www.esffranco.edu.pt
(2024/2025)

3.º TESTE DE MATEMÁTICA A – 12.º 9

2.º Período | 11/02/2025 | Duração: 90 minutos

Nome: ______________________________ N.º:

Classificação: ___ ___ , ___ O professor:

Na resposta aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Escreva na folha de respostas o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Na resposta aos restantes itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias. Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

---

1. **1.1.** Uma partícula desloca-se sobre uma reta numérica, cuja unidade é o metro.

A abcissa da respetiva posição no instante t, em segundos, é dada por $p(t)=9t^3-30t^2$, com $t\geq 0$.

Sem usar a calculadora (exceto para cálculos numéricos), determine, em m/s^2, a aceleração da partícula no instante em que ela volta a passar na origem do referencial.

1.2. Uma outra partícula desloca-se sobre a reta numérica, cuja unidade também é o metro e a abcissa da respetiva posição no instante t, em segundos, é dada por $q(t)=\sqrt{2t^3+2t+6}$, com $t\geq 0$.

Pretende-se saber em que instante a velocidade da partícula é igual a 2 m/s.

Qual das equações seguintes traduz este problema?

(A) $3t^2+1=-2\sqrt{2t^3+2t+6}$ **(B)** $3t^2+1=2\sqrt{2t^3+2t+6}$

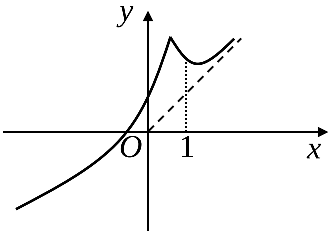
(C) $6t^2+2=-\sqrt{2t^3+2t+6}$ **(D)** $6t^2+2=\sqrt{2t^3+2t+6}$

2. De uma função f, duas vezes diferenciável em $\mathbb{R}$, sabe-se que:

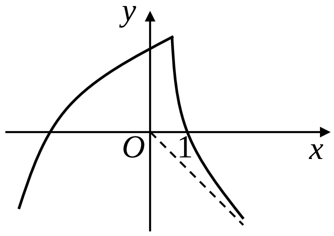
- $f\,'$ é crescente em $]-\infty,0]$;
- $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}<0$;
- $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)+x\right)=0$.

Em cada um dos referenciais o.n. xOy seguintes, I, II e III, estão representadas parte do gráfico de uma função e a assíntota a esse gráfico.

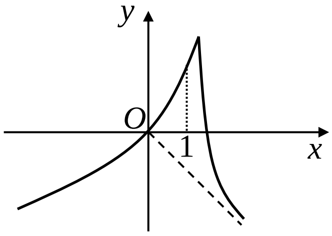
(I)



(II)



(III)



Justifique que em nenhum dos referenciais anteriores pode estar representada parte do gráfico da função f.

Na sua resposta, apresente, para cada um dos referenciais, uma razão que justifique a impossibilidade de nele estar representada parte do gráfico da função f.

3. Seja f a função duas vezes diferenciável em $\mathbb{R}\setminus\{-2\}$ e tal que $f'(x)=\frac{3x^2+15}{2x+4}$.

3.1. Sabe-se que -1 é um zero da função f.

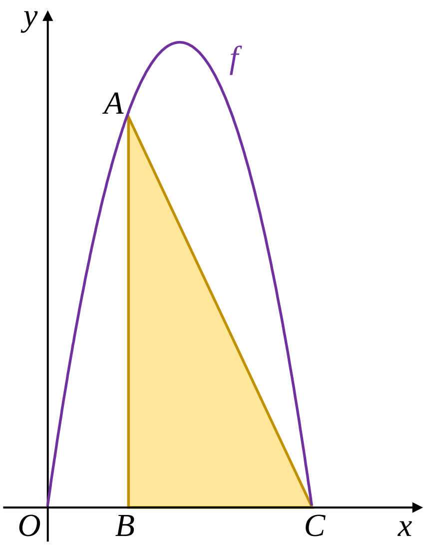
Qual das seguintes representa a equação reduzida da reta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa -1?

(A) $y=-12x+12$ **(B)** $y=9x-9$ **(C)** $y=9x+9$ **(D)** $y=-12x-12$

3.2. Sem usar a calculadora, estude a função f quanto ao sentido das concavidades e quanto à existência de pontos de inflexão do seu gráfico, indicando:

- o(s) intervalo(s) onde o gráfico de f tem a concavidade voltada para baixo;
- o(s) intervalo(s) onde o gráfico de f tem a concavidade voltada para cima;
- a(s) abcissa(s) do(s) ponto(s) de inflexão do gráfico de f, se existirem.

4. Considere, na figura ao lado, parte do gráfico da função f, de domínio $\mathbb{R}$, e o triângulo $[ABC]$, retângulo em B.



