www.esffranco.edu.pt
(2024/2025)

3.º TESTE DE MATEMÁTICA A – 12.º 16

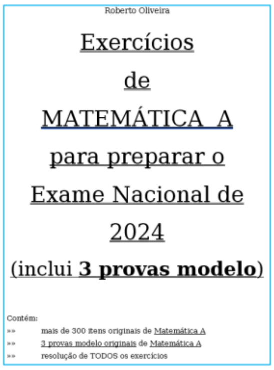
2.º Período | 12/02/2025 | Duração: 90 minutos

Nome: ______________________________ N.º:

Classificação: ___ , ___ O professor:

Na resposta aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Escreva na folha de respostas o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Na resposta aos restantes itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias. Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

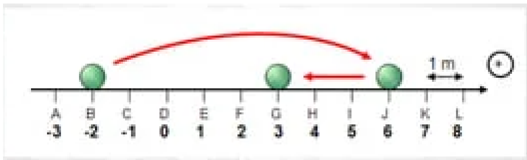


1. Considere a função *f*, de domínio $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$, definida por $f(x)=\frac{4}{x+1}$.

Qual é o valor de $\lim\limits_{x\to -5}\frac{f(x)+1}{x+5}$?

(A) $+\infty$ **(B)** $\frac{1}{4}$ **(C)** 0 **(D)** $-\frac{1}{4}$

2. Um ponto P desloca-se sobre uma reta numérica de tal forma que a respetiva abcissa, em metros, como função do tempo t, em segundos, é dada por $x(t)=4t^2-18t+5$, com $t\geq 0$.



Complete o texto seguinte, selecionando a opção correta para cada espaço, de acordo com as condições dadas.

Escreva, na folha de respostas, apenas cada um dos números, **I**, **II**, **III** e **IV**, seguido da opção, **a)**, **b)** ou **c)**, selecionada. A cada espaço corresponde uma só opção.

Depois de iniciado o movimento, a abcissa de P volta a ser igual a 5 m no instante __**I**__.

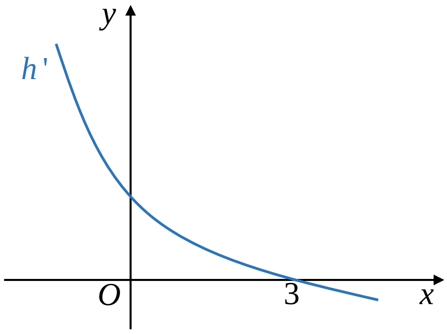
A velocidade média da abcissa de P nos primeiros dois segundos é __**II**__.

Entre os instantes $t=3$ e $t=6$, a velocidade máxima atingida pelo ponto P é __**III**__ e a aceleração do ponto, nesse instante, é __**IV**__.

I	II	III	IV
a) $t=45$	**a)** -20 m/s	**a)** 22 m/s	**a)** 8 m/s^2
b) $t=4{,}5$	**b)** -10 m/s	**b)** 26 m/s	**b)** 10 m/s^2
c) $t=195$	**c)** 31 m/s	**c)** 30 m/s	**c)** 12 m/s^2

3. Seja h uma função duas vezes diferenciável em $\mathbb{R}$.

Na figura junta, encontra-se parte do gráfico de h', primeira derivada de h.



Tal como essa figura sugere, h' é decrescente em $\mathbb{R}$ e tem um zero para $x=3$.

Qual é a proposição falsa?

(A) A função h é crescente em $\left]-\infty,3\right]$.

(B) A função h é decrescente em $\left[3,+\infty\right[$.

(C) O gráfico de h tem a concavidade voltada para cima em $\mathbb{R}$.

(D) A função h tem um máximo relativo para $x=3$.

4. Seja f a função duas vezes diferenciável em $\mathbb{R}$ e tal que $f'(x)=\left(x^2+3x\right)^3$.

Sem usar a calculadora (exceto para cálculos numéricos), resolva os itens seguintes.

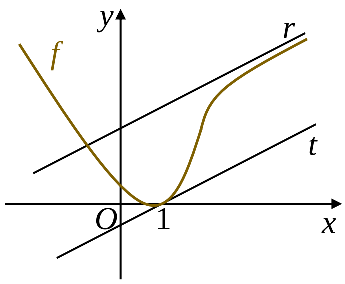
4.1. Sabe-se que o ponto $P(-2,1)$ pertence ao gráfico da função f e que a reta tangente ao gráfico de f nesse ponto interseta o eixo Ox no ponto Q.

Determine a abcissa de Q.

4.2. Estude a função f quanto ao sentido das concavidades e quanto à existência de pontos de inflexão do seu gráfico, indicando:

- o(s) intervalo(s) onde o gráfico de f tem a concavidade voltada para baixo;
- o(s) intervalo(s) onde o gráfico de f tem a concavidade voltada para cima;
- a(s) abcissa(s) do(s) ponto(s) de inflexão do gráfico de f, se existirem.

5. Na figura ao lado, estão representadas, em referencial o.n. Oxy, parte do gráfico da função f, duas vezes diferenciável em $\mathbb{R}$, a reta t, tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa 1, e a reta r, assíntota ao gráfico de f quando x tende para $+\infty$.



