Teste de Matemática A

2019 / 2020

Teste N.º 4

Matemática A

Duração do Teste: 90 minutos

10.º Ano de Escolaridade

Nome do aluno: ____ N.º: ___ Turma: ___

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta.

Não é permitido o uso de corretor. Risque aquilo que pretende que não seja classificado.

É permitido o uso de calculadora.

Apresente apenas uma resposta para cada item. As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado.

Na resposta aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

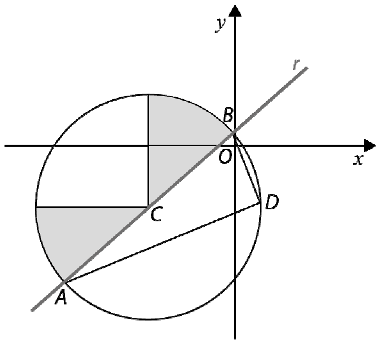
Na resposta aos restantes itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias. Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

1. Considere, dado um número natural $n \geq 2$ e para $x > 0$ e $y > 0$, a expressão $A = -\frac{\sqrt[n]{x^3 y^{-2}}}{\sqrt[3]{xy}}$.

Para que valor de n se tem $A = -\frac{\sqrt[3]{x^2}}{y}$, independentemente dos valores de x e de y?

(A) 2 **(B)** 3 **(C)** 4 **(D)** 5

2. Na figura estão representados, num referencial o.n. Oxy, a circunferência de centro em C definida pela condição $x^2 + y^2 + 6x + 4y = 3$, a reta r definida por $(x, y) = (1,2) + k(-1, -1), k \in \mathbb{R}$ e um triângulo $[ABD]$.



Sabe-se ainda que:

- A e B são os pontos de interseção da circunferência com a reta r;
- o ponto D é o ponto de interseção da circunferência com a reta definida pela condição $x = 1$.

2.1. Prove que $C(-3, -2)$ e que $[AB]$ é um diâmetro da circunferência.

2.2. Determine a área do triângulo $[ABD]$. Apresente o resultado na forma $a\sqrt{b}$, com $a, b \in \mathbb{N}$.

2.3. Uma condição que define a região a sombreado poderá ser:

(A) $x^2 + y^2 + 6x + 4y \leq 3 \quad \wedge \quad y \geq x + 1 \quad \wedge \quad (x \geq -3 \quad \vee \quad y \leq -2)$

(B) $x^2 + y^2 + 6x + 4y \leq 3 \quad \wedge \quad y \geq x + \frac{1}{2} \quad \wedge \quad (x \geq -3 \quad \vee \quad y \leq -2)$

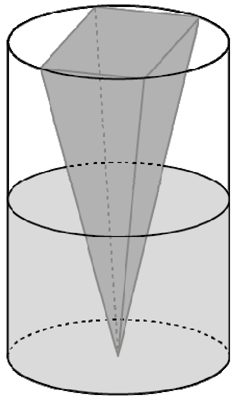
(C) $x^2 + y^2 + 6x + 4y \leq 3 \quad \wedge \quad y \geq x + 1 \quad \wedge \quad (x \leq -3 \quad \vee \quad y \geq -2)$

(D) $x^2 + y^2 + 6x + 4y \leq 3 \quad \wedge \quad y \geq x + \frac{1}{2} \quad \wedge \quad (x \leq -3 \quad \vee \quad y \geq -2)$

3. Na figura ao lado está representado um reservatório de água de forma cilíndrica, feito de material transparente e de espessura desprezável.

A altura do cilindro mede 3 metros e o raio da base do cilindro mede 1 metro.

Dentro do cilindro existe uma pirâmide quandrangular regular maciça, de tal forma que a base da pirâmide está inscrita na face superior do cilindro e o vértice coincide com o centro da face inferior.



3.1. Determine o volume de água existente no reservatório, quando a água atinge nesse reservatório 1 metro de altura. Apresente o resultado em litros, arredondado às centésimas.

3.2. Seja f a função que, à altura x (em metros) de água no reservatório, faz corresponder o volume (em metros cúbicos) de água nesse reservatório.