Sabe-se que:

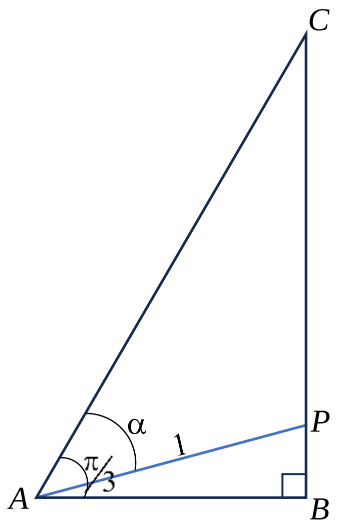
- $f(x)=7x-x^2$;
- o vértice A pertence ao gráfico de f e tem abcissa x, com $0<x<7$;
- o vértice B pertence ao eixo Ox e tem a mesma abcissa de A;
- o vértice C tem abcissa superior à do vértice B e pertence ao eixo Ox e ao gráfico de f.

Seja $A(x)$ a área do triângulo $[ABC]$ em função de x.

4.1. Mostre que $A(x)=\frac{x^3}{2}-7x^2+\frac{49}{2}x$.

4.2. Determine, sem usar a calculadora, o valor de x para o qual a área do triângulo $[ABC]$ é máxima.

5. Considere o triângulo $[ABC]$, retângulo em B, da figura.



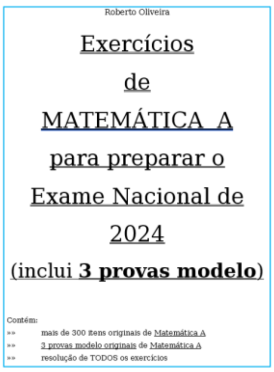
Seja P um ponto do lado $[BC]$. Tal como a figura sugere:

- $\overline{AP}=1$;
- $B\hat{A}C=\frac{\pi}{3}$;
- $P\hat{A}C=\alpha$, $\alpha\in\left]0,\frac{\pi}{3}\right[$.

Qual das expressões a seguir dá o valor de $\overline{PB}$ em função de α ?

(A) $\frac{\sqrt{3}\operatorname{sen}\alpha-\cos\alpha}{2}$ **(B)** $\frac{\sqrt{3}\operatorname{sen}\alpha+\cos\alpha}{2}$

(C) $\frac{\sqrt{3}\cos\alpha-\operatorname{sen}\alpha}{2}$ **(D)** $\frac{\sqrt{3}\cos\alpha+\operatorname{sen}\alpha}{2}$

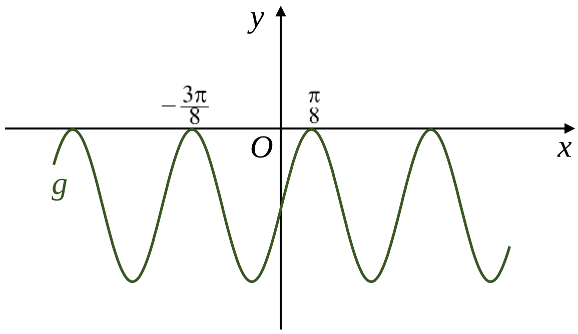


6. Qual é o valor de $\lim\limits_{x\to\pi}\frac{\cos^2\left(\frac{x}{4}\right)-\operatorname{sen}^2\left(\frac{x}{4}\right)}{\operatorname{sen}x}$?

(A) $\frac{4}{7}$ **(B)** $-\frac{1}{2}$ **(C)** $\frac{1}{2}$ **(D)** $-\frac{4}{7}$

7. Ao lado está parte do gráfico da função g, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $g(x) = 2\operatorname{sen}(2x)\cos(2x) - 1$.

Tal como sugere a figura, $-\frac{3\pi}{8}$ e $\frac{\pi}{8}$ são dois zeros consecutivos de g.



Complete o texto seguinte, selecionando a opção correta para cada espaço, de acordo com as condições dadas.

Escreva, na folha de respostas, apenas cada um dos números, **I**, **II**, **III** e **IV**, seguido da opção, **a)**, **b)** ou **c)**, selecionada. A cada espaço corresponde uma só opção.

O período positivo mínimo de g é __**I**__.

Uma expressão geral dos zeros de g é __**II**__.

Se $\operatorname{tg}(2a) = \sqrt{3}$ para qualquer número real a, então $g(a)$ é igual a __**III**__.

A reta tangente ao gráfico de g no ponto de abcissa $\frac{5\pi}{8}$ é paralela à reta de equação __**IV**__.