Sabe-se que:

- 1 é um zero de f;
- a equação de r é $y=\frac{1}{2}x+2$;
- as retas r e t são paralelas;
- o gráfico de f tem concavidade voltada para cima em $\left]-\infty,1\right]$;

Considere as proposições seguintes.

I. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-\frac{1}{2}x+2\right)=0$.

II. $\lim\limits_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$.

III. $f''(0)=0$.

Justifique que as proposições I, II e III são falsas.

Na sua resposta, apresente, para cada uma das proposições, uma razão que justifique a sua falsidade.

6. O custo de construção, em milhares de euros, de x quilómetros de uma estrada é dado pela função definida por $c(x)=500-18x+30\sqrt{x^2+100}$, com $x \in \left]0,50\right[$

6.1. Qual é, com duas casas decimais e em milhares de euros por quilómetro, o valor da taxa média de variação de c nos primeiros 4 quilómetros de estrada construídos?

(A) $24{,}44$ **(B)** $-24{,}44$ **(C)** $12{,}22$ **(D)** $-12{,}22$

6.2. Determine, sem usar a calculadora, o valor do custo mínimo de construção da estrada.
Apresente o resultado em milhares de euros.

7. Considere as funções f e g, de domínio $[0,3]$, definidas respetivamente por $f(x)=\frac{x^2}{x+2}$ e $g(x)=\cos x$.

Sabe-se que a equação $(f\circ g)(x)=0,2$ tem exatamente duas soluções em $[0,3]$.

Determine, recorrendo à calculadora gráfica, essas soluções, arredondadas às centésimas.

Na sua resposta, deve:

- apresentar uma expressão simplificada da função $f\circ g$;
- reproduzir, num referencial, o gráfico da função ou os gráficos das funções que tiver necessidade de visualizar, devidamente identificado(s);
- assinalar os pontos relevantes para responder à questão colocada.

8. De um número real $a \in \left]0,\frac{\pi}{2}\right[$, sabe-se que $\cos a=\frac{1}{4}$.

Qual é o valor de $\operatorname{sen}\left(a+\frac{3\pi}{4}\right)$?

(A) $\frac{\sqrt{2}}{4}\left(1+\sqrt{2}\right)$ **(B)** $\frac{\sqrt{2}}{4}\left(1-\sqrt{2}\right)$ **(C)** $\frac{\sqrt{2}}{8}\left(1+\sqrt{15}\right)$ **(D)** $\frac{\sqrt{2}}{8}\left(1-\sqrt{15}\right)$

9. Resolva, em $\mathbb{R}$, a equação $\cos x-\sqrt{3}\operatorname{sen} x=2\cos\frac{\pi}{9}$.

10. Seja g a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $g(x)=\begin{cases}1-6\cos x & \text{se } x\leq 0\\ \frac{\operatorname{sen}(5x+\pi)}{3x} & \text{se } x>0\end{cases}$.

Resolva os itens **10.2.** e **10.3.** sem recorrer à calculadora.

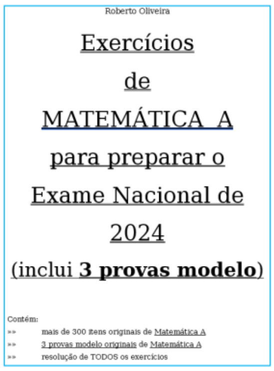
10.1. Quanto à assíntota horizontal do gráfico de g quando $x\to+\infty$:

(A) tem equação $y=\frac{5}{3}$; **(B)** tem equação $y=0$;

(C) tem equação $y=\frac{\pi}{3}$; **(D)** não existe.

10.2. Estude a continuidade da função g em $x=0$.

10.3. Resolva, em $[-2\pi,0]$, a equação $g(x)=4\operatorname{sen}\frac{x}{2}$.

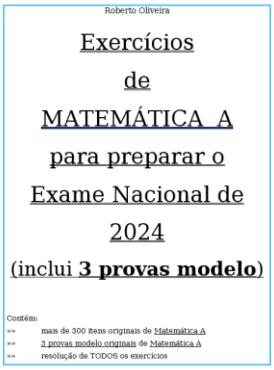


11. Considere a função f, de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por $f(x)=\left(2x^2+2\right)\cos\left(\frac{9x}{x^2+1}+\frac{\pi}{2}\right)$.

Sabe-se que o gráfico de f admite uma assíntota de equação $y=a\,x$.

Determine a.

FIM



COTAÇÕES

Item															
Cotação (em pontos)															
1.	**2.**	**3.**	**4.1.**	**4.2.**	**5.**	**6.1.**	**6.2.**	**7.**	**8.**	**9.**	**10.1.**	**10.2.**	**10.3.**	**11.**	
8	16	8	16	16	16	8	16	16	8	16	8	16	16	16	**200**

Formulário

Trigonometria

$\operatorname{sen}(a+b)=\operatorname{sen}a\,\cos b+\operatorname{sen}b\,\cos a$

$\cos(a+b)=\cos a\,\cos b-\operatorname{sen}a\,\operatorname{sen}b$

Limite notável

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}x}{x}=1$

Regras de derivação

$(u+v)'=u'+v'$

$(uv)'=u'\,v+u\,v'$

$\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}$

$(u^n)'=n\,u^{n-1}u'\quad(n\in\mathbb{R})$