3.2.1. Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

(A) $D_f = [0,3]$ e $D'_f = [0\,,3\pi - 2]$

(B) $D_f = [0,3]$ e $D'_f = \left[0\,,3\pi - \frac{1}{2}\right]$

(C) $D_f = [0,3[$ e $D'_f = [0\,,3\pi - 2]$

(D) $D_f = [0,3[$ e $D'_f = \left[0\,,3\pi - \frac{1}{2}\right]$

3.2.2. Mostre que $f(x) = \pi x - \frac{2x^3}{27}$.

3.2.3. Admita que o reservatório está vazio e que nele se introduziram 750 litros de água.

Determine, recorrendo às capacidades gráficas da calculadora, a altura que a água atingirá. Apresente o resultado em metros, arredondado às centésimas.

4. Considere a função polinomial g definida, em $\mathbb{R}$, por:

$$g(x) = x^3 - \frac{5}{2}x^2 + \frac{1}{2}x + 4$$

4.1. Qual das seguintes proposições é verdadeira?

(A) $\forall x \in \mathbb{R}, g(-x) = -g(x)$

(B) $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}^+,\ x_1 < x_2 \Longrightarrow\ g(x_1) < g(x_2)$

(C) $\exists x_1, x_2 \in \mathbb{R}: g(x_1) = g(x_2)\ \ \wedge\ \ x_1 \neq x_2$

(D) $\exists x \in \mathbb{R}^+: g(x) = 0$

4.2. Seja h a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $h(x) = -2x - 1$.

Qual é o valor de $(h^{-1} \circ g)(2)$?

(A) -7 **(B)** -2 **(C)** 2 **(D)** 7

4.3. Num referencial o.n. Oxy, considere um ponto B que se desloca ao longo do gráfico da função g e cuja abcissa pertence a $\mathbb{R}^+$.

Sejam:

- A o ponto de interseção do gráfico com o eixo Oy;
- C a projeção ortogonal do ponto B sobre o eixo Ox.

Determine, recorrendo às capacidades gráficas da calculadora, a abcissa do ponto B para o qual a área do trapézio $[OABC]$ é igual a 6.

Na sua resposta:

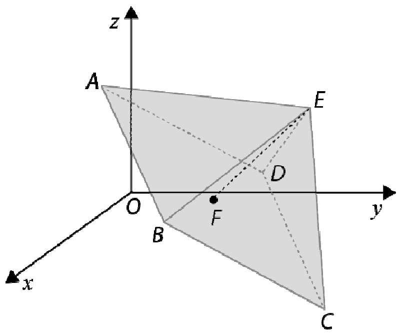
- equacione o problema;
- reproduza, num referencial, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora que lhe permite(m) resolver a equação, devidamente identificado(s), incluindo o referencial;
- apresente os valores pedidos arredondados às décimas.

5. Na figura ao lado está representado, num referencial o.n. $Oxyz$, uma pirâmide quadrangular regular $[ABCDE]$.

Seja F o centro da base da pirâmide.

Sabe-se que:

- o vértice A tem coordenadas $(-2,-2,2)$;
- o vértice E tem coordenadas $(-3,3,1)$;
- o vetor $\overrightarrow{FE}$ tem coordenadas $(-1,2,2)$.



5.1. Determine uma equação vetorial da reta perpendicular ao plano ABC que passa em E.

5.2. Determine o volume da pirâmide $[ABCDE]$.

5.3. O plano ABC é o plano mediador do segmento de reta $[EE']$.

Determine as coordenadas de E' e determine uma equação do plano que contém a base da pirâmide. Apresente essa equação na forma $ax + by + cz + d = 0$.

FIM

COTAÇÕES

Item														
Cotação (em pontos)														
1.	**2.1.**	**2.2.**	**2.3.**	**3.1.**	**3.2.1.**	**3.2.2.**	**3.2.3.**	**4.1.**	**4.2.**	**4.3.**	**5.1.**	**5.2.**	**5.3.**	
8	20	20	8	15	8	15	15	8	8	20	15	20	20	**200**

Teste N.º 4 – Proposta de resolução

1. Opção (B)

$$A = -\frac{\sqrt[n]{x^3 y^{-2}}}{\sqrt[3]{xy}} = -\frac{x^{\frac{3}{n}} y^{-\frac{2}{n}}}{x^{\frac{1}{3}} y^{\frac{1}{3}}} = -x^{\frac{3}{n}-\frac{1}{3}} y^{-\frac{2}{n}-\frac{1}{3}}$$

$$\frac{3}{n}-\frac{1}{3}=\frac{2}{3} \ \wedge \ -\frac{2}{n}-\frac{1}{3}=-1 \Leftrightarrow \frac{3}{n}=1 \ \wedge \ -\frac{2}{n}=-\frac{2}{3} \Leftrightarrow n=3$$

2.

