Proposta de teste de avaliação [novembro – 2021]

Nome: ____

Ano / Turma: _________ **N.º:** _____ **Data:** ___ - ____ - ___

1. O pai do João nasceu no ano **1972**.

Na época natalícia, todos os anos, compra uma fração da Lotaria Clássica de Natal.

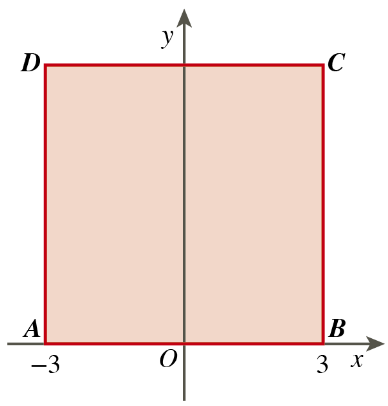
Na escolha do número da fração coloca as seguintes condições:

- tem de ser um número com cinco algarismos diferentes e maior do que 9999;
- todos os algarismos do número do ano em que nasceu têm de fazer parte do número.

Quantos números existem nestas condições?

(A) 216 **(B)** 1080 **(C)** 1 451 520 **(D)** 696

2. Considera o quadrado [*ABCD*] representado na figura, em referencial o.n. *Oxy*, e a função *f*, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = x^2$.



Sabe-se que:

- o ponto *A* tem coordenadas $(-3, 0)$;
- o ponto *B* tem coordenadas $(3, 0)$;
- os pontos *C* e *D* têm ordenada positiva;
- Q é o conjunto dos pontos do quadrado [*ABCD*] cujas coordenadas são números inteiros.

Escolhe-se, ao acaso, um ponto do conjunto Q.

Qual é o valor da probabilidade, arredondada às milésimas, de o ponto escolhido pertencer o gráfico de *f*?

(A) 0,102 **(B)** 0,139 **(C)** 0,082 **(D)** 0,111

3. Cada cartão do jogo "Raspadinha" tem círculos verdes e círculos azuis para raspar.

Sabe-se que:

- 75% dos círculos são verdes e os restantes são azuis;
- 8% dos círculos azuis têm prémio.

3.1. Um jogador compra um cartão e raspa, ao acaso, um círculo.

Qual é a probabilidade, em percentagem, de raspar um círculo azul com prémio?

3.2. Um jogador compra um cartão e raspa, ao acaso, um círculo.

Sabe-se que a probabilidade de obter prémio é 11%.

Determina a percentagem de círculos verdes com prémio.

4. Em relação a uma linha do Triângulo de Pascal, sabe-se que o quarto elemento é 364 e o antepenúltimo é 91.

Qual é o número que representa o quarto elemento da linha seguinte?

(A) 1365 **(B)** 455 **(C)** 273 **(D)** 728

5. Um dos termos do desenvolvimento de $\left(\frac{2}{x}-x\right)^8$, com $x \neq 0$, é independente de x.

Qual é esse termo?

(A) 1792 **(B)** -896 **(C)** 1120 **(D)** -448

6. Num saco há três dados cúbicos indistinguíveis ao tato. Dois dos dados têm as faces pontuadas de 1 a 6. No outro dado, há três faces com um ponto e cada uma das outras três tem seis pontos.

Ao acaso, são retirados do saco, de uma só vez, dois dados.

De seguida, os dados retirados do saco são lançados.

Determina a probabilidade de ocorrer pontução 6 nos dois dados que foram lançados.

Apresenta o resultdo na forma de fração irredutível.

7. Seja Ω o espaço de resultados associado a uma certa experiência aleatória.

Sejam A e B dois acontecimentos ($A \subset \Omega$ e $B \subset \Omega$), possíveis e independentes.

Mostra que $P\left(\overline{A}|B\right) = P\left(\overline{A}\right)$.

Nota: $P\left(\overline{A}|B\right)$ representa a probabilidade condicionada.

8. Considera a sucessão (u_n) de termo geral $u_n = \dfrac{n^2-1}{n+2}$.

Seja f uma função de domínio $\mathbb{R}^+$.

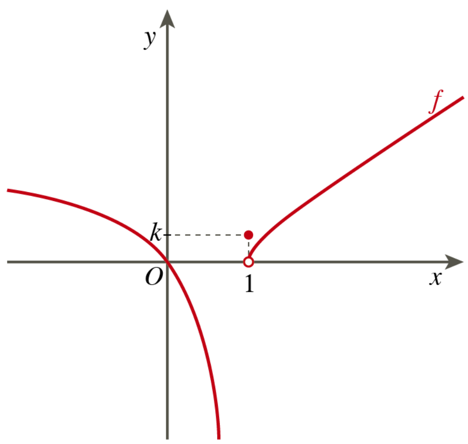
Sabe-se que as retas de equações $x=0$ e $y=3$ são assíntotas ao gráfico da função f.

