15

Do número ao sentido do número

Graça Cebola
Escola Superior de Educação de Portalegre
gracacebola@mail.esep.ipportalegre.pt

Partindo das definições elementares de *número* (entenda-se que, não sendo dito o contrário, nos referimos aos números naturais) percebe-se que, a nível escolar, elas não são suficientemente amplas para permitir uma plena construção deste conceito.

Assim sendo, pretende-se, neste trabalho, reflectir sobre a importância da construção e desenvolvimento do número através do *sentido do número*. Apresentam-se, primeiramente, várias definições do sentido do número que, não sendo contraditórias, se complementam nas ideias e processos evocados. De seguida, realça-se o papel do cálculo mental e do cálculo por estimação na sua ligação estreita ao sentido do número. E, por último, ligam-se algumas orientações curriculares ao sentido do número e exemplifica-se como este deve ser trabalhado e explorado numa aula de Matemática do ensino básico.

Como se pode constatar não há a intenção de abordar o número formalmente mas antes de um modo mais informal, o qual deve permitir uma aprendizagem significativa na área do cálculo numérico.

Definir número

Uma ideia que normalmente surge é a de que os números são aquilo que permite contar e, como tal, responder a questões do tipo: "Quantos são?". Desta forma, o número é encarado como o *cardinal* de um dado conjunto, isto é, descreve a quantidade dos seus elementos. No entanto, o número pode ser usado num sentido diferente, por exemplo, se dissermos que numa corrida participam três crianças, o três é o cardinal, mas se mencionarmos que o João chegou em terceiro lugar, o três já não é encarado da mesma forma mas antes como *ordinal* do número, ou seja, como a ideia que o permite localizar numa dada sequência.

Sob o ponto de vista da história da Matemática, os autores divergem quanto à ordem pela qual estes conceitos surgiram. Do mesmo modo, sob o ponto de vista da psicologia da aprendizagem os psicólogos divergem quanto à sua primazia e facilidade de compreensão.

Por outro lado, se mencionarmos o número de fila de um supermercado, o número do bilhete de identidade, o número de código do cartão de crédito, o número de telefone e muitos outros ligados ao quotidiano actual, nenhum dos dois conceitos anteriores parece adequado. Aqui a ideia é apenas o uso do número como uma identificação, como um nome, sem qualquer preocupação de quantidade ou de sequência numa série. Surge, assim, o conceito *nominal* do número que, ao contrário dos anteriores, não tem qualquer significado matemático. Por exemplo, faz pouco sentido efectuar uma média dos números de telefone de uma determinada localidade, assim como dizer que determinado número de cartão de crédito é maior ou menor que um outro. Sem ser matematicamente importante é certo que o carácter nominal do número é, nas sociedades actuais, imprescindível ao dia a dia do cidadão comum e deve ser referido desde o início da escola básica.

Mas referir o número apenas pelas suas definições elementares é demasiado limitativo quando, sob o ponto de vista da educação matemática, pretendemos realçar quer o seu carácter utilitário no mundo actual e na vida do cidadão comum, quer o seu carácter uniforme e global. Desta forma, nos anos 80 e início da década de 90, desenvolveu-se uma expressão que parece adequada ao ensino e à aprendizagem: o sentido do número.

Definir sentido do número

Ao procurar definir sentido do número, muitas das caracterizações focam-se na sua natureza intuitiva, no seu desenvolvimento gradual e nos processos pelos quais se pode evidenciar. Em 1989, o National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) refere que o *sentido do número* é uma intuição acerca dos números, traçada a partir de todos os significados que estes possam ter. Desta forma considera cinco componentes:

- *Desenvolvimento dos conceitos elementares de número*. Incluem-se aqui os conceitos de cardinal e de ordinal.
- *Exploração das relações entre os números através de materiais manipuláveis*. A composição e decomposição de conjuntos de objectos permite escrever um número de diferentes formas. Por exemplo, pode referir-se que 50 são 5 dezenas, 2 vezes 25 ou 4 dezenas e 10 unidades.
- *Compreensão do valor relativo dos números*. A comparação de dois números, evidenciando, por exemplo, que o 31 é grande quando comparado com o 4, mais ou menos do mesmo tamanho que o 27,

cerca de metade de 60 ou pequeno relativamente ao 92; a contagem um a um de dois números, através da calculadora (se possível, utilizando a tecla da constante), permite também estabelecer o valor relativo desses números (nota-se que é bastante mais demorado contar rapidamente até 1000 do que até 100).

- *Desenvolvimento da intuição do efeito relativo das operações nos números*. Neste ponto o realce vai para o sentido da operação (explicitado a seguir) o qual permite efectuar decisões profundas sobre se o resultado obtido é, ou não, razoável.
- *Desenvolvimento de referenciais para medir objectos comuns e situações do mundo que nos rodeia*. Perceber, por exemplo, que não tem sentido um aluno do 4º ano ter 316 cm de altura e pesar 8 kg, o professor ter 96 anos de idade e o pão custar 117 €. Isto é, ter conhecimento de um intervalo que seja sensato para estas medidas permite criar um suporte para analisar se os resultados são, ou não, razoáveis.