2.1. $x^2+y^2+6x+4y=3 \Leftrightarrow x^2+6x+9+y^2+4y+4=3+9+4$

$$\Leftrightarrow (x+3)^2+(y+2)^2=16$$

Logo, $C(-3,-2)$.

A reta AB é definida por $(x,y)=(1,2)+k(-1,-1), k \in \mathbb{R}$.

Averiguemos se C pertence à reta AB:

$(-3,-2)=(1,2)+k(-1,-1) \Leftrightarrow -3=1-k \ \wedge \ -2=2-k$

$$\Leftrightarrow k=4 \ \wedge \ k=4$$

Logo, $C \in AB$.

Como C é o centro da circunferência e A e B pertencem à circunferência, concluímos que $[AB]$ é um diâmetro da circunferência.

2.2. Como $[AB]$ é um diâmetro da circunferência, então o triângulo $[ABD]$ é retângulo em D.

$$A_{[ABD]} = \frac{\overline{BD} \times \overline{AD}}{2}$$

Determinemos as coordenadas de D:

$$\begin{cases}(x+3)^2+(y+2)^2=16\\ x=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(1+3)^2+(y+2)^2=16\\ x=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}16+(y+2)^2=16\\ x=1\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}(y+2)^2=0\\ x=1\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}y+2=0\\ x=1\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}y=-2\\ x=1\end{cases}$$

Assim, $D(1,-2)$.

Determinemos as coordenadas de A e B:

$r: (x,y)=(1,2)+k(-1,-1), k \in \mathbb{R}$.

$$m_r = \frac{-1}{-1} = 1$$

$y = x + b$

Como o ponto de coordenadas $(1,2)$ pertence à reta r, então:

$$2 = 1 + b \Leftrightarrow b = 1$$

$r: y = x + 1$

$$\begin{cases}(x+3)^2+(y+2)^2=16\\ y=x+1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(x+3)^2+(x+1+2)^2=16\\ y=x+1\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}(x+3)^2+(x+3)^2=16\\ y=x+1\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}2(x+3)^2=16\\ y=x+1\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}(x+3)^2=8\\ y=x+1\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x+3=\pm\sqrt{8}\\ y=x+1\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x=-3\pm 2\sqrt{2}\\ y=x+1\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x=-3+2\sqrt{2}\\ y=-2+2\sqrt{2}\end{cases} \vee \begin{cases}x=-3-2\sqrt{2}\\ y=-2-2\sqrt{2}\end{cases}$$

Logo, $A(-3-2\sqrt{2}, -2-2\sqrt{2})$ e $B(-3+2\sqrt{2}, -2+2\sqrt{2})$.

Determinemos $\overline{BD}$:

$$\overline{BD} = \sqrt{(1+3-2\sqrt{2})^2+(-2+2-2\sqrt{2})^2} = \sqrt{\left(4-2\sqrt{2}\right)^2+\left(-2\sqrt{2}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{16-16\sqrt{2}+8+8} =$$

$$= \sqrt{32-16\sqrt{2}}$$

Determinemos $\overline{AD}$:

$$\overline{AD} = \sqrt{(1+3+2\sqrt{2})^2+(-2+2+2\sqrt{2})^2} = \sqrt{\left(4+2\sqrt{2}\right)^2+\left(2\sqrt{2}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{16+16\sqrt{2}+8+8} =$$

$$= \sqrt{32+16\sqrt{2}}$$

$$A_{[ABD]} = \frac{\sqrt{32-16\sqrt{2}}\times\sqrt{32+16\sqrt{2}}}{2} = \frac{\sqrt{32^2-\left(16\sqrt{2}\right)^2}}{2} =$$

$$= \frac{\sqrt{512}}{2} =$$

$$= \frac{16\sqrt{2}}{2} =$$

$$= 8\sqrt{2}$$

2.3. Opção (A)

Sabemos que $C(-3,-2)$ e que $r: (x,y) = (1,2) + k(-1,-1), k \in \mathbb{R}$, logo a sua equação reduzida é da forma $y = x + b$.

