

Novo Espaço – Matemática A, 11.º ano
Proposta de teste de avaliação [maio – 2023]



Nome: _____

Ano / Turma: _____ N.º: _____

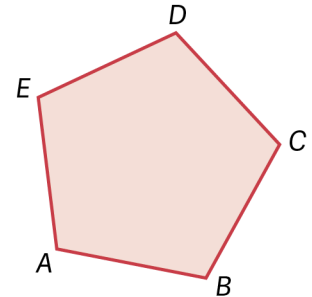
Data: ____ - ____ - ____

1. Na figura está representado um pentágono regular $[ABCDE]$.

Fixada uma unidade de comprimento, sabe-se que a medida do perímetro do pentágono é igual a 20.

O valor do produto escalar $\vec{AB} \cdot \vec{AE}$ é representado por um número que pertence ao intervalo:

- (A) $\left] \frac{9}{2}, 5 \right[$ (B) $\left] 1, \frac{6}{5} \right[$ (C) $\left] -\frac{9}{2}, -4 \right[$ (D) $\left] -5, -\frac{19}{4} \right[$



2. Na figura está representado um prisma hexagonal reto.

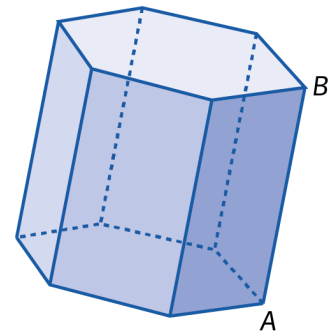
Em relação a um referencial o. n. $Oxyz$, os vértices A e B têm coordenadas $(-1, 2, 1)$ e $(1, 0, 3)$, respetivamente.

2.1 Representa por uma equação, na forma reduzida, a superfície esférica em que $[AB]$ é um diâmetro.

2.2 Seja α o plano que contém a base do prisma a que pertence o ponto B .

Uma equação do plano α é:

- (A) $2x - y + z - 2 = 0$ (B) $x - y + z = 4$
(C) $x + y - z = -2$ (D) $x + 2y + z = 4$



3. Considera a função f , de domínio $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ definida por $f(x) = \frac{2x}{x+1}$.

Seja g a função definida por $g(x) = -f(x-k)$, $k \in \mathbb{R}$.

Sabe-se que a reta de equação $x = 3$ é assíntota vertical ao gráfico de g .

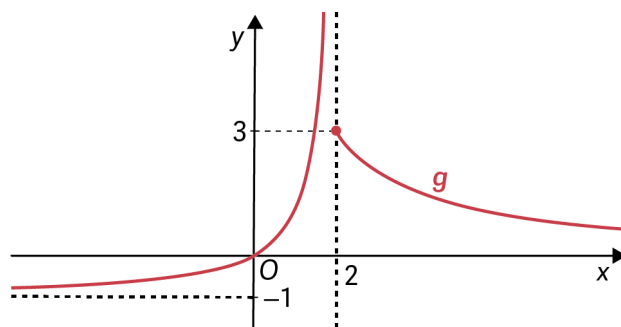
Podes concluir que o valor de k é:

- (A) 3 (B) -2
(C) 4 (D) 2

4. Na figura está representada parte do gráfico de uma função g de domínio \mathbb{R} .

Sabe-se que:

- a reta definida por $x = 2$ é uma assíntota vertical ao gráfico de g ;
- as retas definidas por $y = 0$ e $y = -1$ são assíntotas horizontais ao gráfico de g .



Sejam (u_n) , (v_n) e (w_n) as sucessões de termos gerais:

$$u_n = 2 - \frac{1}{n}, \quad v_n = \frac{n^2}{\frac{1}{2} - n} \quad \text{e} \quad w_n = \frac{2n+3}{n+1}$$

Estabelece a correspondência correta.