Mencionado anteriormente, o *sentido da operação* apresenta, ainda de acordo com o NCTM (1989), quatro componentes:

- *Compreender a operação*, isto é, reconhecer, em situações do mundo real, as condições que indiquem que determinada operação pode ser útil nesse caso.
- *Ter conhecimento dos modelos e das propriedades de uma operação*. Por exemplo, a nível elementar, a multiplicação é, muitas vezes, encarada apenas como um processo de combinar grupos com igual número. É necessário que outras situações (combinações, área, …) sejam também exploradas.
- *Identificar relações entre as operações*. A adição e a subtracção podem relacionar-se, pois uma é a inversa da outra. Com a primeira procura-se o todo, com a segunda procura-se uma parte.
- *Tomar consciência dos efeitos de uma operação num par de números*. Por exemplo, ao adicionar 5 a 25 deve reparar-se que a mudança é muito mais pequena do que se se multiplicar 25 por 5. Pode também analisar-se o que sucede quando, dados dois números numa adição ou numa multiplicação, se diminui uma unidade num e se aumenta uma unidade no outro.

Estas componentes permitem afirmar que o sentido da operação interage com o sentido do número e possibilita um suporte para o desenvolvimento conceptual dos procedimentos do cálculo mental e escrito.

Por outro lado, o *sentido do número* pode ainda definir-se como sendo a compreensão genérica que cada pessoa tem dos números e das operações. Esta compreensão inclui não só a capacidade mas também a tendência que se possui para desenvolver estratégias úteis que envolvam números e operações como um meio de comunicação, processamento e interpretação de informação, na resolução de problemas. Evidencia-se a expectativa de cada um quanto à utilidade dos números e à regularidade da própria matemática (Reys, 1998).

O *sentido do número* é, desta forma, algo impreciso, pessoal e personalizado, que está relacionado com as ideias que cada um foi estabelecendo sobre os números e as operações e que nem sempre é fácil de descrever. McIntosh *et al.* (1992) apresentam um modelo para a caracterização do *sentido do número básico*, ou melhor, um conjunto de ideias e processos que permitem evidenciá-lo. Este modelo surge dividido em três grandes blocos, cada um com vários pontos específicos.

Bloco 1. Conhecimento e destreza com os números

Sentido da regularidade dos números

Compreender o sistema de numeração hindu-árabe, percebendo como este sistema posicional está organizado, auxilia na análise e na crítica dos números e permite a sua aplicação quer aos números inteiros quer aos números decimais. A compreensão do sistema de numeração ajuda também a organizar, comparar e ordenar mentalmente os números. Por exemplo, quando o aluno aprende a contar a partir do 20, começa a identificar, oralmente e por escrito, padrões que são inerentes ao sistema de numeração. Estes padrões, uma vez identificados, proporcionam um suporte importante para que o processo de contagem continue e se generalize.

Múltiplas representações dos números

Reconhecer que o número pode apresentar várias formas e ser pensado e manipulado de diferentes maneiras, consoante a situação em causa. Compreender que perante um dado problema, existem representações que são mais úteis do que outras. Por exemplo, reconhecer que $2+2+2+2$ é o mesmo que 4×2 é uma relação conceptual importante entre a adição e a multiplicação.

Englobam-se, neste ponto, a decomposição/recomposição do número, isto é, o modo de expressar um número de diferentes formas, todas elas equivalentes, e que resultam de reconhecer como esta nova notação facilita a operação com os números recompostos. Ao supor, por exemplo, que numa ida ao supermercado a despesa é de 8,53 €. Podemos pagá-la com uma nota de 10 € e receber de troco 1,47 € ou podemos dar ao empregado uma nota de 10 € e 3 cêntimos e receber como troco apenas duas moedas, uma de 1 € e outra de 50 cêntimos. A decomposição de 8,53 € em 8,50 € + 0,03 € dá-nos a justificação formal que nos permite pagar a referida quantia e não encher a carteira de trocos.

Embora desenvolvida num ponto mais à frente (*Sistemas de referência*), surge também aqui a comparação com um número de referência, ou seja, a utilização de uma marca no sistema de numeração que é normalmente útil para efectuar comparações.

Sentido das grandezas relativa e absoluta dos números

Reconhecer o valor relativo de um número ou de uma quantidade relativamente a outro número ou quantidade; possuir a sensibilidade relativamente à grandeza de um determinado número ou quantidade. Perguntar, por exemplo, a um aluno do 3º ano do ensino básico, se já viveu mais, ou menos, do que 1000 dias, dá-lhe uma oportunidade de pensar acerca do 1000 num contexto pessoal e ajuda-o a entender melhor o valor do 1000 noutros contextos.

Sistemas de referência

Utilizar referências para avaliar uma resposta ou arredondar um número, de modo a facilitar o cálculo mental. Por exemplo, reconhecer que a soma de dois números de dois dígitos é inferior a 200, que 0.98 está próximo de 1 e que $\frac{4}{9}$ é ligeiramente inferior a um meio. Nos casos anteriores as referências são valores numéricos desprovidos de qualquer contexto e que podem desenvolver-se com a experiência. No entanto, as referências podem também surgir de atributos pessoais ou inesperados. Por exemplo, uma pessoa pode usar a sua altura para estimar a altura de uma outra pessoa.

