E a Luz insiste em ser a mais rápida!... (Parte II)

Albino Rafael

Consideremos que um electrão é acelerado a partir do repouso através de uma diferença de potencial de 1,0 MV.

Atendendo a que $W_{FNC} = 0\ \mathrm{J}$, então $\Delta E_m = 0\ \mathrm{J}$.

Assim, $\Delta E_c = -\Delta E_{p_{elect}}$.

$$E_c = -q\Delta V$$

$$E_c = 1{,}6 \times 10^{-19} \times 1 \times 10^{6} = 1{,}6 \times 10^{-13}\ \mathrm{J}$$

Como a energia total do electrão é dada por

$$E = E_c + E_0$$

sendo

$$E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \qquad \text{e} \qquad E_0 = m_0 c^2 \qquad (m_0 \text{ é a massa de repouso})$$

Então,

$$E_c = m_0 c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1 \right) \tag{1}$$

(Afinal $E_c \neq \frac{1}{2} m v^2$ *, ver anexo A)*

$$v = c\sqrt{1 - \left(\frac{m_0 c^2}{E_c + m_0 c^2} \right)^2}$$

$$v = 3 \times 10^{8} \sqrt{1 - \left[\frac{9{,}11 \times 10^{-31} \times \left(3 \times 10^{8}\right)^2}{1{,}6 \times 10^{-13} + 9{,}11 \times 10^{-31} \times \left(3 \times 10^{8}\right)^2} \right]^2} = 2{,}82 \times 10^{8}\ \mathrm{m\,s^{-1}}$$

(Este valor é, logicamente, inferior à velocidade da Luz. E esta hein (Parte II)!...)

ANEXO A

$$E_c = m_0 c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - 1 \right) = m_0 c^2 \left[\left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)^{-\frac{1}{2}} - 1 \right]$$

Considere $b = -\frac{v^2}{c^2}$

$$E_c = m_0 c^2 \left[(1+b)^{-\frac{1}{2}} - 1 \right]$$

Expandindo $(1+b)^{-\frac{1}{2}}$ pelo teorema binomial:

$$(1+b)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \left(-\frac{1}{2}\right) b + \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)}{2!} b^2 + \ldots = 1 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2} + \frac{3}{8}\frac{v^4}{c^4} + \ldots$$

Então

$$E_c = m_0 c^2 \left[\left(1 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2} + \frac{3}{8}\frac{v^4}{c^4} + \ldots \right) - 1 \right] = \frac{1}{2} m_0 v^2 + \frac{3}{8} m_0 v^2 \frac{v^2}{c^2} + \ldots$$

Se $v << c$ (velocidades não relativistas), os termos a seguir a $\frac{1}{2} m_0 v^2$ são desprezáveis.

Por isso, no limite clássico,

$$E_c = \frac{1}{2} m v^2$$