Teste de Matemática A

2017 / 2018

Teste N.º 3

Matemática A

Duração do Teste (Caderno 1+ Caderno 2): 90 minutos

12.º Ano de Escolaridade

Nome do aluno: ____ N.º: __ Turma: ___

Este teste é constituído por **dois** cadernos:

- Caderno 1 – com recurso à calculadora;
- Caderno 2 – sem recurso à calculadora.

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta indelével, azul ou preta.

Não é permitido o uso de corretor. Em caso de engano, deve riscar de forma inequívoca aquilo que pretende que não seja classificado.

Escreva de forma legível a numeração dos itens, bem como as respetivas respostas. As respostas ilegíveis ou que não possam ser claramente identificadas são classificadas com zero pontos.

Para cada item, apresente apenas uma resposta. Se escrever mais do que uma resposta a um mesmo item, apenas é classificada a resposta apresentada em primeiro lugar.

O teste inclui um formulário.

As cotações encontram-se no final do enunciado da prova.

Para responder aos itens de escolha múltipla, não apresente cálculos nem justificações e escreva, na folha de respostas:

- o número do item;
- a letra que identifica a única opção escolhida.

Na resposta aos itens de resposta aberta, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias.

Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

Formulário

Comprimento de um arco de circunferência

αr (α − amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r − raio)

Áreas de figuras planas

Losango: $\frac{\text{Diagonal maior} \times \text{Diagonal menor}}{2}$

Trapézio: $\frac{\text{Base maior} + \text{base menor}}{2} \times \text{Altura}$

Polígono regular: $\text{Semiperímetro} \times \text{Apótema}$

Setor circular: $\frac{\alpha r^2}{2}$ (α − amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r − raio)

Áreas de superfície

Área lateral de um cone: $\pi\, r\, g$ (r − raio da base; g − geratriz)

Área de uma superfície esférica: $4\,\pi\, r^2$ (r − raio)

Volumes

Pirâmide: $\frac{1}{3} \times \text{Área da base} \times \text{Altura}$

Cone: $\frac{1}{3} \times \text{Área da base} \times \text{Altura}$

Esfera: $\frac{4}{3}\,\pi\, r^3$ (r − raio)

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma progressão (u_n)

Progressão aritmética: $\frac{u_1+u_n}{2} \times n$

Progressão geométrica: $u_1 \times \frac{1-r^n}{1-r}$

Trigonometria

$\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen} a\, \cos b + \operatorname{sen} b\, \cos a$

$\cos(a+b) = \cos a\, \cos b - \operatorname{sen} a\, \operatorname{sen} b$

$\frac{\operatorname{sen} A}{a} = \frac{\operatorname{sen} B}{b} = \frac{\operatorname{sen} C}{c}$

$a^2 = b^2 + c^2 - 2\, b\, c \cos A$

Complexos

$(\rho \operatorname{cis} \theta)^n = \rho^n \operatorname{cis}(n\theta)$ ou $\left(r\, e^{i\theta}\right)^n = r^n\, e^{in\theta}$

$\sqrt[n]{\rho \operatorname{cis} \theta} = \sqrt[n]{\rho} \operatorname{cis}\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)$ ou $\sqrt[n]{r\, e^{i\theta}} = \sqrt[n]{r}\, e^{i\left(\frac{\theta}{n}+\frac{2k\pi}{n}\right)}$

($k \in \{0, \ldots, n-1\}$ e $n \in \mathbb{N}$)

Probabilidades

$\mu = p_1 x_1 + \ldots + p_n x_n$

$\sigma = \sqrt{p_1(x_1-\mu)^2 + \ldots + p_n(x_n-\mu)^2}$

Se X é $N(\mu, \sigma)$, então:

$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0{,}6827$

$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0{,}9545$

$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 0{,}9973$

Regras de derivação

$(u+v)' = u' + v'$

$(u.v)' = u'.v + u.v'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'.v - u.v'}{v^2}$

$(u^n)' = n\,.u^{n-1}.u'\ (n \in \mathbb{R})$

$(\operatorname{sen} u)' = u'.\cos u$

$(\cos u)' = -u'.\operatorname{sen} u$

$(\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u'.e^u$

$(a^u)' = u'.a^u.\ln a\ (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \frac{u'}{u\,.\ln a}\ (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

Limites notáveis

$\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e\ (n \in \mathbb{N})$

$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty\ (p \in \mathbb{R})$

CADERNO 1: 45 MINUTOS

É PERMITIDO O USO DA CALCULADORA.