Bloco 2. Conhecimento e destreza com as operações

Compreensão do efeito das operações

A plena conceptualização de uma operação implica compreender o seu efeito com diferentes números, incluindo inteiros e não inteiros. Com esta ideia, os modelos são frequentemente utilizados para auxiliar os alunos na compreensão da acção da operação. Por exemplo, modelar a multiplicação como uma adição repetida permite ajudá-los a pensar a multiplicação de um modo concreto. No entanto, é importante que sejam explorados vários modelos para a multiplicação (linha numérica ou modelo geométrico) de modo que os alunos se habituem a ver esta operação em vários contextos e modelos.

Reflectir sobre as interacções entre as operações e os números e investigar o que se passa no resultado, tendo em atenção a alteração de uma das componentes da operação. Por exemplo: “O que acontece quando dois números inferiores a 1 são multiplicados?"; "O que acontece se um dos factores é inferior à unidade e o outro superior?".

Compreensão das propriedades matemáticas

Aplicar intuitivamente as propriedades das operações aritméticas em processos de cálculo inventados. Por exemplo, quando mentalmente multiplicamos 36×4, pode-se pensar em 4×35 e 4×1, ou seja, $140 + 4$ ou 144. Nesta solução aplicou-se a propriedade comutativa, mudando a ordem dos factores, e a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição, decompondo 4×36 em $4 \times 35 + 4 \times 1$. Podia também ter-se pensado em $4 \times 40 - 4 \times 4$ ou $30 \times 4 + 6 \times 4$ e, em qualquer dos casos, fica realçado o sentido do número. O objectivo aqui é o de ilustrar a importância de ligar as aplicações práticas ao desenvolvimento e compreensão das propriedades matemáticas.

Compreensão da relação entre as operações

Conexões entre as operações permitem obter diferentes formas de pensar e resolver os problemas. Por exemplo, quando um aluno considera a questão: "Quantas rodas têm 8 triciclos?" pode: pensar e aplicar um processo de contagem (contando uma a uma as rodas dos triciclos); aplicar a adição repetida (adicionando o número de rodas de cada triciclo: $3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3$); agrupar e adicionar (fazendo 4 grupos de 2 triciclos cada: $6 + 6 + 6 + 6$); ou aplicar a multiplicação (8×3). Cada uma destas soluções reflecte ligeiras diferenças de pensar a questão, assim como diferentes graus de eficiência.

Identificar e utilizar conexões entre as várias operações e, em particular, entre uma operação e a sua inversa, permite também pensar no problema de uma outra forma. Por exemplo, quando se pergunta "Qual é o quociente de $480 \div 8$?", pode pensar-se na questão "Qual é o número que multiplicado por 8 vai dar 480?" ($8 \times ? = 480$), onde o problema passou a ser multiplicativo em vez de um problema de divisão.

É de notar que para compreender as relações entre as várias operações é necessário primeiramente perceber cada uma das operações e depois entender que essas relações aumentam à medida que se passa das operações com números naturais para as operações com números não inteiros.

Bloco 3. Aplicação do conhecimento e da destreza com os números e as operações em situações de cálculo

Compreender a relação entre o contexto do problema e os cálculos necessários

Compreender que o contexto do problema fornece pistas para a utilização, não apenas das operações apropriadas, mas também do tipo de números a tratar. É também aqui que se realça um olhar diferente sobre a solução com o propósito de analisar se esta deve ser exacta ou aproximada. Ao considerar, por exemplo, a situação: "O João gastou 2.88 € em maçãs, 2.38 € em bananas e 3.76 € em laranjas". Várias questões se podem colocar e dependendo delas escolher entre uma resposta exacta ou um valor aproximado. Desta forma, se a pergunta for "Quanto gastou o João na fruta?", é necessário considerar os valores indicados e aplicar um qualquer método de cálculo (mental, escrito ou com a calculadora) para que a resposta seja exacta; por outro lado, se a pergunta for "Será que o João pode pagar a despesa com uma nota de 10 €?", então podemos usar a estimação para rapidamente e com confiança responder afirmativamente.

Consciencialização da existência de múltiplas estratégias

Reconhecer que, frequentemente, existem diferentes estratégias de resolução para um dado problema e perceber que, se uma estratégia inicial parece improdutiva, o formular e aplicar uma nova estratégia deve ser um caminho a seguir.

Apetência para utilizar uma representação ou um método eficiente

Ter consciência de que, num determinado momento, algumas estratégias ou algumas ferramentas de cálculo são mais eficientes do que outras. Por exemplo, um aluno do 2º ano de escolaridade perante a pergunta "Quanto é 8 + 7?" não deve utilizar a estratégia de contar um a um, mas antes modificar a questão e pensar em 7 + 7 + 1 ou em 8 + 2 + 5, baseado no conhecimento que já possui de 2 vezes 7 ser 14 e de 8 + 2 = 10, respectivamente.

Sensibilidade para rever os dados e o resultado

Possuir sentido do número é examinar a solução obtida à luz do problema original, para determinar se a resposta "faz sentido". Esta análise é geralmente feita rapidamente, naturalmente, e torna-se parte integrante do processo de resolução de problemas.

