



www.esffranco.edu.pt

(2024/2025)

5.º TESTE DE MATEMÁTICA A – 12.º 9

3.º Período

26/05/2025

Duração: 120 minutos

Nome: _____

N.º: _____

Classificação:

O professor: _____

Na resposta aos itens de escolha múltipla, seleccione a opção correta. Escreva na folha de respostas o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Na resposta aos restantes itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias. Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

1. Numa linha n do triângulo de Pascal, sabe-se que ${}^nC_{14} + {}^nC_{15} = {}^{22}C_{15}$.

Quantos dos elementos dessa linha são menores que 1500 ?

(A) 5

(B) 8

(C) 10

(D) 12

Roberto Oliveira

Exercícios

de

MATEMÁTICA A

para preparar o

Exame Nacional de

2024

(inclui 3 provas modelo)

Contém:
*** mais de 300 itens originais de Matemática A
*** 3 provas modelo originais de Matemática A
*** resolução de TODOS os exercícios

2. O Sporting Clube de Portugal (SCP), o Sport Lisboa e Benfica (SLB) e o Futebol Clube do Porto (FCP) são considerados os três clubes grandes de Portugal.

Atendendo à principal liga de futebol portuguesa, sabe-se que, entre 2000/2001 e 2024/2025:

- os três clubes grandes ficaram nos primeiros três lugares em 68% dos campeonatos;
- em 24% dos campeonatos, os três clubes grandes ficaram nos primeiros três lugares e o SCP ficou em segundo lugar;
- dos campeonatos em que os três clubes grandes não ficaram nos primeiros três lugares, em $\frac{1}{8}$ deles o SCP ficou em segundo lugar.

Escolhe-se, ao acaso, um dos campeonatos de 2000/2001 até 2024/2025 onde o SCP não ficou em segundo lugar.

Determine a probabilidade de os três clubes grandes não terem ficado nos primeiros três lugares.

Apresente o resultado na forma de percentagem, arredondado às unidades.



3. Considere todos os números naturais de seis algarismos que se podem escrever com os algarismos de 1 a 9.

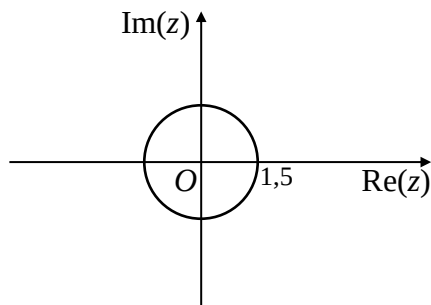
Determine quantos deles são pares e têm exatamente três algarismos iguais a 4.



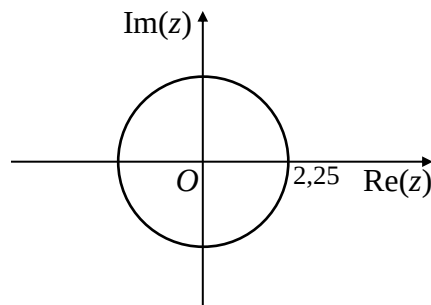
4. Considere, em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, a condição $z = \frac{2,25}{\bar{z}}$.

Em qual das opções seguintes está representado, no plano complexo, o conjunto de pontos definido por esta condição?

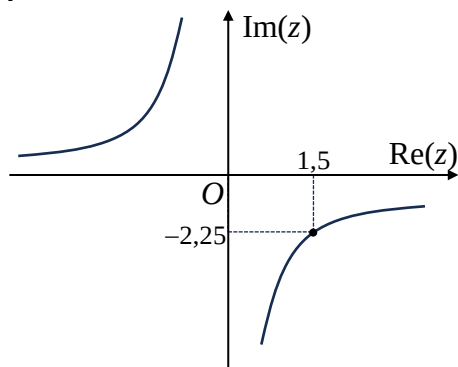
(A)



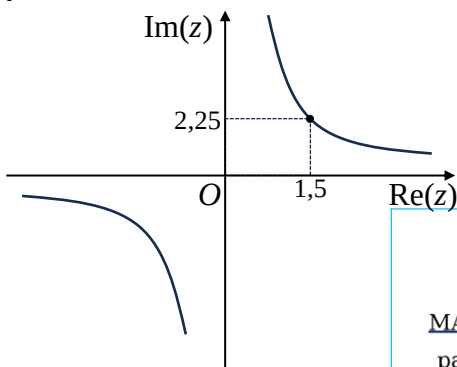
(B)