1. Com o objetivo de fazer um sumo natural com três ingredientes saudáveis diferentes, a Susana dispõe de cinco tipos de frutas diferentes e de quatro tipos de legumes também diferentes.

O número de sumos que poderão ser preparados utilizando-se, no máximo, dois tipos de legumes é:

(A) 84 **(B)** 80 **(C)** 34 **(D)** 30

2. Acerca dos convidados de um jantar de solidariedade, sabe-se que:

- 60% são do sexo masculino;
- 30% dos convidados do sexo masculino são naturais da cidade do Porto;
- um quinto dos convidados do sexo feminino são naturais de outras cidades do país.

Escolhe-se ao acaso um dos convidados para fazer um breve discurso acerca da instituição que estão a apoiar.

Qual é a probabilidade de ter sido escolhida uma mulher ou uma pessoa natural da cidade do Porto? Apresente o resultado na forma de percentagem.

3. Para um certo valor real k não nulo, considere a função f, de domínio $\mathbb{R}$, definida por:

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{2k\cos x}{\frac{\pi}{2}-x} & \text{se} \quad x<\frac{\pi}{2} \\ k^2+\operatorname{sen}(5x) & \text{se} \quad x\geq\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Qual é o valor de k para o qual f é uma função contínua?

(A) $\frac{1}{5}$ **(B)** $\frac{1}{2}$ **(C)** 1 **(D)** 2

4. Considere a função f, de domínio $]-\infty,1]$, definida por:

$$f(x)=\frac{\sqrt{1-x}-3}{x-4}$$

4.1. Utilizando métodos analíticos, mostre que o gráfico de f interseta a bissetriz dos quadrantes pares em pelo menos um ponto de abcissa pertencente ao intervalo $]-1,0[$.

4.2. Sabendo que no intervalo considerado só existe um ponto nas condições enunciadas na alínea anterior, determine, recorrendo à calculadora gráfica, a abcissa desse ponto.

Apresente o valor obtido arredondado às centésimas

Reproduza o(s) gráfico(s) visualizado(s) na calculadora, devidamente identificado(s), incluindo o referencial.

5. Seja f uma função real de variável real da qual se sabe que a reta tangente ao seu gráfico no ponto de abcissa 3 tem inclinação $45°$.

Qual é o valor de $\lim_{x \to 3} \frac{f(x)-f(3)}{9-x^2}$?

(A) $\frac{1}{6}$ **(B)** $-\frac{1}{6}$ **(C)** 1 **(D)** -1

FIM DO CADERNO 1

COTAÇÕES (Caderno 1)

Item						
Cotação (em pontos)						
1.	**2.**	**3.**	**4.1**	**4.2**	**5.**	
8	20	8	25	20	8	**89**

CADERNO 2: 45 MINUTOS

NÃO É PERMITIDO O USO DA CALCULADORA.

6. Seja (x_n) uma sucessão de números reais tal que $\forall n \in \mathbb{N}, |x_n| \leq \sqrt{n}$.

Qual das seguintes afirmações é necessariamente verdadeira?

(A) $\lim \frac{x_n}{\sqrt{n}} = 0$ **(B)** $\lim \frac{x_n}{n} = 0$ **(C)** (x_n) é limitada **(D)** (x_n) não é limitada

7. Seja f a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{4x^2+12}-4}{-x+1} & \text{se} \quad x < 1 \\ -1 & \text{se} \quad x = 1 \\ \frac{x^2+2x-3}{4-4x} & \text{se} \quad x > 1 \end{cases}$$

7.1. Estude a continuidade da função f em $x = 1$.

7.2. Estude a função f quanto à existência de assíntota horizontal quando x tende para $-\infty$ e, caso exista, escreva a sua equação.

7.3. Estude a função f quanto à monotonia e existência de extremos relativos no intervalo $]1, +\infty[$.

8. Seja g uma função cuja derivada g', de domínio $\mathbb{R}$, é dada por $g'(x) = \sqrt{x^2+x+1}$.

Estude a função g quanto ao sentido das concavidades do seu gráfico e quanto à existência de pontos de inflexão.

9. Seja $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função tal que:

- f tem derivada finita em todos os pontos do seu domínio;
- $f'(x) \times f''(x) < 0$, para qualquer $x \in \mathbb{R}^-$;
- $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) + x) = 2$.