$\lim g(u_n) =$	•	• $-\infty$
		• -2
$\lim g(v_n) =$	•	• -1
		• 1
$\lim g(w_n) =$	•	• 3
		• $+\infty$

5. Considera a função f , de domínio \mathbb{R} , definida por:

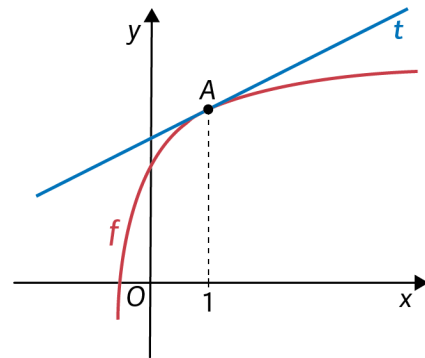
$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x+4}-2}{x^2+x} & \text{se } x > 0 \\ \frac{3x+1}{4-x} & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$$

Estuda a função f quanto à continuidade em $x = 0$.

6. Na figura está representada parte do gráfico de uma função f .

Sabe-se que:

- a reta t é tangente ao gráfico de f no ponto A de abcissa 1;
- a reta t é definida pela equação $y = 0,5x + 2,5$.



6.1 Determina, na forma reduzida uma equação da reta s que passa em A e é perpendicular à reta t .

6.2 Indica o valor de $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$.

7. Considera a função f de domínio $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ definida por $f(x) = 1 + \frac{2}{x}$.

A reta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa 2 interseca a assíntota horizontal ao gráfico de f no ponto P .

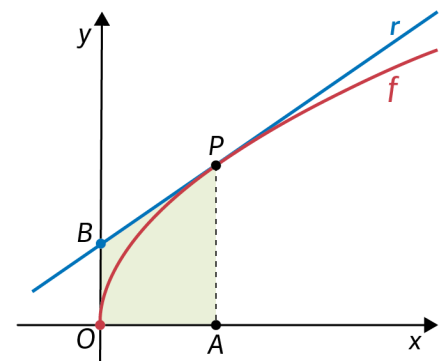
Determina as coordenadas de P .

8. Seja f a função de domínio \mathbb{R}_0^+ , definida por $f(x) = \sqrt{x}$.

O ponto P pertence ao gráfico de f e a reta r é tangente ao gráfico no ponto P .

Sabe-se que:

- a reta r interseca o eixo Oy no ponto B ;
- a projeção ortogonal do ponto P sobre Ox é o ponto A ;
- $[OAPB]$ é um trapézio.



Considera que as coordenadas do ponto P são (a, \sqrt{a}) .

Seja g a função que a cada valor positivo de a faz corresponder a área do trapézio $[OAPB]$.

Mostra que $g(a) = \frac{3a\sqrt{a}}{4}$.

FIM

Cotações											Total
Questões	1.	2.1	2.2	3.	4.	5.	6.1	6.2	7.	8.	
Cotações	16	20	16	16	24	25	25	16	27	15	200

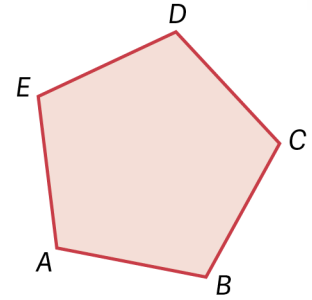
Novo Espaço – Matemática A, 11.º ano
Proposta de resolução do teste de avaliação [maio – 2023]



1. Na figura está representado um pentágono regular $[ABCDE]$.

Fixada uma unidade de comprimento, sabe-se que a medida do perímetro do pentágono é igual a 20.