A que é igual $\lim\left(f\left(u_n\right)\right)$?

(A) 0 **(B)** $+\infty$ **(C)** $\dfrac{1}{3}$ **(D)** 3

9. Seja f a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2 - x} & \text{se } x > 1 \\ k & \text{se } x = 1 \; ; \; k \in \mathbb{R} \\ \dfrac{2x}{x-1} & \text{se } x < 1 \end{cases}$$



Sabe-se que k é a ordenada do ponto de interseção da assíntota oblíqua com a assíntota vertical ao gráfico de f.

Determina $f(1)$.

FIM

Cotações											Total
Questões	**1.**	**2.**	**3.1**	**3.2**	**4.**	**5.**	**6.**	**7.**	**8.**	**9.**	
Pontos	15	15	20	25	15	15	25	25	15	30	**200**

1. O zero não faz parte do número ou o zero faz parte do número.

No caso de o zero não fazer parte do número:

Os algarismos 1, 9, 7 e 2 ocupam quatro das cinco "posições" podendo permutar entre si.

O outro algarismo tem cinco possibilidade (3, 4, 5, 6 ou 8).

$^{5}C_{4} \times 4! \times 5 = 600$

No caso de o zero fazer parte do número:

O zero pode ocupar uma de quatro "posições" (o número não pode começar por zero, para ser maior do que 9999), e as restantes quatro posições são ocupadas pelos algarismos 1, 9, 7 e 2, que podem permutar entre si.

$4 \times 4! = 96$

No total há $600 + 96 = 696$ possibilidades

Resposta: **(D)** 696

2. $Q = \{(x, y),\ -3 \leq x \leq 3\ \wedge\ 0 \leq y \leq 6\ \wedge\ x, y \in \mathbb{Z}\}$

$\# Q = 7 \times 7 = 49$

Há cinco pontos do gráfico de *f* que pertencem a Q:

$(-2,4);\ (-1,1);\ (0,0);\ (1,1);\ (2,4)$

Seja p a probabilidade pedida.

$$p = \frac{5}{49} \approx 0{,}102$$

Resposta: **(A)** 0,102

3.

3.1.

Sejam A e B os acontecimentos.

A: " escolher círculo azul"

B. " obter prémio"

$P(A \cap B) = P(A) \times P(B|A) = 0{,}25 \times 0{,}08 = 0{,}02$

Resposta: 2%

3.2. Seja x a percentagem de círculos verdes com prémio.

Sejam A, B e V os acontecimentos:

A: "escolher círculo azul"

B: "obter prémio"

V: "escolher círculo verde"

$$P(B) = P(A \cap B) + P(V \cap B) = P(A) \times P(B|A) + P(V) \times P(B|V)$$

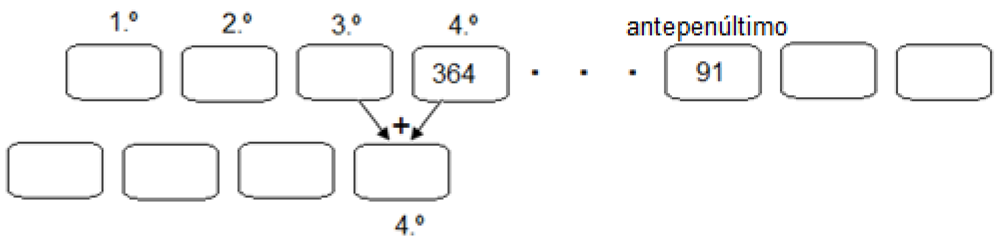
Assim: $0{,}11 = 0{,}25 \times 0{,}08 + 0{,}75x$

$0{,}11 = 0{,}25 \times 0{,}08 + 0{,}75x \Leftrightarrow x = 0{,}12$

Resposta: 12% dos círculos verdes têm prémio.

4. O antepenúltimo elemento da linha é igual ao terceiro elemento dessa linha. Logo, o terceiro elemento é 91.

A soma do terceiro com o quarto elementos da linha é igual ao quarto elemento da linha seguinte.