Sem estar em desacordo com o modelo anterior mas evidenciando mais alguns pontos, Greenes *et al.* (1993) referem que quando falamos acerca do sentido do número em Matemática, nos referimos à *capacidade de obter decisões inteligentes* baseadas numa clara compreensão das relações matemáticas e no contexto ou aplicação dessas relações. Uma estreita compreensão da relação entre os números, as suas utilizações e o contexto do problema compõem o sentido do número.

Desta forma, e de acordo com estes autores, pelo menos sete competências devem ser desenvolvidas na escola básica:

1. *Reconhecer as várias utilizações dos números.* Os alunos devem ser capazes de reconhecer que os números são usados de muitas formas, incluindo para quantificar, para rotular, para medir e para localizar. Quando dizemos que "O saco contém 6 maçãs", o número 6 é usado para quantificar, para referir quantas; quando mencionamos que "O jogador com o '56' na camisola apanhou a bola", o 56 é usado como um nome ou rótulo; quando indicamos a distância percorrida, a altura ou o peso de alguém, os números são usados como medidas; quando mencionamos que "O João vive na segunda casa a partir da esquina", o número é utilizado para identificar um local ou uma posição.
2. *Reconhecer a adequação dos números.* Alguns números, pela sua natureza, são apropriados em determinadas situações e noutras não. Por exemplo, 53 pode ser o número de páginas de um livro mas não pode ser um dia do mês, uma vez que o mês pode ter no máximo 31 dias. O número 42.5 pode ser uma média de classificação mas não pode ser o número de alunos na turma, uma vez que uma fracção de pessoa não tem qualquer nexo. Os alunos devem reconhecer que o tipo de número (inteiro ou não inteiro) está relacionado com o contexto.
3. *Associar números de diferentes grandezas com objectos, acontecimentos e situações reais.* Com base no conhecimento prévio de vários temas e acontecimentos, os alunos devem ser capazes de julgar quais os números que são mais apropriados para descrever esses temas ou acontecimentos. Por exemplo, quando se identifica o número que melhor descreve a percentagem de água num sumo, os alunos devem saber que a percentagem não pode exceder 100; no entanto, quando se refere o aumento de preços, em época de inflação, esse valor pode exceder os 100 %.
4. *Estimar os resultados de operações.* Estimar somas, diferenças, produtos e quocientes é útil para verificar os resultados obtidos e para assegurar que as respostas estão dentro de um parâmetro correcto. Por exemplo, quando se estima o preço de cinco camisolas, cujo valor unitário é 29 €, os alunos devem reconhecer que o valor total será cerca de 150 €, em vez de 100 €, 200 € ou 1500 €.
5. *Identificar relações entre números e entre medidas*. Grupos de números partilham, frequentemente, determinada teoria ou relação de ordem numérica. Por exemplo, os alunos devem estar aptos a identificar as seguintes relações: 5 é um factor de 30; 30 é um múltiplo de 5; 5 é

menor que 30 e 30 é maior que 5. Em termos de medidas, os alunos devem saber, por exemplo, que 1 hora é igual a 60 minutos ou que 1 quilómetro são 1000 metros.

6. *Reconhecer conjuntos e subconjuntos, ou relações entre as partes e o todo.* Reconhecer relações entre as partes e o todo facilita as decisões sobre a grandeza dos números. Por exemplo, reconhecendo que o País é composto por várias províncias, os alunos devem saber que a população de uma das províncias tem que ser inferior à população do País.
7. *Compreender aspectos que estabeleçam relações matemáticas bem como relações temporais.* Muitos problemas de aplicação usam aspectos que estabelecem relações matemáticas tais como maior que, menor que, no máximo, no mínimo, cinco vezes mais e para todos. A capacidade de interpretar estes aspectos é a chave para encontrar a solução destes problemas. Outros problemas podem incluir aspectos que estabeleçam relações temporais, tais como cedo, tarde, antes, depois e a partir de agora. Perante afirmações como "O João nasceu cinco anos antes do Carlos", os alunos devem perceber que o João é mais velho do que o Carlos, que o Carlos é mais novo que o João e que a diferença entre as suas idades é de 5 anos.

Em síntese, analisando as definições anteriores podemos sublinhar que, embora sob perspectivas diferentes, as características associadas ao sentido do número, a explorar no decurso do ensino básico, e referidas explicitamente por, pelo menos, dois dos autores são:

- As múltiplas utilizações do número;
- O reconhecimento do valor relativo dos números;
- A selecção e o uso de referências;
- A decomposição e recomposição de números;
- A compreensão dos efeitos relativos das operações nos números;
- A adequação dos números ao contexto ou à situação real.

O sentido do número, o cálculo mental e o cálculo por estimação

Reys (1998) menciona também que as características tipicamente associadas com o sentido do número incluem a flexibilidade e a performance apropriadas ao cálculo mental e à estimação. Sowder e Shappelle (1994), por seu lado, realçam que o cálculo por estimativa surge muitas vezes como suficiente na resolução de problemas e conjuga as seguintes componentes do sentido do número: o valor do número e o valor posicional. Segundo as autoras, para estimar há que coordenar as capacidades de arredondar e calcular mentalmente.