Nenhuma das representações gráficas a seguir apresentadas é a representação gráfica da função f.

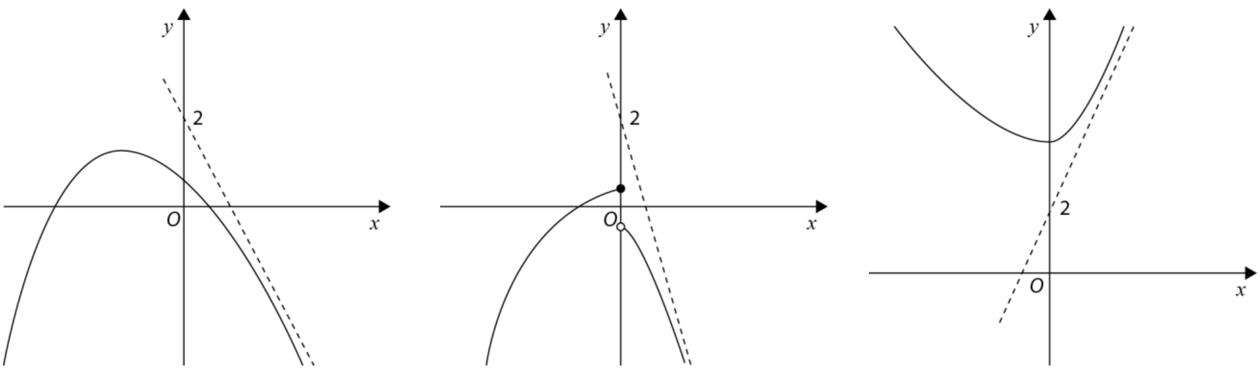


Gráfico I **Gráfico II** **Gráfico III**

Elabore uma composição na qual apresente, para cada uma das representações gráficas, uma razão pela qual essa representação gráfica não pode ser a representação gráfica da função f .

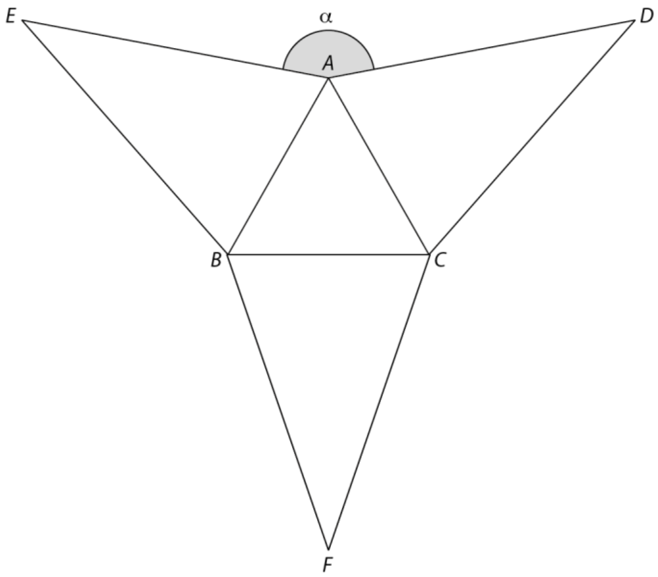
10. De uma função f, de domínio $\mathbb{R}$, sabe-se que a sua segunda derivada é dada por:

$$f''(x) = 2018\,x\,(x-1)^2(x^2-2)(x^2+3)$$

Quantos são os pontos de inflexão do gráfico de f?

(A) 1 **(B)** 2 **(C)** 3 **(D)** 4

11. Na figura está representada uma planificação de uma pirâmide triangular regular cujas arestas laterais medem 2 unidades de comprimento.



Seja α a amplitude, em radianos, do ângulo DAE $\left(\alpha \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[\right)$.

A aresta da base da pirâmide varia em função de α e, consequentemente, a área de cada uma das faces laterais também varia em função de α.

Mostre que a área lateral da pirâmide é dada, em função de α, por $-3\sqrt{3}\cos\alpha - 3\operatorname{sen}\alpha$.

