Escola Secundária de Francisco Franco
www.esffranco.edu.pt
(2020/2021)

3.º TESTE DE MATEMÁTICA A – 12.º 6

3.º Período | 13/05/2021 | Duração: 90 minutos

Nome: N.º:

Classificação: , O professor:

Na resposta aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Escreva na folha de respostas o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Na resposta aos restantes itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias. Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

1. A Maria Adruzília possui 22 gatos.

1.1. Na sala da Maria Adruzília, há exatamente 25 locais onde os gatos podem ficar à noite.

Qual é o número aproximado de maneiras distintas, em notação científica, que os gatos podem ficar nesses locais?

(A) $5{,}17\times10^{24}$ **(B)** $2{,}24\times10^{21}$

(C) $2{,}58\times10^{24}$ **(D)** $1{,}12\times10^{21}$

1.2. Entre os gatos da Maria Adruzília, há 5 siameses.

Num certo dia, ela vai ao veterinário para uma consulta de rotina e vai levar apenas 6 de entre os 22 gatos.

Se a escolha for feita ao acaso, qual é a probabilidade de haver, pelo menos, um gato siamês nos 6 gatos escolhidos para ir ao veterinário?

Apresente o resultado na forma de percentagem, arredondado às décimas.

2. Admita que, em várias zonas da Península Ibérica, o número total de exemplares de lince ibéricos, l, é dado, t anos após o início de 2020, pela função definida por $l(t)=\dfrac{2000}{5+3^{-0,3t}}$.

2.1. Segundo este modelo, ao fim de quanto tempo se prevê que haja 390 exemplares de linces ibéricos?

Apresente o ano e o mês.

Se, em cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, duas casas decimais.

2.2. Sabe-se que existe um certo ano t tal que, 10 anos antes desse ano, o número de lince ibéricos é inferior em 200 exemplares.

Determine, recorrendo às capacidades gráficas da calculadora, o valor de t, sabendo-se que esse valor existe e é único.

Na sua resposta:

- equacione o problema;
- reproduza, num referencial, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora que lhe permite(m) resolver a equação;
- apresente o valor de t em anos, arredondado às décimas.

3. Seja a um número real superior a 1.

Qual é o valor de $\log_{\sqrt{a}} \sqrt[3]{a}$?

(A) $\frac{2}{3}$ **(B)** $\frac{3}{2}$ **(C)** $\frac{a}{3}$ **(D)** $\frac{3}{a}$

4. Considere a função g, de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por $g(x) = \log_2 x$.

4.1. Seja (a_n) a sucessão de termo geral $a_n = \left(\frac{5n}{5n+1}\right)^{15n+1}$.

Qual é o valor de $\lim g(a_n)$?

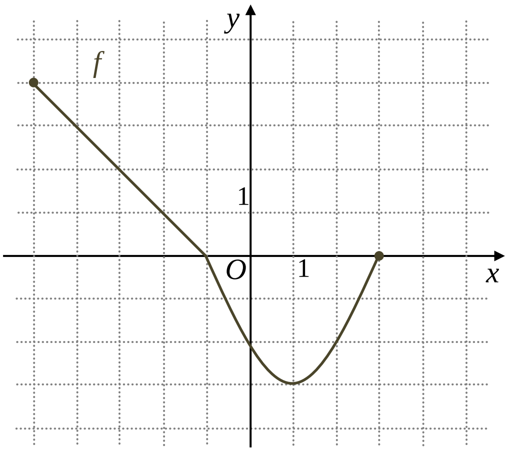
(A) $\frac{3}{\ln 2}$ **(B)** $-\frac{3}{\ln 2}$ **(C)** $\log_2 3$ **(D)** $\log_3 2$

4.2. Determine o conjunto dos números reais que são soluções da inequação $g(x) \geq 2 + \log_2(1-2x)$.

Apresente a resposta usando a notação de intervalos de números reais.

5. Seja f a função, de domínio $[-5, 3]$, cujo gráfico está representado na figura ao lado.

Seja também g a função, de domínio $]2, +\infty[$, definida por $g(x) = \log_3(x-2)$.