Como o ponto de coordenadas (1, 2) pertence à reta r, então $2 = 1 + b \Leftrightarrow b = 1$.

Logo, a equação reduzida da reta r é $y = x + 1$.

Assim, a condição que define a região a sombreado pode ser:

$$x^2 + y^2 + 6x + 4y \leq 3 \ \wedge \ y \geq x + 1 \ \wedge \ (x \geq -3 \ \vee \ y \leq -2)$$

3.

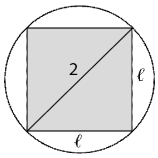
3.1. $\pi \times 1^2 \times 1 - \frac{1}{3} \times \left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^2 \times 1 = \pi - \frac{1}{3} \times \frac{2}{9} =$

$= \pi - \frac{2}{27} =$

$\approx 3{,}06752 \text{ m}^3$

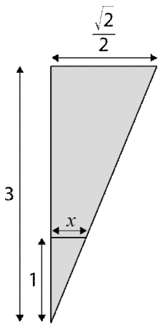
$= 3067{,}52\ l$

Cálculos auxiliares



$l^2 + l^2 = 4 \Leftrightarrow 2l^2 = 4 \Leftrightarrow l^2 = 2$

$\underbrace{\Leftrightarrow}_{l>0} l = \sqrt{2}$



$\frac{3}{1} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{x} \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{2}}{6}$

O lado do quadrado, que é a base da pirâmide de altura igual a 1 m, é $2 \times \frac{\sqrt{2}}{6} = \frac{\sqrt{2}}{3}$.

3.2.

3.2.1. Opção (A)

A altura do líquido no reservatório varia entre 0 m e 3 m (inclusive), logo $D_f = [0, 3]$.

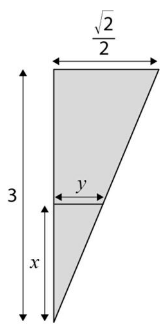
O volume máximo do líquido ocorre quando $x = 3$:

$$\pi \times 1^2 \times 3 - \frac{1}{3} \times 2 \times 3 = 3\pi - 2$$

Logo, $D'_f = [0, 3\pi - 2]$.

3.2.2. Seja x a altura de água no reservatório. O volume (em m^3) da água nesse reservatório é igual a $\pi \times 1^2 \times x - \frac{1}{3} \times \left(\frac{\sqrt{2}}{3}x\right)^2 \times x = \pi x - \frac{1}{3} \times \frac{2}{9}x^3 = \pi x - \frac{2}{27}x^3$.

Cálculo auxiliar



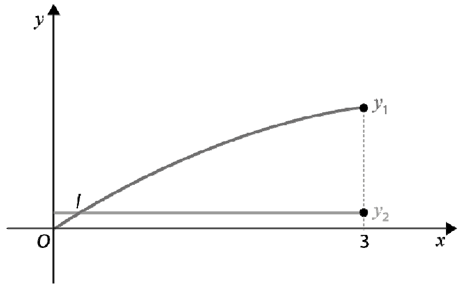
$\frac{3}{x} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{y} \Leftrightarrow y = \frac{\sqrt{2}}{6}x$

Logo, o lado da pirâmide quadrangular regular de altura x é igual a $2 \times \frac{\sqrt{2}}{6}x = \frac{\sqrt{2}}{3}x$.

3.2.3. $750\ l = 750\ \text{dm}^3 = 0{,}75\ \text{m}^3$

Pretendemos resolver a equação $f(x) = 0{,}75$.

Com recurso às capacidades gráficas da calculadora:



$y_1 = \pi x - \dfrac{2}{27}x^3$

$y_2 = 0{,}75$

$I(a, b)$

$a \approx 0{,}24 \qquad b = 0{,}75$

A água atingirá, aproximadamente, 0,24 metros.

4.

4.1. Opção (C)

Por observação da representação gráfica de g, obtida na calculadora gráfica, concluímos que:

- g não é ímpar, o que exclui a opção (A);
- g não é estritamente crescente em $\mathbb{R}^+$, o que exclui a opção (B);
- g não é injetiva, logo a opção (C) é a correta;
- g admite um único zero que pertence a $\mathbb{R}^-$, o que exclui a opção (D).