FIM DO CADERNO 2

COTAÇÕES (Caderno 2)

Item								
Cotação (em pontos)								
6.	**7.1.**	**7.2.**	**7.3.**	**8.**	**9.**	**10.**	**11.**	
8	20	15	15	15	15	8	15	**111**

TESTE N.º 3 – Proposta de resolução

Caderno 1

1. Opção (B)

$$ {}^{9}C_3 - {}^{4}C_3 = 84 - 4 = 80 $$

2. Sejam A e B os acontecimentos:

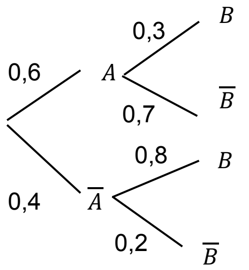
A: "o convidado é do sexo masculino"

B: "o convidado é natural da cidade do Porto"

Sabe-se que:

- $P(A) = 0{,}6$
- $P(B|A) = 0{,}3$
- $P(\overline{B}|\overline{A}) = \frac{1}{5} = 0{,}2$

Pretende-se calcular o valor de $P(\overline{A} \cup B)$.



$P(A \cap B) = 0{,}6 \times 0{,}3 = 0{,}18$

$P(A \cap \overline{B}) = 0{,}6 \times 0{,}7 = 0{,}42$

$P(\overline{A} \cap B) = 0{,}4 \times 0{,}8 = 0{,}32$

$P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 0{,}4 \times 0{,}2 = 0{,}08$

Assim:

$$ P(\overline{A} \cup B) = P(\overline{A}) + P(B) - P(\overline{A} \cap B) = $$
$$ = 0{,}4 + (0{,}18 + 0{,}32) - 0{,}32 = $$
$$ = 0{,}58 $$

A probabilidade de ter sido escolhida uma mulher ou uma pessoa natural da cidade do Porto é 58%.

3. Opção (C)

Como f é uma função contínua em $\left]-\infty, \frac{\pi}{2}\right[$ e em $\left]\frac{\pi}{2}, +\infty\right[$, para f ser contínua em todo o seu domínio terá que ser contínua também em $x = \frac{\pi}{2}$, isto é, $\lim\limits_{x \to \left(\frac{\pi}{2}\right)^-} f(x) = \lim\limits_{x \to \left(\frac{\pi}{2}\right)^+} f(x) = f\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

- $$ \lim_{x \to \left(\frac{\pi}{2}\right)^-} \left(\frac{2k\cos x}{\frac{\pi}{2} - x}\right) = 2k \lim_{x - \frac{\pi}{2} \to 0} \frac{\cos x}{-\left(x - \frac{\pi}{2}\right)} = $$

Mudança de variável:
$y = x - \frac{\pi}{2}$

$$ = 2k \lim_{y \to 0} \frac{\cos\left(y + \frac{\pi}{2}\right)}{-y} = $$
$$ = 2k \lim_{y \to 0} \frac{-\operatorname{sen} y}{-y} = $$

$$= 2k \underbrace{\lim_{y\to 0}\frac{\operatorname{sen} y}{y}}_{\text{limite notável}} =$$

$$= 2k \times 1 =$$

$$= 2k$$

- $\lim\limits_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^+} f(x) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) =$

$$= k^2 + \operatorname{sen}\left(\frac{5\pi}{2}\right) =$$

$$= k^2 + 1$$

Assim:

$2k = k^2 + 1 \Leftrightarrow k^2 - 2k + 1 = 0 \Leftrightarrow (k-1)^2 = 0 \Leftrightarrow k = 1$

4.

4.1. $f(x) = -x \Leftrightarrow f(x) + x = 0$

Seja h a função definida em $]-\infty, 1]$ por $h(x) = f(x) + x$.

Assim, mostrar que o gráfico de f interseta a bissetriz dos quadrantes pares em pelo menos um ponto de abcissa pertencente ao intervalo $]-1{,}0[$ é equivalente a mostrar que a função h tem pelo menos um zero em $]-1{,}0[$.

- h é uma função contínua em $[-1{,}0]$, visto ser a soma de duas funções contínuas neste intervalo (a função f, quociente de funções contínuas neste intervalo, e a função identidade).
- $h(-1) = f(-1) + (-1) =$

$$= \frac{\sqrt{1-(-1)}-3}{-1-4} - 1 =$$

$$= \frac{\sqrt{2}-3+5}{-5} =$$

$$= -\frac{\sqrt{2}+2}{5} < 0$$

$h(0) = f(0) + 0 =$

$$= \frac{\sqrt{1-0}-3}{0-4} =$$

$$= \frac{-2}{-4} =$$

$$= \frac{1}{2} > 0$$

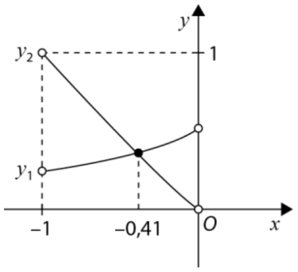
$h(-1) < 0 < h(0)$

Conclui-se, então, pelo teorema de Bolzano-Cauchy que:

$\exists c \in]-1{,}0[: h(c) = 0 \Leftrightarrow \exists c \in]-1{,}0[: f(c) + c = 0$

$\Leftrightarrow \exists c \in]-1{,}0[: f(c) = -c$ c.q.d.