$364 + 91 = 455$

Resposta: **(B)** 455

5. $$\left(\frac{2}{x} - x\right)^8 = \sum_{k=0}^{8} {}^8C_k \left(\frac{2}{x}\right)^{8-k} (-x)^k = \sum_{k=0}^{8} {}^8C_k\, 2^{8-k} x^{-8+k} x^k (-1)^k = \sum_{k=0}^{8} (-1)^k\, {}^8C_k\, 2^{8-k} x^{2k-8}$$

O termo independente de x resulta quando $2k - 8 = 0$, ou seja, $k = 4$.

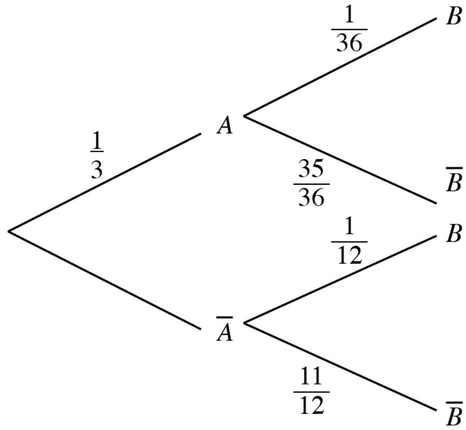
Esse termo é: $(-1)^4\, {}^8C_4 2^4 = 1120$

Resposta: **(C)** 1120

6. Considera os acontecimentos:

A: "escolher dois dados pontuados de igual forma"

B: "ocorrer pontuação 6 nos dois dados lançados"



$$P(A)=\frac{{}^{2}C_2}{{}^{3}C_2}=\frac{1}{3} \quad \text{e} \quad P(\overline{A})=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$$

$$P(B|A)=\frac{1}{6\times 6}=\frac{1}{36} \qquad P(\overline{B}|A)=1-\frac{1}{36}=\frac{35}{36}$$

$$P(B|\overline{A})=\frac{1\times 3}{6\times 6}=\frac{3}{36}=\frac{1}{12} \qquad P(\overline{B}|\overline{A})=1-\frac{1}{12}=\frac{11}{12}$$

$$P(B)=P(A\cap B)+P(\overline{A}\cap B)=\frac{1}{3}\times\frac{1}{36}+\frac{2}{3}\times\frac{1}{12}=\frac{1}{108}+\frac{6}{108}=\frac{7}{108}$$

Resposta: $\frac{7}{108}$

7. Sabe-se que $P(A\cap B)=P(A)P(B)$

$$P(\overline{A}|B)=\frac{P(\overline{A}\cap B)}{P(B)}=\frac{P(B\setminus(A\cap B))}{P(B)}=$$

$$=\frac{P(B)-P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{P(B)-P(A)P(B)}{P(B)}=$$

$$=\frac{P(B)(1-P(A))}{P(B)}=1-P(A)=P(\overline{A})$$

Tal como se pretendia mostrar $P(\overline{A}|B)=P(\overline{A})$.

8. $\lim \dfrac{n^2-1}{n+2} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim \dfrac{n^2\left(1-\dfrac{1}{n^2}\right)}{n\left(1+\dfrac{2}{n}\right)} = \lim \left(n \times \dfrac{1-\dfrac{1}{n^2}}{1+\dfrac{2}{n}} \right) = +\infty \times \dfrac{1-0}{1+0} = +\infty$

$\lim(u_n) = +\infty$ e $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 3$

Conclui-se que $\lim\left(f(u_n)\right) = 3$.

Resposta: **(D)** 3

9. **Assíntota vertical**

$$\lim_{x\to 1^+} \sqrt{x^2-x} = 0$$

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{2x}{x-1} = \frac{2}{0^-} = -\infty$$

A reta definida por $x=1$ é assíntota vertical ao gráfico da função *f*.

Assíntota oblíqua

$y = mx + b$

$$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2-x}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{\frac{x^2-x}{x^2}} = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{1-\frac{1}{x}} = \sqrt{1-0} = 1$$

$$b = \lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2-x} - x\right) \overset{\infty-\infty}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2-x}-x\right)\left(\sqrt{x^2-x}+x\right)}{\left(\sqrt{x^2-x}+x\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-x}{x\sqrt{1-\frac{1}{x}}+x} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{-x}{x\left(\sqrt{1-\frac{1}{x}}+1\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-1}{\sqrt{1-\frac{1}{x}}+1} = -\frac{1}{2}$$

A reta definida por $y = x - \dfrac{1}{2}$ é assíntota oblíqua ao gráfico da função *f*.

Interseção da assíntota oblíqua com a assíntota vertical:

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = x - \dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

O ponto de interseção pedido tem coordenadas $\left(1, \dfrac{1}{2}\right)$.

Resposta: $f(1) = k = \dfrac{1}{2}$