5.1. Quanto aos zeros da função $f \circ g$:

(A) existem dois, o $\frac{7}{3}$ e o 29;

(B) existem dois, o -1 e o 3;

(C) existem três, o $\frac{7}{3}$, o 3 e o 2;

(D) não existem.

5.2. Determine, usando a notação de intervalos de números reais, o domínio da função $g \circ f$.

5.3. Considere agora a função h, de domínio $]2, +\infty[$, e tal que $g(x) = h''(x)$.

Sobre o gráfico de h, pode afirmar-se que:

(A) tem a concavidade voltada para baixo em $]0, 2]$ e voltada para cima em $[2, +\infty[$;

(B) tem a concavidade voltada para baixo em $]2, 3]$ e voltada para cima em $[3, +\infty[$;

(C) não tem pontos de inflexão;

(D) tem a concavidade voltada para baixo em $]2, +\infty[$.

6. Considere a função f, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\operatorname{sen}(x+1)}{e^{x+2}-e} & \text{se } x<-1\\ \ln\left(e^{x+1}+1\right)-x & \text{se } x\geq -1\end{cases}$.

6.1. Averigue se a função f é contínua em $x=-1$.

6.2. Mostre que o gráfico de f tem uma assíntota horizontal quando $x\to+\infty$ e indique a sua equação.

7. É dada a função h, de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por $h(x)=\dfrac{\ln(2x+1)}{x+1}-6x$.

7.1. Sabe-se que o gráfico de h tem uma assíntota oblíqua.
Determine o declive dessa assíntota.

7.2. Determine a equação reduzida da reta tangente ao gráfico de h no ponto de abcissa 0.

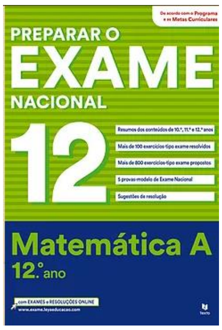
8. Seja g a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $g(x)=3x^2e^{3x-2}$.

Estude a função g quanto à monotonia e à existência de extremos relativos.
Na sua resposta, deve apresentar:
- o(s) intervalo(s) em que a função g é crescente;
- o(s) intervalo(s) em que a função g é decrescente;
- os valores de x para os quais a função g tem extremos relativos, caso existam.

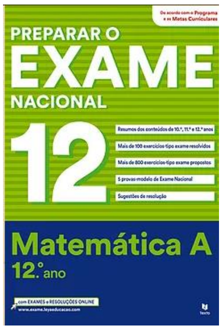
9. Seja f a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x)=\dfrac{3-2\operatorname{sen}(3x)}{3}$.

Dado um número real a, sabe-se que a reta tangente ao gráfico da função f em $x=a$ é paralela à bissetriz dos quadrantes ímpares no intervalo $\left]-\frac{\pi}{3},0\right[$.

Determine a.



FIM



COTAÇÕES

Item																
Cotação (em pontos)																
1.1.	**1.2.**	**2.1.**	**2.2.**	**3.**	**4.1.**	**4.2.**	**5.1.**	**5.2.**	**5.3.**	**6.1.**	**6.2.**	**7.1.**	**7.2.**	**8.**	**9.**	
8	15	15	15	8	8	15	8	10	8	15	15	15	15	15	15	**200**

Formulário

Regras de derivação

$(u+v)' = u' + v'$

$(uv)' = u'v + uv'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

$(u^n)' = nu^{n-1}u' \quad (n \in \mathbb{R})$

$(\operatorname{sen} u)' = u' \cos u$

$(\cos u)' = -u' \operatorname{sen} u$

$(\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u' e^u$

$(a^u)' = u' a^u \ln a \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a} \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

Trigonometria

$\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen} a \ \cos b + \operatorname{sen} b \ \cos a$

$\cos(a+b) = \cos a \ \cos b - \operatorname{sen} a \ \operatorname{sen} b$

Limites notáveis

$\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \quad (n \in \mathbb{N})$

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \quad (p \in \mathbb{R})$