4.2.



$$y_1 = \frac{\sqrt{1-x}-3}{x-4}$$

$$y_2 = -x$$

A abcissa do ponto, com aproximação às centésimas, é $-0{,}41$.

5. Opção (B)

Seja t a reta tangente ao gráfico de f em $x = 3$ e m_t o seu declive:

$m_t = \operatorname{tg} 45° = 1$ e $m_t = f'(3)$

Assim:

$$\lim_{x\to 3}\frac{f(x)-f(3)}{9-x^2} = \lim_{x\to 3}\frac{f(x)-f(3)}{(3-x)(3+x)} =$$

$$= \underbrace{\lim_{x\to 3}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}}_{f'(3)} \times \lim_{x\to 3}\frac{1}{-(3+x)} =$$

$$= 1 \times \frac{1}{-(3+3)} =$$

$$= -\frac{1}{6}$$

Caderno 2

6. Opção (B)

$\forall n \in \mathbb{N}, |x_n| \leq \sqrt{n}$, logo:

$\forall n \in \mathbb{N}, -\sqrt{n} \leq x_n \leq \sqrt{n}$ e vem que:

$\forall n \in \mathbb{N}, -\frac{\sqrt{n}}{n} \leq \frac{x_n}{n} \leq \frac{\sqrt{n}}{n}$, ou seja:

$\forall n \in \mathbb{N}, -\frac{1}{\sqrt{n}} \leq \frac{x_n}{n} \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$

Como $\lim\left(-\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \lim\frac{1}{\sqrt{n}} = 0$, então $\lim\frac{x_n}{n} = 0$.

7.

7.1. f é contínua em $x = 1$ sse existe $\lim_{x\to 1} f(x)$, ou seja, $\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x) = f(1)$.

- $\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-}\frac{\sqrt{4x^2+12}-4}{-x+1} =$

$$\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x\to 1^-}\frac{4x^2+12-16}{(-x+1)(\sqrt{4x^2+12}+4)} =$$

$$= \lim_{x\to1^-} \frac{4x^2-4}{(-x+1)(\sqrt{4x^2+12}+4)} =$$

$$= \lim_{x\to1^-} \frac{4(x-1)(x+1)}{-(x-1)(\sqrt{4x^2+12}+4)} =$$

$$= \lim_{x\to1^-} \frac{4x+4}{-(\sqrt{4x^2+12}+4)} =$$

$$= \frac{8}{-8} =$$

$$= -1$$

- $\lim\limits_{x\to1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to1^-} \frac{x^2+2x-3}{4-4x} =$

$$\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x\to1^+} \frac{(x-1)(x+3)}{-4(x-1)} =$$

$$= \lim_{x\to1^+} \frac{x+3}{-4} =$$

$$= \frac{4}{-4} =$$

$$= -1$$

Cálculo auxiliar

	1	2	−3
1		1	3
	1	3	0 = *R*

$x^2 + 2x - 3 = (x-1)(x+3)$

- $f(1) = -1$

Logo, f é contínua em $x = 1$.

7.2. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{4x^2+12}-4}{-x+1} =$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2\left(4+\frac{12}{x^2}\right)}-4}{-x+1} =$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{|x|\sqrt{4+\frac{12}{x^2}}-4}{-x+1} =$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{-x\sqrt{4+\frac{12}{x^2}}-4}{-x+1} =$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{-x\left(\sqrt{4+\frac{12}{x^2}}+\frac{4}{x}\right)}{-x\left(1-\frac{1}{x}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{4+\frac{12}{x^2}}+\frac{4}{x}}{1-\frac{1}{x}} =$$

$$= \frac{2}{1} =$$

$$= 2$$

A reta de equação $y = 2$ é assíntota horizontal ao gráfico de f quando $x \to -\infty$.