O valor do produto escalar $\vec{AB} \cdot \vec{AE}$ é representado por um número que pertence ao intervalo:



- (A) $\left] \frac{9}{2}, 5 \right[$ (B) $\left] 1, \frac{6}{5} \right[$
 (C) $\left] -\frac{9}{2}, -4 \right[$ (D) $\left] -5, -\frac{19}{4} \right[$

Soma dos ângulos internos do pentágono $[ABCDE]$: $(5-2) \times 180^\circ = 540^\circ$

$$\widehat{BAE} = \frac{540^\circ}{5} = 108^\circ$$

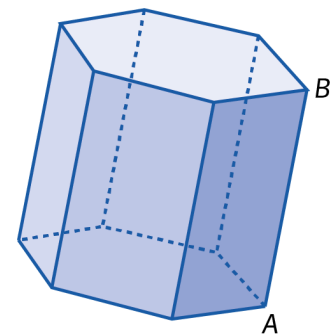
$$\overline{AB} = \overline{AE} = \frac{20}{5} = 4$$

$$\vec{AB} \cdot \vec{AE} = \|\vec{AB}\| \times \|\vec{AE}\| \times \cos 108^\circ = 4 \times 4 \times \cos 108^\circ \approx -4,944$$

Opção correta: (D) $\left] -5, -\frac{19}{4} \right[$

2. Na figura está representado um prisma hexagonal reto.

Em relação a um referencial o. n. $Oxyz$, os vértices A e B têm coordenadas $(-1, 2, 1)$ e $(1, 0, 3)$, respetivamente.



2.1 Representa por uma equação, na forma reduzida, a superfície esférica em que $[AB]$ é um diâmetro.

Seja C o ponto médio de $[AB]$.

$$\text{As coordenadas de } C \text{ são } \left(\frac{-1+1}{2}, \frac{2+0}{2}, \frac{1+3}{2} \right) = (0, 1, 2)$$

$$\text{Raio da superfície esférica: } \overline{CA} = \sqrt{(-1-0)^2 + (2-1)^2 + (1-2)^2} = \sqrt{3}$$

$$\text{Equação da superfície esférica: } x^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 = 3$$

2.2 Seja α o plano que contém a base do prisma a que pertence o ponto B .

Uma equação do plano α é:

(A) $2x - y + z - 2 = 0$ (B) $x - y + z = 4$

(C) $x + y - z = -2$ (D) $x + 2y + z = 4$

$\vec{AB} = B - A = (2, -2, 2)$ é um vetor normal ao plano α .

O ponto B de coordenadas $(1, 0, 3)$ pertence ao plano α .

$\alpha: 2x - 2y + 2z + d = 0$

$2 \times 1 - 2 \times 0 + 2 \times 3 + d = 0 \Leftrightarrow d = -8$

$\alpha: 2x - 2y + 2z - 8 = 0 \Leftrightarrow x - y + z = 4$

Opção correta: (B) $x - y + z = 4$

3. Considera a função f , de domínio $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ definida por $f(x) = \frac{2x}{x+1}$.

Seja g a função definida por $g(x) = -f(x-k)$, $k \in \mathbb{R}$.

Sabe-se que a reta de equação $x = 3$ é assíntota vertical ao gráfico de g .

Podes concluir que o valor de k é:

(A) 3 (B) -2

(C) 4 (D) 2

$f(x) = \frac{2x}{x+1} = 2 - \frac{2}{x+1}$

Assíntotas ao gráfico de f :

Assíntotas verticais: $x = -1$

Assíntotas horizontais: $y = 2$

Assíntotas ao gráfico de g :

Assíntotas verticais: $x = -1 + k$

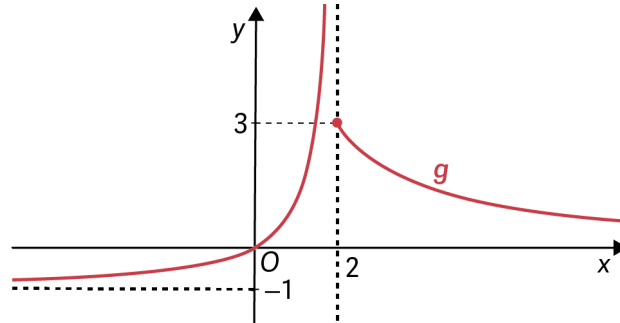
Assíntotas horizontais: $y = -2$

$-1 + k = 3 \Leftrightarrow k = 4$

Opção correta: (C) 4

4. Na figura está representada parte do gráfico de uma função g de domínio \mathbb{R} .
Sabe-se que:

- a reta definida por $x = 2$ é uma assíntota vertical ao gráfico de g ;
- as retas definidas por $y = 0$ e $y = -1$ são assíntotas horizontais ao gráfico de g .