(C)



(D)



Roberto Oliveira

Exercícios
de
MATEMÁTICA A
para preparar o
Exame Nacional de
2024
(inclui **3 provas modelo**)

Contém:
- mais de 300 temas originais de Matemática A
- 3 provas modelo originais de Matemática A
- resolução de TODOS os exercícios

5. Considere, em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, os números $w_1 = 2i$ e $w_2 = 6 - (a - 3)i$, com $a > 0$.
Complete o texto seguinte, selecionando a opção correta para cada espaço, de acordo com as condições dadas.
Escreva, na folha de respostas, apenas cada um dos números, **I**, **II**, **III** e **IV**, seguido da opção, **a)**, **b)** ou **c)**, selecionada. A cada espaço corresponde uma só opção.

Se $a = 6$, o conjugado de $\frac{w_1}{w_2}$ é **I**.

Sabendo que w_1 é uma solução da equação $z^3 - z + 10i = 0$, uma outra solução é **II**.

$w_1 \times w_2$ é um imaginário puro se e só se **III**.

$\left| \frac{w_2}{w_1} \right| = 5$ se e só se **IV**.

I	II	III	IV
a) $\frac{1}{3} + \frac{2}{3}i$	a) $2 - i$	a) $a = 0$	a) $a = 5$
b) $-\frac{2}{15} - \frac{4}{15}i$	b) $2 + i$	b) $a \neq 3$	b) $a = 8$
c) $\frac{2}{15} - \frac{4}{15}i$	c) $\sqrt[3]{10i}$	c) $a = 3$	c) $a = 11$

6. No conjunto dos números complexos $\mathbb{C}$, sabe-se que o número $k + 8i$ é uma das raízes quadradas do número $36 - 160i$, sendo k um número real.

Determine, sem recorrer à calculadora, o valor de k .

7. Considere, em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, o número $z = 2e^{i\frac{5\pi}{3}}$.

Resolva os itens seguintes sem recorrer à calculadora.

7.1. Determine, na forma trigonométrica, a raiz cúbica de z pertencente ao terceiro quadrante.

7.2. Seja $w = \frac{(2 + 2i)^2 + \sqrt{3} + 5i^{135}}{z}$ um número de $\mathbb{C}$.

Sabendo que w é uma das raízes quartas de um certo número complexo y , determine, na forma algébrica, o valor de y .

8. Considere, em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, um número z tal que $z = \rho e^{i\theta}$, com $\theta \in \left] \frac{\pi}{2}, \pi \right[$.

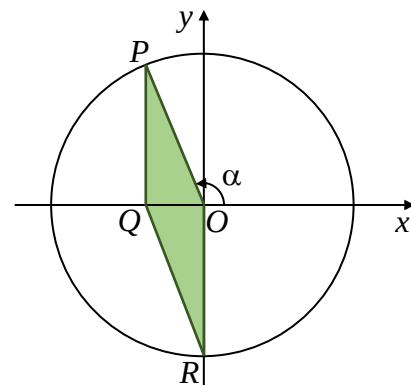
Sabendo que $z^4 + 8\bar{z} = 0$, determine, sem recorrer à calculadora, o valor de ρ e o de θ .

9. Na figura, estão representados, em referencial o.n. xOy , o quadrilátero $[OPQR]$ e a circunferência de centro em O e raio 2.

Sabe-se que:

- o ponto P pertence à circunferência e ao segundo quadrante;
- o ponto Q pertence ao eixo Ox e tem a mesma abscissa que P ;
- o ponto R pertence à circunferência e ao semieixo negativo Oy ;
- α é a inclinação, em radianos, da reta OP , $\alpha \in \left] \frac{\pi}{2}, \pi \right[$.

Mostre que a área do quadrilátero $[OPQR]$ é dada pela expressão $-(\sin(2\alpha) + 2\cos\alpha)$



10. Seja h a função duas vezes diferenciável em $\mathbb{R}$ e tal que $h'(x) = (3 - 2x)e^{3x}$.

10.1. Sabe-se que $h(0) < 0$.

Qual das equações a seguir pode representar a reta tangente ao gráfico de h na origem do referencial?