O cálculo mental e o cálculo por estimação são, portanto, duas formas de chegarmos ao sentido do número. Ambos podem proporcionar oportunidades para uma aplicação flexível dos conceitos de número e das operações, para inventar processos de resolver novos problemas, e para reflectir sobre os números e os seus significados no contexto de um dado problema.

Assim, de modo a maximizar o desenvolvimento do sentido do número, o ensino do cálculo mental deve encorajar os alunos a explorar diferentes maneiras de resolver os problemas e as discussões efectuadas devem ser guiadas de modo a permitir a inclusão de razões plausíveis que justifiquem que uma determinada forma é mais eficiente do que outra ou que não tem qualquer interesse no processo como o problema é resolvido.

Especificando um pouco o que se entende por *cálculo mental*, Sowder refere (1988) que é uma capacidade necessária para a competência numérica e que inclui a capacidade de efectuar operações com números inteiros com dois ou três dígitos. Um cálculo mental eficiente utiliza necessariamente algoritmos diferentes dos que estão usualmente ligados aos cálculos de papel e lápis. Sowder menciona igualmente que os algoritmos mentais têm características interessantes que fazem deles uma manifestação importante da existência do sentido do número. Assim, na sua opinião, os algoritmos mentais são:

- Variáveis. Há, por exemplo, vários métodos para calcular 83 – 26 e, algumas possibilidades podem ser: 83 + 3 – 26 – 3, ou 86 – 26 = 60 e 60 – 3 = 57; 26 + 4 = 30, 30 + 50 = 80, e 80 + 3 = 83. Logo, 4 + 50 + 3 = 50 + (4 + 3), isto é, 57; (70 + 13) – (20 + 6) = (70 – 20) + (13 – 6), ou seja, 57.
- Flexíveis e podem ser adaptados para satisfazer os números em causa. Por exemplo, cada uma das diferenças, 83 – 79, 83 – 51 e 83 – 7, pode ser calculada de maneira diferente: 83 – 79 pode ser resolvido procurando qual é o número que adicionado a 9 vai dar 13 e reduz–se à ideia básica de 9 + ? = 13 ou 13 – 9 e, provavelmente, de uma forma inconsciente 83 – 79 é reconhecido como sendo o mesmo que (70 + 13) – (70 + 9), ou (70 – 70) + (13 – 9); o problema 83 – 51 é provável que seja pensado como (80 + 3) – (50 + 1) ou (80 – 50) – (3 – 1), onde 80 – 50 é uma extensão da ideia básica 8 – 5; por fim, 83 – 7 pode ser encontrado através da contagem de 7, três a três ou quatro a quatro, desde o 83 ou pensando que 13 – 7 é 6, logo o resultado é 76 (este último processo depende do conhecimento de 83 ser o mesmo que 70 + 13).
- Activos, na ideia que permitem ao utilizador escolher, conscientemente ou não, um método.
- Globais uma vez que tratam os números como um todo e não cada dígito individualmente.

- Construtivos uma vez que começam, frequentemente, com o primeiro dos números. Por exemplo: 37 + 28 é 37, 47, 57, 67, 65.
- Requerentes de uma total compreensão e o seu uso vai-a desenvolvendo.
- Indicadores de uma primeira aproximação da resposta uma vez que normalmente os cálculos começam pelos dígitos da esquerda.

Como se pode observar pela multiplicidade de métodos existentes, a flexibilidade aumenta e as escolhas podem ser feitas na base da rapidez e da facilidade. Uma vez que não há apenas uma resolução única, isto é, uma escolha única na forma dos números serem trabalhados, o cálculo mental é extremamente criativo e inventivo. Desta forma, ter facilidade com o cálculo mental é uma manifestação do sentido do número.

É também de referir que no nosso dia a dia usamos mais o cálculo mental do que os algoritmos aritméticos escritos. As diferenças entre os algoritmos escritos e os algoritmos mentais são indicadas por Plunkett, citado por Sowder e Kelin (1993), que refere que enquanto os algoritmos formais escritos têm a vantagem de criar uma rotina tipo que servirá para todos os números – pequenos ou grandes, inteiros ou decimais – têm também a desvantagem de não corresponderem à maneira como as pessoas tendem a pensar nos números e desencorajam os alunos a pensar nos números em causa enquanto efectuam um cálculo.

O objectivo do cálculo mental é obter uma resposta exacta do problema numérico a resolver. Por outro lado, segundo Sowder (1988) o *cálculo por estimação* utiliza-se quando o objectivo não é necessariamente obter uma resposta exacta e consiste, basicamente, no processo de converter os números exactos em números aproximados (de notar que a capacidade de aproximar números depende da capacidade de os comparar) e operar mentalmente com esses números para obter uma resposta razoavelmente próxima do resultado exacto.

Por fim, podemos dizer que o sentido do número é uma rede bem organizada de conceitos sobre a informação do número que possibilita relacionar os números e as operações para resolver problemas de uma forma flexível e criativa (Sowder, 1988).

O sentido do número e as orientações curriculares

Em 1989, o National Research Council referia-se ao sentido do número como um objectivo importante da matemática escolar elementar e o NCTM indicava-o como uma componente essencial do currículo.