4.2. Opção (B)

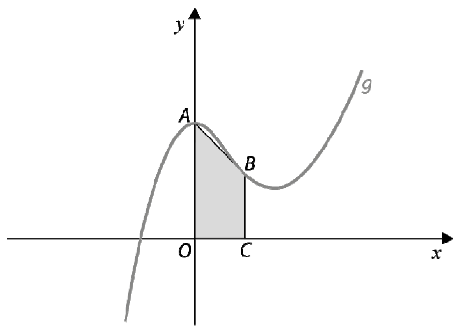
$(h^{-1} \circ g)(2) = h^{-1}\big(g(2)\big) = h^{-1}(3) = -2$

Cálculo auxiliar

$g(2) = 2^3 - \dfrac{5}{2} \times 2^2 + \dfrac{1}{2} \times 2 + 4 = 3$

$h(x) = 3 \Leftrightarrow -2x - 1 = 3 \Leftrightarrow -2x = 4 \Leftrightarrow x = -2$

4.3.



Cálculo auxiliar

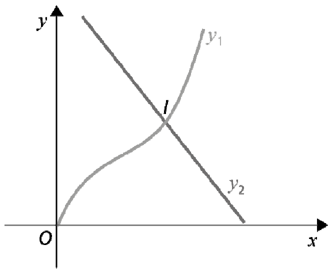
$A(0, 4)$

$B\big(x, g(x)\big), x \in \mathbb{R}^+$

$C(x, 0)$

$$A_{[OABC]} = 6 \Leftrightarrow \frac{4 + g(x)}{2} \times x = 6 \Leftrightarrow \big(4 + g(x)\big)x = 12$$

$$\Leftrightarrow g(x) \times x = 12 - 4x$$



$y_1 = x^4 - \frac{5}{2}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 4x$

$y_2 = -4x + 12$

$I(a, b)$

$a \approx 1{,}8 \qquad b \approx 4{,}8$

Logo, a abcissa do ponto B, com aproximação às décimas, é 1,8.

5.

5.1. $\overrightarrow{FE} = (-1{,}2{,}2)$

Uma equação vetorial da reta perpendicular ao plano ABC que passa em E pode ser:

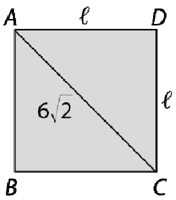
$$(x, y, z) = (-3{,}3{,}1) + k(-1{,}2{,}2), k \in \mathbb{R}$$

5.2. $V_{[ABCDE]} = \frac{1}{3} \times A_{[ABCD]} \times h$

$F = E + \overrightarrow{EF} = (-3, 3, 1) + (1, -2, -2) = (-2, 1, -1)$

$\overrightarrow{AF} = F - A = (-2, 1, -1) - (-2, -2, 2) = (0, 3, -3)$

$\|\overrightarrow{AF}\| = \sqrt{0^2 + 3^2 + (-3)^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$



$l^2 + l^2 = \left(6\sqrt{2}\right)^2 \Leftrightarrow 2l^2 = 72 \Leftrightarrow l^2 = 36$

A área do quadrado $[ABCD]$ é igual a 36 u.a.

$h = \|\overrightarrow{FE}\| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2 + 2^2} = \sqrt{9} = 3$

$V_{[ABCDE]} = \frac{1}{3} \times 36 \times 3 = 36$ u.v.

5.3. $E' = F + \overrightarrow{EF} = (-2, 1, -1) + (1, -2, -2) = (-1, -1, -3)$

O plano mediador de $[EE']$ pode ser definido por:

$\sqrt{(x+3)^2 + (y-3)^2 + (z-1)^2} = \sqrt{(x+1)^2 + (y+1)^2 + (z+3)^2}$

$\Leftrightarrow x^2 + 6x + 9 + y^2 - 6y + 9 + z^2 - 2z + 1 = x^2 + 2x + 1 + y^2 + 2y + 1 + z^2 + 6z + 9$

$\Leftrightarrow 6x - 2x - 6y - 2y - 2z - 6z + 9 - 1 = 0$

$\Leftrightarrow 4x - 8y - 8z + 8 = 0$

$\Leftrightarrow x - 2y - 2z + 2 = 0$