(A) $y = 3x + 4$ (B) $y = 3x - 4$ (C) $y = -2x - 4$ (D) $y = -2x + 4$

10.2. Sem usar a calculadora, estude a função h quanto ao sentido das concavidades e quanto à existência de pontos de inflexão do seu gráfico, indicando:

- o(s) intervalo(s) onde o gráfico de h tem a concavidade voltada para baixo;
- o(s) intervalo(s) onde o gráfico de h tem a concavidade voltada para cima;
- a(s) abscissa(s) do(s) ponto(s) de inflexão do gráfico de h , se existirem.

Roberto Oliveira

Exercícios

de

MATEMÁTICA A

para preparar o

Exame Nacional de

2024

(inclui 3 provas modelo)

Contém:

- == mais de 500 testes originais de Matemática A
- == 3 provas modelo originais de Matemática A
- == resolução de TODOS os exercícios

- 11.** Considere a função f , de domínio $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, definida, para um certo $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, por

$$f(x) = \begin{cases} \ln(e^x + 3) + 3x & \text{se } x < 0 \\ \frac{\sin x}{1 - e^{ax}} & \text{se } x > 0 \end{cases}.$$

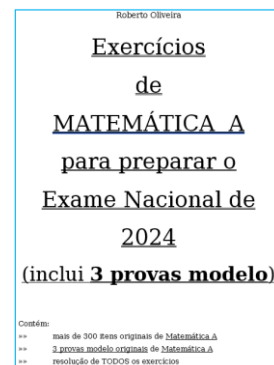
Resolva os itens seguintes sem recorrer à calculadora.

11.1. Determine o valor de a para o qual existe $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

11.2. O gráfico de f admite uma assíntota oblíqua quando x tende para $-\infty$.
Determine uma equação dessa assíntota.

11.3. Resolva, em $]-\infty, 0[$, a equação $f'(x) = \frac{22}{7}$.

Apresente a solução na forma $x = b \ln c$, sendo b e c números inteiros.



- 12.** Chama-se catenária à curva formada por um fio flexível e não extensível suspenso livremente de dois pontos.

Num terreno plano e sem inclinação, foram fixados no chão, em posição vertical, alinhados na mesma direção, dois postes de eletricidade. Um fio elétrico une os topos dos dois postes, sem qualquer interrupção, ficando o fio, por ação da gravidade, suspenso entre esses dois postes, tal como se pode ver na figura.

Relativamente a essa figura, sabe-se que:

- xOy é um referencial ortogonal, no qual, em qualquer dos eixos, cada unidade corresponde a 1 metro;
- o eixo Ox representa a linha de superfície do solo;
- o ponto Q pertence ao semieixo positivo Ox , e o ponto B pertence ao semieixo positivo Oy ;
- $[BO]$ e $[CQ]$ representam os dois postes, designados, respetivamente, por *Poste I* e *Poste II*;
- $OQ = 35$;
- $g(x)$ é a distância ao solo, em metros, do ponto do fio situado entre o ponto B e o ponto C , de abscissa x , para qualquer valor de $x \in [0, 35]$; admita que g é definida por

$$g(x) = 10(e^{0,05x - 0,75} + e^{-0,05x + 0,75}).$$

Um pardal pousou num determinado ponto T do fio.

Sabe-se que os pontos T e B estão exatamente à mesma distância do solo.

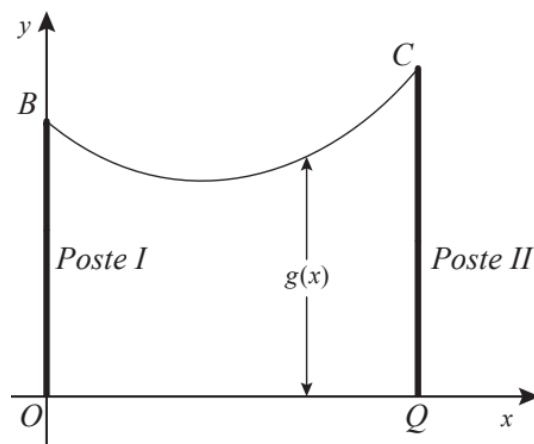
Determine, recorrendo à calculadora, a distância do ponto T ao ponto Q .

Apresente o resultado, em metros, arredondado às unidades.