Aproximadamente uma década depois, o sentido do número continua a ser referenciado pelo NCTM (2000), como sendo uma parte importante da educação matemática elementar, a par da compreensão dos números e das operações e da fluência do cálculo aritmético. Reforça-se a ideia do sentido do número defendendo que os documentos programáticos, desde o jardim de infância até ao final ao ensino secundário, devem possibilitar a todos os alunos uma significativa compreensão dos números, nomeadamente: o que são; como se representam com objectos, numerais ou em rectas numéricas; como se relacionam uns com os outros; como se englobam em sistemas estruturados e com propriedades; e como se utilizam conjuntamente com as operações para resolver problemas.

De modo similar, em Portugal, menciona-se que o sentido do número "constitui uma referência central do ensino dos números e do cálculo desde os primeiros anos" (Abrantes *et al.*, 1999, p. 46). Assim, de acordo com estes autores, as competências matemáticas no domínio dos números e das operações que os alunos do ensino básico devem desenvolver e que estão ligadas ao sentido do número são:

- A compreensão do sistema de numeração indu-árabe;
- O reconhecimento da diversidade de representar os números bem como da sua adequação a determinadas situações ou problemas;
- O reconhecimento do valor relativo de um número ou quantidade relativamente a outro número;
- A compreensão conceptual das operações;
- A resolução de problemas onde o decidir que tipo de respostas é adequado, que tipo de instrumentos de cálculo é adequado, que tipo de estratégia se deve aplicar e a plausibilidade do resultado face ao problema são aspectos importantes;
- O reconhecimento de que são possíveis múltiplas estratégias para um determinado problema.

No documento *Currículo nacional do ensino básico: Competências essenciais* realça–se também que "ser matematicamente competente envolve hoje, de forma integrada, um conjunto de atitudes, de capacidades e de conhecimentos relativos à matemática" (ME, 2000, p. 57) que devem ser desenvolvidos ao longo de toda a educação básica e que inclui, entre outras:

- A predisposição para procurar entender a estrutura de um problema e a aptidão para desenvolver processos de resolução, assim como para analisar os erros cometidos e ensaiar estratégias alternativas;
- A aptidão para decidir sobre a razoabilidade de um resultado e de usar, consoante os casos, o cálculo mental, os algoritmos de papel e lápis ou os instrumentos tecnológicos. (p. 57)

E, como se pode notar, o conteúdo destes pontos é mencionado em, pelo menos, uma das definições de sentido do número anteriormente apresentadas.

Desta forma, no domínio específico dos números e do cálculo, a competência matemática que deve ser desenvolvida por todos os alunos inclui os seguintes aspectos:

- A compreensão global dos números e das operações e a sua utilização de maneira flexível para fazer julgamentos matemáticos e desenvolver estratégias úteis de manipulação dos números e das operações;
- O reconhecimento e a utilização de diferentes formas de representação dos elementos dos conjuntos numéricos, assim como das propriedades das operações nesses conjuntos;
- A aptidão para efectuar cálculos mentalmente, com os algoritmos de papel e lápis ou usando a calculadora, bem como para decidir qual dos métodos é apropriado à situação;
- A sensibilidade para a ordem de grandeza dos números, assim como a aptidão para estimar valores aproximados de resultados de operações e decidir da razoabilidade de resultados obtidos por qualquer processo de cálculo ou por estimação;
- A predisposição para procurar e explorar padrões numéricos em situações matemáticas e não matemáticas e o gosto por investigar relações numéricas, nomeadamente em problemas envolvendo divisores e múltiplos de números ou implicando processos organizados de contagem;
- A aptidão para dar sentido a problemas numéricos e para reconhecer as operações que são necessárias à sua resolução, assim como para explicar os métodos e o raciocínio que foram usados. (p. 60)

Mais uma vez, estes aspectos são o decalque fiel do sentido do número tal como ele deve ser explorado e desenvolvido.

Por último, é de notar que a nível de orientações curriculares, enquanto para o NCTM, o *sentido do número* continua a ser um conceito explícito a ter em consideração e a desenvolver ao longo de toda a escolaridade, em Portugal, o *sentido do número* nunca surge ao longo dos documentos oficiais que orientam a aplicação dos programas do ensino básico. No entanto, as ideias gerais aí propostas, e anteriormente realçadas, seguem de muito perto o que é referido por Abrantes *et al.* (1999) e permitem uma identificação nítida com a maioria dos pontos das definições de *sentido do número* apresentadas.

O sentido do número e a prática lectiva

Considerando, tal como é referido no início, que o *sentido do número* é uma intuição sobre os números e, como tal uma intuição matemática (Renisk, citado por Sowder e Kelin (1993), caracteriza intuição matemática como uma evidência própria de cada um e que é facilmente acessível através da sua memória), podemos perguntar, afinal, "Como é que se auxiliam as crianças a desenvolverem uma forte intuição acerca dos números?", ou seja, "Como é que se ensina o sentido do número?".