I	**II**	**III**	**IV**
a) π	**a)** $\frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2}k,\ k \in \mathbb{Z}$	**a)** 0	**a)** $y = \frac{\pi}{2}$
b) $\frac{\pi}{2}$	**b)** $\frac{\pi}{8} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$	**b)** $\frac{\sqrt{3}-2}{2}$	**b)** $y = \frac{5\pi}{8}$
c) $\frac{\pi}{4}$	**c)** $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}k,\ k \in \mathbb{Z}$	**c)** $\frac{2-\sqrt{3}}{2}$	**c)** $y = 0$

8. Recorrendo a modelos trigonométricos, é possível prever a altura da maré (altura da água do mar relativamente ao Zero Hidrográfico), num determinado local.

As expressões «preia-mar» e «baixa-mar» designam, respetivamente, um valor máximo e um valor mínimo da altura da maré.

De acordo com as previsões do Instituto Hidrográfico para o dia 25 de abril de 2024, a altura da maré $h(t)$, em metros, no porto de Sesimbra, t horas após as $16\text{h}\ 18\text{min}$ desse dia, até às $22\text{h}\ 23\text{min}$ do mesmo dia, é dada, aproximadamente, por

$$h(t) = 2 + 1{,}2\cos\left(\frac{\pi}{6{,}08}t\right)$$

O argumento da função cosseno está em radianos.

Sabe-se que a taxa média de variação da função h em $[0, a]$ é igual a $-0{,}4$, para um certo $a \in \left]0, 5\right[$.

Determine, recorrendo às capacidades gráficas da calculadora, o valor de a, sabendo que esse valor existe e é único.

Apresente o resultado arredondado às centésimas.

Na sua resposta:

– apresente uma equação que lhe permita resolver o problema;

– reproduza, num referencial, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora que lhe permite(m) resolver a equação, e apresente a(s) abcissa(s) do(s) ponto(s) relevante(s) arredondada(s) às centésimas.

Se, nos cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, três casas decimais.

Adaptado do Exame Nacional de Matemática B, época especial de 2024

9. Considere a função *f*, de domínio $[1,+\infty[$, definida por $f(x)=\begin{cases}\dfrac{2-x}{\operatorname{sen}(2x-4)} & \text{se } 1\leq x<2\\ \cos^2(\pi x)+\pi x-2\pi-\dfrac{3}{2} & \text{se } x\geq 2\end{cases}$.

Resolva os itens **9.2.** e **9.3.** sem recorrer à calculadora.

9.1. Quanto à assíntota horizontal do gráfico de *f* quando $x\to-\infty$:

(A) não existe; **(B)** tem equação $y=2$;

(C) tem equação $y=4$; **(D)** tem equação $y=-2$.

9.2. Estude a continuidade da função *f* em $x=2$.

9.3. Estude, no intervalo $]2,3]$, a função *f* quanto à monotonia e quanto à existência de extremos relativos.
Na sua resposta, apresente os intervalos de monotonia e os valores de *x* para os quais a função *f* tem extremos relativos.

10. Sejam *f*, *g* e *h* as funções, de domínio $\left]0,\dfrac{3\pi}{4}\right[$, definidas, respetivamente, por

$$f(x)=\frac{x}{x^2+1},\quad g(x)=\operatorname{tg} x \quad \text{e} \quad h(x)=(f\circ g)(x)$$

Determine, sem usar a calculadora, a(s) abcissa(s) do(s) ponto(s) de interseção entre o gráfico da função *h* e a reta de equação $y=-\dfrac{\sqrt{2}}{4}$.

Sugestão: comece por mostrar que, $\forall x\in\left]0,\dfrac{3\pi}{4}\right[,\ h(x)=\dfrac{\operatorname{sen}(2x)}{2}$.

FIM

COTAÇÕES

Item															
Cotação (em pontos)															
1.1.	**1.2.**	**2.**	**3.1.**	**3.2.**	**4.1.**	**4.2.**	**5.**	**6.**	**7.**	**8.**	**9.1.**	**9.2.**	**9.3.**	**10.**	
16	8	16	8	16	16	16	8	8	16	16	8	16	16	16	**200**

Formulário

Trigonometria

$\operatorname{sen}(a+b)=\operatorname{sen} a\ \cos b+\operatorname{sen} b\ \cos a$

$\cos(a+b)=\cos a\ \cos b-\operatorname{sen} a\ \operatorname{sen} b$

Limite notável

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sen} x}{x}=1$

Regras de derivação

$(u+v)'=u'+v'$

$(uv)'=u'\,v+u\,v'$

$\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$

$(u^n)'=n\,u^{n-1}u'\quad(n\in\mathbb{R})$

$(\operatorname{sen} u)'=u'\ \cos u$

$(\cos u)'=-u'\ \operatorname{sen} u$

$(\operatorname{tg} u)'=\dfrac{u'}{\cos^2 u}$