Na sua resposta:

- apresente uma equação que lhe permita resolver o problema;
- reproduza, num referencial, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora que lhe permite(m) resolver a equação e apresente a(s) coordenada(s) do(s) ponto(s) relevante(s) arredondada(s) às milésimas.

Adaptado do Exame Nacional de Matemática B, fase especial de 2012



13. Uma determinada substância radioativa desintegra-se de tal modo que a massa existente $Q(t)$ é dada, após t anos, por $Q(t) = Q_0 \times e^{-0,03t}$, sendo Q_0 a quantidade inicial da substância radioativa.

Sabe-se que, de x em x anos, a massa da substância reduz-se a um terço.

Qual é, com arredondamento às unidades, o valor de x ?

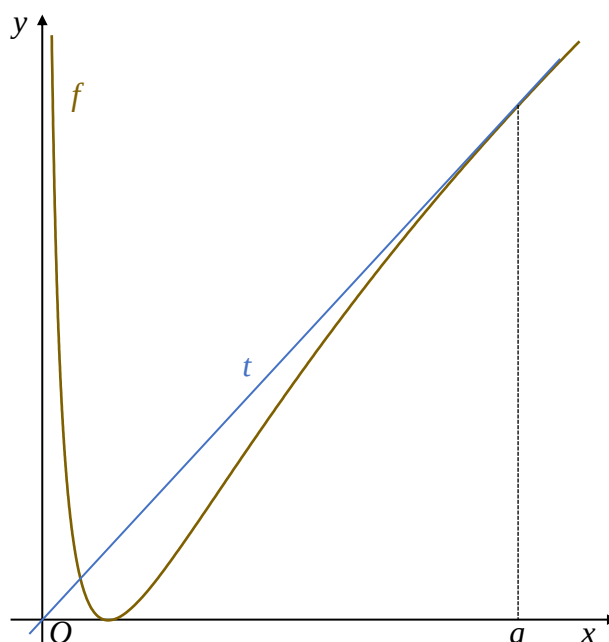
- (A) 31 (B) 34 (C) 37 (D) 40



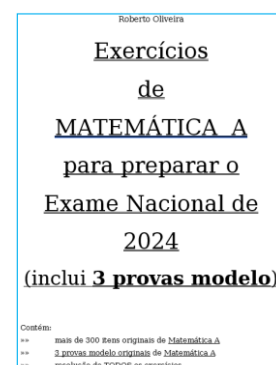
14. Considere, no referencial xOy da figura, parte do gráfico da função f , de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por $f(x) = 2 \ln^2 x$.

Tal como sugere esse gráfico, o ponto de abcissa positiva a admite a reta tangente t , que passa na origem do referencial.

Determine a equação reduzida de t .



FIM



COTAÇÕES

Item																		
Cotação (em pontos)																		
1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.1.	7.2.	8.	9.	10.1.	10.2.	11.1.	11.2.	11.3.	12.	13.	14.	
8	12	12	8	8	12	12	13	13	12	8	13	12	12	12	12	8	13	200

Roberto Oliveira

Exercícios
de
MATEMÁTICA A
para preparar o
Exame Nacional de
2024
(inclui **3 provas modelo**)

Contém:
-- mais de 300 temas originais de Matemática A
-- 3 provas modelo originais de Matemática A
-- resolução de TODOS os exercícios

Formulário

Trigonometria

$$\sin(a + b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$$

$$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

Regras de derivação

$$(u + v)' = u' + v'$$

$$(uv)' = u'v + uv'$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

$$(u^n)' = nu^{n-1}u' \quad (n \in \mathbb{R})$$

$$(\sin u)' = u' \cos u$$

$$(\cos u)' = -u' \sin u$$

$$(\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$$

Complexos

$$(\rho e^{i\theta})^n = \rho^n e^{in\theta}$$

$$\sqrt[n]{\rho} e^{i\theta} = \sqrt[n]{\rho} e^{i \frac{\theta + 2k\pi}{n}} \quad k \in \{0, \dots, n-1\} \text{ e } n \in \mathbb{N}$$

$$(e^u)' = u'e^u$$

$$(a^u)' = u'a^u \ln a \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$$

$$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$$

$$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a} \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$$

Limites notáveis

$$\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \quad (n \in \mathbb{N})$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \quad (p \in \mathbb{R})$$