Sejam (u_n) , (v_n) e (w_n) as sucessões de termos gerais:

$$u_n = 2 - \frac{1}{n}, \quad v_n = \frac{n^2}{\frac{1}{2} - n} \quad \text{e} \quad w_n = \frac{2n+3}{n+1}$$

Estabelece a correspondência correta.

- | | | | |
|-----------------|---|---|-----------|
| $\lim g(u_n) =$ | • | • | $-\infty$ |
| | | • | -2 |
| $\lim g(v_n) =$ | • | • | -1 |
| | | • | 1 |
| $\lim g(w_n) =$ | • | • | 3 |
| | | • | $+\infty$ |

$$\lim u_n = \lim \left(2 - \frac{1}{n} \right) = 2^-$$

Logo, $\lim g(u_n) = +\infty$.

$$\lim v_n = \lim \left(\frac{n^2}{\frac{1}{2} - n} \right) = \lim \left(\frac{1}{\frac{1}{2n^2} - \frac{1}{n}} \right) = -\infty$$

Logo, $\lim g(v_n) = -1$.

$$\lim w_n = \lim \frac{2n+3}{n+1} = \lim \left(2 + \frac{1}{n+1} \right) = 2^+$$

Logo, $\lim g(w_n) = 3$.

- | | | | |
|-----------------|---|---|-----------|
| $\lim g(u_n) =$ | • | • | $-\infty$ |
| | | • | -2 |
| $\lim g(v_n) =$ | • | • | -1 |
| | | • | 1 |
| $\lim g(w_n) =$ | • | • | 3 |
| | | • | $+\infty$ |

5. Considera a função f , de domínio \mathbb{R} , definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x+4}-2}{x^2+x} & \text{se } x > 0 \\ \frac{3x+1}{4-x} & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$$

Estuda a função f quanto à continuidade em $x=0$.

$$0 \in D_f. \quad f(0) = \frac{0+1}{4-0} = \frac{1}{4}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{3x+1}{4-x} = \frac{1}{4}$$

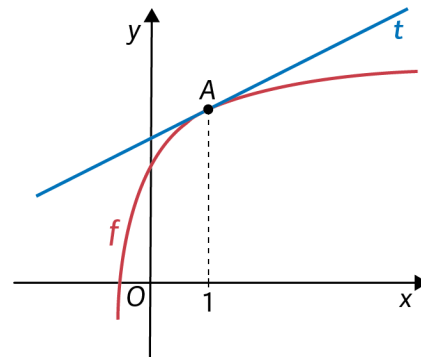
$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x+4}-2}{x^2+x} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(\sqrt{x+4}-2)(\sqrt{x+4}+2)}{x(x+1)(\sqrt{x+4}+2)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x(x+1)(\sqrt{x+4}+2)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{(x+1)(\sqrt{x+4}+2)} = \frac{1}{4}$$

Como $f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$, conclui-se que f é contínua em $x=0$.

6. Na figura está representada parte do gráfico de uma função f .
Sabe-se que:

- a reta t é tangente ao gráfico de f no ponto A de abcissa 1;
- a reta t é definida pela equação $y = 0,5x + 2,5$.



6.1 Determina, na forma reduzida uma equação da reta s que passa em A e é perpendicular à reta t .

O declive da reta t é $\frac{1}{2}$.

O declive da reta s é -2 .