Apesar de alguns dizerem que o sentido do número é algo que ou se tem ou não se tem (Turkel e Newman, 1993), é notório, perante a exposição anterior, que algumas das capacidades a ele associadas podem ser desenvolvidas e reforçadas. Desta forma, se pretendermos desenvolver o sentido do número nas aulas de matemática elementar, podemos referir alguns elementos educativos que o propiciam e que, de acordo com Sowder e Schappelle (1994), são:

- O fazer sentido, o qual deve ser realçado em todos os aspectos do ensino e da aprendizagem da matemática e, em particular, nos aspectos relacionados com os números;
- O ambiente da sala de aula que deve ser conducente ao fazer sentido. Deve ser um espaço de discussão sobre a matemática e que pode ocorrer quer em pequenos grupos quer na turma como um todo;
- A matemática deve ser encarada como uma partilha de aprendizagens sobre uma prática intelectual. Desta forma, aprender matemática é mais do que a simples aquisição de competências e informações. As crianças aprendem a fazer e a defender conjecturas matemáticas, a raciocinar matematicamente e a resolver problemas.

Trafton e Hartman (1997) relatam mesmo o ambiente de aulas de matemática onde, perante uma prática diferente, se pretende desenvolver o sentido do número. Os autores referem que o conhecimento e as capacidades dos alunos relacionadas com os números e o cálculo são desenvolvidos de uma forma continuada. Surgem ao longo do ano e, perante uma determinada expressão, há uma exploração que dura vários dias, o que permite a todos os alunos ter várias oportunidades para desenvolver a sua compreensão e reflectir nas estratégias utilizadas. Não estão delineadas fronteiras entre as operações, o valor posicional, os tipos de computação e o tamanho dos números. Os algoritmos inventados aparecem no início do ano e são enfatizados ao longo de todo o ano. Assim, tornam-se naturais para as crianças e estão intimamente ligados à sua intuição e ao desenvolvimento do sentido do número. As estratégias dos alunos são valorizadas nas apresentações que cada um faz do seu trabalho. Não são ensinadas estratégias particulares. Quando surge uma estratégia importante, ela é discutida com os alunos em seminário e estes são encorajados a aplicá-la em outras situações. Como ferramentas adicionais para encontrar soluções e validar raciocínios são utilizados os blocos de base 10 e a tabela dos 100. Cada material tem uma característica particular que ajuda a desenvolver o sentido do número e as diferentes estratégias de cada um. Os alunos usam-nos de forma a que façam sentido para os próprios. Os algoritmos usuais de papel e lápis não são muito enaltecidos ao longo do ano, no entanto, são frequentemente mencionados e discutidos como uma maneira de pensar. Os algoritmos são vistos pelos alunos e pelos professores como mais um meio, não o melhor, para encontrar uma resposta.

Neste tipo de aulas é tido como importante o papel do aluno na sua própria aprendizagem e consoante o seu ritmo próprio. É importante a discussão e a justificação de ideias e processos, assim como é permitida a utilização de material manipulável sempre que o aluno sinta necessidade. Podemos dizer que estas aulas são um exemplo de aulas de carácter construtivista viradas para a construção do sentido do número e para uma matemática com sentido.

É ainda de salientar que, segundo Fosnot e Dolk (2001), tradicionalmente os professores de Matemática pensaram que ensinar para o sentido do número significava ajudar as crianças a fazer conexões entre as suas acções e os objectos reais. Usavam-se, por exemplo, os blocos multibásicos e propunham-se actividades que ajudassem as crianças a compreender o reagrupar. Falava-se acerca da conexão entre o concreto, o pictórico e o simbólico. Mas todas estas técnicas pedagógicas eram usadas para ensinar os algoritmos. O objectivo do ensino da aritmética era os algoritmos, independentemente da sua compreensão.

Entretanto, nos anos 80 os educadores discutiram seriamente se o objectivo dos cálculos aritméticos deveria ser de todo os algoritmos. As autoras mencionam que as investigações de C. Kamii a levaram a insistir que ensinar os algoritmos é prejudicial para o desenvolvimento matemático das crianças. E, tal como afirmam Ponte e Serrazina (2000), não tem qualquer nexo tentar ensinar um algoritmo de uma operação a um aluno que ainda não compreendeu o significado dessa operação. Os algoritmos não devem, portanto, ser o objectivo principal do ensino do cálculo aritmético.

Usar os algoritmos, as mesmas séries de passos em todos os problemas, é contraproducente ao cálculo com sentido do número. Os algoritmos permitem tratar as operações de uma forma mecanizada, onde não é necessário pensar muito sobre o assunto, basta seguir os passos definidos à partida. No entanto, calcular com sentido do número significa que cada um deve olhar primeiramente para os números e depois decidir por uma estratégia que se coadune e seja eficiente.

No que diz respeito aos algoritmos de papel e lápis, anteriormente referidos como mais um meio entre outros para a resolução de problemas de cálculo, Ralston (2000), numa posição bastante mais radical, propõe mesmo o fim do ensino da aritmética de papel e lápis no ensino elementar, substituindo-o por um ensino que enfatize o cálculo mental e a utilização da calculadora. Na sua opinião, o sentido do número é desta forma mais evidenciado do que na execução de meros processos rotineiros de aplicação dos algoritmos aritméticos de papel e lápis.

No entanto, ao abandonar o caminho de ensinar os algoritmos, não estamos a permitir que os alunos aprendam menos, estamos a levá-los a aprender mais.

