas línguas.

Um congressista é escolhido ao acaso. Determina a probabilidade de o congressista escolhido falar francês.

Na resolução deves recorrer ao resultado apresentado em **5.1.** e definir, neste contexto, os acontecimentos *A* e *B*.

6. Seja f a função, de domínio $[0,+\infty[\setminus\{1\}$, definida por $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}}{x-1}$.

Considera a sucessão de números reais (x_n) tal que $x_n=\dfrac{n-1}{n}$.

Qual é o valor de $\lim f(x_n)$?

(A) $+\infty$ **(B)** 0 **(C)** $-\infty$ **(D)** 1

7. Seja f a função de domínio $\mathbb{R}_0^+$ definida por $f(x)=-x^3+4x$.

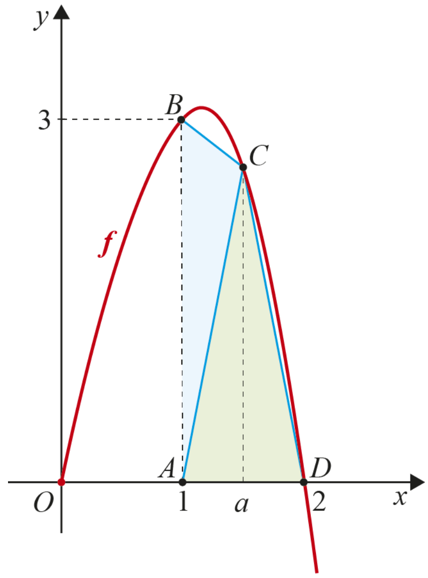
Na figura está representada, num referencial o.n. Oxy, parte do gráfico da função f.

Para cada número real a pertencente ao intervalo $]1,2[$, seja C o ponto do gráfico de f de abcissa a.

Sabe-se que:

. o ponto A tem coordenadas $(1,0)$;

. B e D são pontos do gráfico de f de abcissas, respetivamente, 1 e 2.



Exprime, em função de a, cada uma das áreas dos triângulos $[ABC]$ e $[ADC]$. De seguida, recorre ao Teorema de Bolzano para mostrar que existe um valor de a pertencente ao intervalo $]1,2[$, para o qual as medidas das áreas dos triângulos são iguais.

FIM (Caderno 2)

Cotações							**Total**
Questões – Caderno 1	**1.1.**	**1.2.**	**2.**	**3.1.**	**3.2.**		
Pontos	15	20	20	10	15		**80**
Questões – Caderno 2	**4.1.**	**4.2.**	**5.1.**	**5.2.**	**6.**	**7.**	
Pontos	15	20	25	20	15	25	**120**

FORMULÁRIO

GEOMETRIA

Comprimento de um arco de circunferência: $\alpha\, r$
(α : amplitude, em radianos, do ângulo ao centro;
r : raio)

Área de um polígono regular: $\text{Semiperímetro} \times \text{Apótema}$

Área de um setor circular: $\dfrac{\alpha r^2}{2}$

(α : amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r : raio)

Área lateral de um cone: $\pi r g$

(r : raio da base; g : geratriz)

Área de uma superfície esférica: $4\pi r^2$

(r : *raio*)

Volume de uma pirâmide: $\frac{1}{3} \times \text{Área da base} \times \text{Altura}$

Volume de um cone: $\frac{1}{3} \times \text{Área da base} \times \text{Altura}$

Volume de uma esfera: $\frac{4}{3}\pi r^3$ (r : raio)

PROGRESSÕES

Soma dos n primeiros termos de uma progressão (u_n):

Progressão aritmética: $\dfrac{u_1 + u_n}{2} \times n$

Progressão geométrica: $u_1 \times \dfrac{1-r^n}{1-r}$

TRIGONOMETRIA

$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$

$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$

$\dfrac{\sin A}{a} = \dfrac{\sin B}{b} = \dfrac{\sin C}{c}$

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$

COMPLEXOS

$(\rho \operatorname{cis} \theta)^n = \rho^n \operatorname{cis}(n\theta)$ ou $(\rho\, e^{i\theta})^n = \rho^n e^{in\theta}$

$\sqrt[n]{\rho \operatorname{cis} \theta} = \sqrt[n]{\rho} \operatorname{cis}\left(\dfrac{\theta + 2k\pi}{n}\right)$ ou $\sqrt[n]{\rho\, e^{i\theta}} = \sqrt[n]{\rho}\, e^{i\frac{\theta+2k\pi}{n}}$

$(k \in \{0, \ldots, n-1\}$ e $n \in \mathbb{N})$

PROBABILIDADES

$\mu = p_1 x_1 + \ldots + p_n x_n$

$\sigma = \sqrt{p_1 (x_1 - \mu)^2 + \ldots + p_n (x_n - \mu)^2}$

Se X é $N(\mu, \sigma)$, então:

$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0{,}6827$

$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0{,}9545$

$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 0{,}9973$

REGRAS DE DERIVAÇÃO

$(u+v)' = u' + v'$

$(u\,v)' = u'\,v + u\,v'$

$\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'\,v - u\,v'}{v^2}$

$(u^n)' = n\,u^{n-1}\,u' \quad (n \in \mathbb{R})$

$(\sin u)' = u' \cos u$

$(\cos u)' = -u' \sin u$

$(\tan u)' = \dfrac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u'\,e^u$

$(a^u)' = u'\,a^u \ln a \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

$(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \dfrac{u'}{u \ln a} \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

LIMITES NOTÁVEIS

$\lim \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n = e \quad (n \in \mathbb{N})$

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x^p} = +\infty \quad (p \in \mathbb{R})$

CADERNO 1
(É permitido o uso de calculadora gráfica.)

1.1. Conjunto dos números primos que aparecem na numeração das bolas: $\{2,3,5,7,11,13\}$.

Número de casos favoráveis: ${}^{6}A_3 \times 12!$

Número de casos possíveis: $15!$

Seja p a probabilidade pedida.

$$p = \frac{{}^{6}A_3 \times 12!}{15!} = \frac{6\times5\times4}{13\times14\times15} = \frac{120}{2730}$$

$p \approx 0,044$

Resposta: $0,044$

1.2. Decomposição do número 30 em fatores primos: $30 = 2\times3\times5$

O número 1 é o elemento neutro da multiplicação.

Assim: $30 = 1\times2\times3\times5$

Como pretendemos apenas três bolas, uma para cada vértice há quatro escolhas:

2 – 3 – 5 ou 1 – 6 – 5 ou 1 – 10 – 3 ou 1 – 2 – 15

Número de casos favoráveis: $4\times3!\times12!$

Número de caso possíveis: $15!$

Seja p a probabilidade pedida.

$$p = \frac{4\times3!\times12!}{15!} = \frac{4\times6}{13\times14\times15} = \frac{24}{2730} = \frac{4}{455}$$

Resposta: $\frac{4}{455}$

2. Há cinco bolas com número ímpar e $n-5$ bolas com número par.

Para a soma de dois números ser ímpar, um é par e o outro é ímpar.

A probabilidade de retirar duas bolas e a soma dos números ser ímpar é $\frac{{}^{5}C_1 \times {}^{n-5}C_1}{{}^{n}C_2}$.

Assim, temos: $\frac{{}^{5}C_1 \times {}^{n-5}C_1}{{}^{n}C_2} = \frac{5}{9} \Leftrightarrow \frac{5\times(n-5)}{\frac{n!}{2!(n-2)!}} = \frac{5}{9} \Leftrightarrow \frac{2(n-5)}{n(n-1)} = \frac{1}{9} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 18(n-5) = n^2 - n \Leftrightarrow n^2 - 19n + 90 = 0 \Leftrightarrow n = \frac{19 \pm \sqrt{361-360}}{2} \Leftrightarrow n = 9 \vee n = 10$$

Como o número de bolas com número ímpar é diferente do número de bolas com número par, conclui-se que $n = 9$.

A caixa tem cinco bolas com número ímpar e quatro bolas com número par.

Retirar ao acaso três bolas e a soma ser um número par ocorre quando há duas bolas com número ímpar e uma com número par ou três bolas com número par.

Número de casos favoráveis: ${}^5C_2 \times {}^4C_1 + {}^4C_3 = 44$

Número de casos possíveis: ${}^9C_3 = 84$

Seja p a probabilidade pedida.

$$p = \frac{44}{84} = \frac{11}{21}$$

Resposta: $\frac{11}{21}$

3. Consideram-se os acontecimentos:

H_5: "Escolher hotel de 5 estrelas."

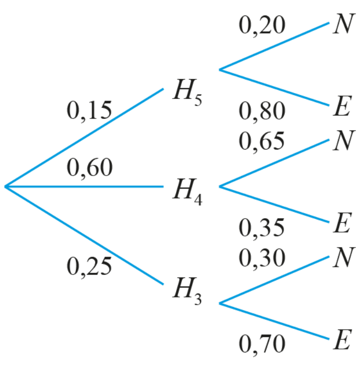
H_4: "Escolher hotel de 4 estrelas."

H_3: "Escolher hotel de 3 estrelas."

N: "Escolher hóspede nacional."

E: "Escolher hóspede estrangeiro."

Sabe-se que:



- $P(H_5) = 0{,}15$
- $P(H_4) = 0{,}60$
- $P(H_3) = 1 - (0{,}15 + 0{,}60) = 0{,}25$
- $P(N|H_5) = 0{,}20$. Então, $P(E|H_5) = 1 - 0{,}20 = 0{,}8$.
- $P(E|H_4) = 0{,}35$. Então, $P(N|H_4) = 1 - 0{,}35 = 0{,}65$.
- $P(E|H_3) = 0{,}70$. Então, $P(N|H_3) = 1 - 0{,}70 = 0{,}30$.