Coordenadas do ponto A : $\left(1, \frac{1}{2} \times 1 + \frac{5}{2}\right) = (1, 3)$

s : $y = -2x + b$

$3 = -2 \times 1 + b \Leftrightarrow b = 5$

Equação da reta s : $y = -2x + 5$

6.2 Indica o valor de $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = f'(1) = 0,5$$

7. Considera a função f de domínio $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ definida por $f(x) = 1 + \frac{2}{x}$.

A reta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa 2 intersecta a assíntota horizontal ao gráfico de f no ponto P .

Determina as coordenadas de P .

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(1 + \frac{2}{x} \right) = 1 + 0 = 1$$

Assíntota horizontal: $y = 1$

Reta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa 2:

Coordenadas do ponto de tangência: $(2, f(2))$, ou seja, $(2, 2)$.

Declive da reta tangente:

$$f'(2) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1 + \frac{2}{x} - 2}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2 - x}{x(x - 2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \left(-\frac{1}{x} \right) = -\frac{1}{2}$$

Equação da reta tangente: $y = -\frac{1}{2}x + b$

O ponto de coordenadas $(2, 2)$ pertence à reta:

$$2 = -1 + b \Leftrightarrow b = 3$$

$$y = -\frac{1}{2}x + 3$$

As coordenadas do ponto P são solução do sistema de equações:

$$\begin{cases} y = 1 \\ y = -\frac{1}{2}x + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ x = 4 \end{cases}$$

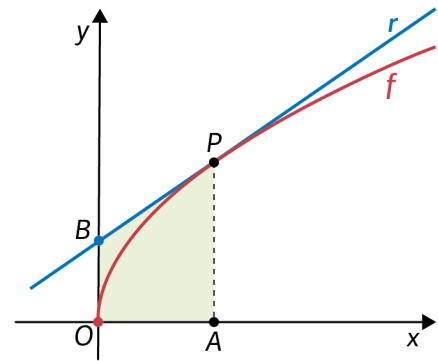
O ponto P tem coordenadas $(4, 1)$.

8. Seja f a função de domínio \mathbb{R}_0^+ , definida por $f(x) = \sqrt{x}$.

O ponto P pertence ao gráfico de f e a reta r é tangente ao gráfico no ponto P .

Sabe-se que:

- a reta r interseca o eixo Oy no ponto B ;
- a projeção ortogonal do ponto P sobre Ox é o ponto A ;
- $[OAPB]$ é um trapézio.



Considera que as coordenadas do ponto P são (a, \sqrt{a}) .

Seja g a função que a cada valor positivo de a faz corresponder a área do trapézio $[OAPB]$.

Mostra que $g(a) = \frac{3a\sqrt{a}}{4}$.

Declive da reta r é dado por $f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a}}{x - a}$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{a})(\sqrt{x} + \sqrt{a})}{(x - a)(\sqrt{x} + \sqrt{a})} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{x - a}{(x - a)(\sqrt{x} + \sqrt{a})} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{a}} = \frac{1}{2\sqrt{a}}$$

Equação da reta r : $y = \frac{1}{2\sqrt{a}}x + b$

O ponto P pertence à reta r . Então: $\sqrt{a} = \frac{a}{2\sqrt{a}} + b \Leftrightarrow b = \frac{\sqrt{a}}{2}$

Equação da reta r : $y = \frac{1}{2\sqrt{a}}x + \frac{\sqrt{a}}{2}$

O ponto B tem coordenadas $\left(0, \frac{\sqrt{a}}{2}\right)$.

Área do trapézio, ou seja, $g(a)$:

$$g(a) = \frac{\overline{AP} + \overline{OB}}{2} \times \overline{OA} = \frac{\sqrt{a} + \frac{\sqrt{a}}{2}}{2} \times a = \frac{3a\sqrt{a}}{4}$$

$$g(a) = \frac{3a\sqrt{a}}{4}$$