Estamos a levá-los a matematizar, a pensar como os matemáticos e a olhar os números antes de calcular (Fosnot e Dolk, 2001).

Em conclusão

Focou-se, ainda que de uma forma sumária, o que se entende *por sentido do número*. Ligou-se este conceito ao cálculo mental e ao cálculo por estimação e sublinhou-se a questão, ainda que polémica, da importância dos algoritmos de papel e lápis no ensino dos números e do cálculo aritmético elementar.

Assinalou-se o sentido do número nas orientações curriculares e na prática lectiva da aula de matemática e não se negligenciou que ao sermos todos os dias bombardeados com números, estatísticas, publicidade e informações similares – na rádio, na televisão e nos jornais – necessitamos de uma boa habilidade mental e de um bom sentido do número para podermos avaliar essa publicidade, estimar quantidades, calcular eficientemente os números com que lidamos todos os dias e avaliar se estes cálculos são razoáveis, analisar as contas do restaurante e determinar percentagens iguais, interpretar dados e estatísticas, etc..

Desde sempre e, tal como afirma Caraça (1984)

> *O maior ou menor conhecimento dos números está ligado com as condições da vida económica* (...); quanto mais intensa é a vida de relação, quanto mais frequentes e activas as trocas comerciais (...), maior é o conhecimento dos números. (p. 5)

Em conformidade com esta ideia é hoje notório que as crianças e os adultos necessitam de um maior sentido do número do que em épocas passadas e, de acordo com McIntosh *et al.* (1992), a era tecnológica em que vivemos faz com que o possuir o sentido do número seja uma das características que permite distinguir o ser humano do computador. O século XXI trará, portanto, segundo estes autores, razões que nos levam também a acreditar num foco crescente no desenvolvimento e manutenção do sentido do número.

Para finalizar, e por tudo o que atrás foi mencionado, talvez seja interessante referir que, na opinião de Ponte *et al.* (1998), faltam trabalhos de investigação em Portugal que procurem caracterizar o sentido do número.

Referências

Abrantes, P., Serrazina, L., & Oliveira, I. (1999). *A matemática na educação matemática*. Lisboa: Ministério da Educação, Departamento de Educação Básica.

Caraça, B. J. (1984). *Conceitos fundamentais da matemática*. Lisboa: Sá da Costa.

Fosnot, C. T., & Dolk, M. (2001). *Young mathematicians at work: Constructing multiplication and division*. Portsmouth, NH: Heinemann.

Greenes, C., Schulman, L., & Spungin, R. (1993). Developing sense about numbers. *Arithmetic Teacher, 40*(5), 279-284.

Markovits, Z., & Sowder, J. (1994). Developing number sense: An intervention study in grade 7. *Journal for Research in Mathematics Education, 25*(1), 4-29.

Matos, J. M., & Serrazina, L. (1996). *Didáctica da matemática*. Lisboa: Universidade Aberta.

McIntosh, A., Reys, B. J., & Reys, R. E. (1992). A proposed framework for examining basic number sense. *For the Learning of Mathematics, 12*(3), 2-8, 44.

Ministério da Educação, (2000). *Currículo nacional do ensino básico: Competências essenciais*. Lisboa: Ministério da Educação.

NCTM. (1989). *Curriculum and evaluation standards for school mathematics*. Reston, VA: NCTM.

NCTM. (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: NCTM.

Ponte, J. P., Matos, J. M., & Abrantes, P. (1998). *Investigação em educação matemática*. Lisboa: IIE.

Ponte, J. P., & Serrazina, L. (2000). *Didáctica da matemática do 1.º ciclo do ensino básico*. Lisboa: Universidade Aberta.

Ralston, A. (2000). Fim à aritmética de papel e lápis. *Educação e Matemática, 58*, 13-15 e *59*, 36-41.

Reys, R. E. (1998). Computation versus number sense. *Mathematics Teaching in the Middle School, 4*(2), 110-112.

Reys, R. E., & Yang, D.-C. (1998). Relationship between computational performance and number sense among sixth- and eighth-grade students in Taiwan. *Journal for Research in Mathematics Education, 29*(2), 225-237.

Shirley, L. (1995). Nominals: Numbers as names. *Teaching Children Mathematics, 2*(4), 242-245.

Sowder, J. T. (1988). Mental computation and number comparison: Their roles in the development of number sense and computational estimation. In J. Hiebert, & M. Behr (Orgs.), *Number concepts and operations in the middle grades* (pp. 182-197). Reston, VA: NCTM.

Sowder, J. T., & Kelin, J. (1993). Number sense and related topics. In D. T. Owens (Org.), *Research ideas for the classroom: Middle grades mathematics* (pp. 41-57). New York, NY: Macmillan.

Sowder, J., & Schappelle, B. (1994). Number sense-making. *Arithmetic Teacher, 41*(6), 342-345.

Trafton, P. R., & Hartman, C. L. (1997). Developing number sense and computational strategies in problem-centered classrooms. *Teaching Children Mathematics, 4*(4), 230-233.

Turkel, S., & Newman, C. M. (1993). Qual é o teu número? Desenvolvendo o sentido de número. *Educação e Matemática, 25*, 31-33.