3.1. $P(H_5 \cap E) = P(H_5) \times P(E|H_5) = 0{,}15 \times 0{,}80 = 0{,}12$

Resposta: 12%

3.2. $$P(H_3|N) = \frac{P(H_3 \cap N)}{P(N)} = \frac{P(H_3 \cap N)}{P(H_5 \cap N) + P(H_4 \cap N) + P(H_3 \cap N)} =$$

$$= \frac{0{,}25 \times 0{,}30}{0{,}15 \times 0{,}20 + 0{,}60 \times 0{,}65 + 0{,}25 \times 0{,}30} = \frac{5}{33}$$

Resposta: $\frac{5}{33}$

CADERNO 2

(Não é permitido o uso de calculadora.)

4.1. Há 10 imagens diferentes. Assim, há 10 casos favoráveis.

O número de casos possíveis é: ${}^{10}A'_3 = 10^3$

Seja p a probabilidade pedida.

$$p = \frac{10}{10^3} = 0,01$$

$p = 1\%$.

Resposta: (C) 1%

4.2. Sendo a imagem do meio um Pai Natal, o 2.º prémio pode ocorrer se:

A primeira imagem é um Pai Natal e a terceira não é um Pai Natal.

Ou

A primeira imagem não é um Pai Natal e a terceira é Pai Natal.

Ou

A primeira e a terceira imagens são iguais e diferentes de um Pai Natal.

Número de casos favoráveis: $9+9+9=27$

Número de casos possíveis: ${}^{10}A'_2 = 10^2$

Seja p a probabilidade pedida.

$$p = \frac{27}{100} = 0,27$$

Resposta: 27%

5.1. Sabe-se que $P\left(A \cap \overline{B}\right) = a$ e $P\left(\overline{A \cup B}\right) = b$.

Como $A = A \cap \Omega = A \cap \left(B \cup \overline{B}\right)$, então $P(A) = P(A \cap B) + P\left(A \cap \overline{B}\right)$, ou seja,

$P(A) = P(A \cap B) + a$ **(1)**.

Sabe-se que $P\left(\overline{A \cup B}\right) = b$, ou seja, $P(A \cup B) = 1 - b$ **(2)**

Mas, $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Considerando (1) e (2), tem-se:

$1 - b = P(A \cap B) + a + P(B) - P(A \cap B)$

Daqui resulta que $P(B) = 1 - (a+b)$, como se queria demonstrar.

5.2. Sejam A e B os acontecimentos:

A: "O congressista fala inglês." B: "O congressista fala francês."

Sabe-se que $P\left(A \cap \overline{B}\right) = 0,25$ e $P\left(\overline{A} \cap \overline{B}\right) = P\left(\overline{A \cup B}\right) = 0,4$.

Pelo resultado de **5.1.**: $P(B) = 1 - \left(P\left(A \cap \overline{B}\right) + P\left(\overline{A \cup B}\right)\right)$

Assim, $P(B) = 1 - (0,25 + 0,4) = 0,35$.

Resposta: $0,35$

6. $x_n = \dfrac{n-1}{n} = 1 - \dfrac{1}{n}$

$\forall n \in \mathbb{N},\ x_n < 1$

$\lim(x_n) = \lim \dfrac{n-1}{n} = \lim\left(1 - \dfrac{1}{n}\right) = 1$

$\lim f(x_n) = \lim \dfrac{\sqrt{x_n}}{x_n - 1} = \dfrac{1}{0^-} = -\infty$

Resposta: (C) $-\infty$

7. Área do triângulo [ABC]: $\dfrac{\overline{AB} \times (a-1)}{2} = \dfrac{3(a-1)}{2}$

Área do triângulo [ADC]: $\dfrac{(2-1) \times f(a)}{2} = \dfrac{-a^3 + 4a}{2}$

Como se pretende que as áreas sejam iguais, então $\dfrac{3(a-1)}{2} = \dfrac{-a^3 + 4a}{2}$.

$\dfrac{3(a-1)}{2} = \dfrac{-a^3 + 4a}{2} \Leftrightarrow a^3 - a - 3 = 0$

Pretende-se provar, recorrendo ao Teorema de Bolzano, que a equação $a^3 - a - 3 = 0$ é possível no intervalo $]1, 2[$.

Seja g a função polinomial definida por $g(x) = x^3 - x - 3$.

A função polinomial g é contínua em $\mathbb{R}$, em particular, no intervalo $[1, 2]$.

$g(1) = -3$ e $g(2) = 3$.

Sendo g contínua em $[1, 2]$ e $g(1) < 0 < g(2)$, pelo Teorema de Bolzano conclui-se que $\exists a \in]1, 2[:\ g(a) = 0$, ou seja, para este valor de a, as medidas das áreas dos dois triângulos são iguais.