7.3. Em $]1, +\infty[$: $f(x) = \frac{x^2+2x-3}{4-4x}$

$$f'(x) = \frac{(2x+2)(4-4x)-(x^2+2x-3)(-4)}{(4-4x)^2} =$$

$$= \frac{8x-8x^2+8-8x+4x^2+8x-12}{(4-4x)^2} =$$

$$= \frac{-4x^2+8x-4}{(4-4x)^2} =$$

$$= \frac{-4(x^2-2\,x+1)}{4^2 \times (1-x)^2} =$$

$$= \frac{-4(x-1)^2}{16(x-1)^2} =$$

$$= -\frac{1}{4}$$

$f'(x) < 0, \forall x \in \left]1, +\infty\right[$, logo f é decrescente em $\left]1, +\infty\right[$ e não admite extremos relativos neste intervalo.

8. $g''(x) = \frac{1}{2} \times \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+x+1}} = \frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+1}}$

$g''(x) = 0 \Leftrightarrow 2x + 1 = 0 \ \wedge \ 2\sqrt{x^2 + x + 1} \neq 0$

$\Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$

$2\sqrt{x^2 + x + 1} > 0, \forall x \in \mathbb{R}$, logo o sinal de g'' depende apenas do sinal de $x \longmapsto 2x + 1$.

Cálculo auxiliar

$x^2 + x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4 \times 1 \times 1}}{2}$

$\Leftrightarrow \underbrace{x = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}}_{\text{equação impossível em } \mathbb{R}}$

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	$+\infty$
Sinal de g''	$-$	0	$+$
Sentido das concavidades do gráfico de g	$\cap$	P.I.	$\cup$

O gráfico de g tem a concavidade voltada para baixo em $\left]-\infty, -\frac{1}{2}\right[$ e tem a concavidade voltada para cima em $\left]-\frac{1}{2}, +\infty\right[$; tem um ponto de inflexão de abcissa $-\frac{1}{2}$.

9. Sabe-se que f tem derivada finita em todos os pontos do seu domínio, logo f é contínua. Assim, a representação gráfica (II) não pode ser a representação gráfica da função f.

Sabe-se também que $\forall x \in \mathbb{R}^-, f'(x) \times f''(x) < 0$, isto é, em $\mathbb{R}^-$, f' e f'' têm sinais contrários, o que significa que, em $\mathbb{R}^-$, ou f é decrescente e o gráfico apresenta a concavidade voltada para cima ou, em $\mathbb{R}^-$, f é crescente e o gráfico apresenta a concavidade voltada para baixo. Assim, a representação gráfica (I) não pode ser a representação gráfica da função f.

Tem-se que:

$$\lim_{x\to+\infty} (f(x) + x) = 2 \Leftrightarrow \lim_{x\to+\infty} (f(x) + x - 2) = 0 \Leftrightarrow \lim_{x\to+\infty} [f(x) - (-x + 2)] = 0$$

ou seja, a reta de equação $y = -x + 2$ é assíntota oblíqua ao gráfico de f quando $x \to +\infty$.

Na representação gráfica (III) a assíntota ao gráfico da função tem declive positivo, logo não pode corresponder à representação gráfica da função f.

10. Opção (C)

x	$-\infty$	$-\sqrt{2}$		0		1		$\sqrt{2}$	$+\infty$
$2018x$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$(x-1)^2$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	0	$+$	$+$	$+$
x^2-2	$+$	0	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
x^2+3	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
Sinal de f''	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$
Sentido das concavidades do gráfico de f	∩	P.I.	∪	P.I.	∩		∩	P.I.	∪

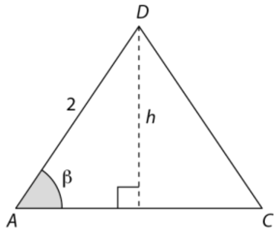
11. Seja β a amplitude, em radianos, do ângulo DAC.

$$\cos\beta = \frac{\frac{\overline{AC}}{2}}{2} \Leftrightarrow \overline{AC} = 4\cos\beta$$

$$\operatorname{sen}\beta = \frac{h}{2} \Leftrightarrow h = 2\operatorname{sen}\beta$$

$$A_{[ACD]} = \frac{4\cos\beta \times 2\operatorname{sen}\beta}{2} = 4\operatorname{sen}\beta\cos\beta$$

$$A_{\text{lateral}} = 3 \times 4\operatorname{sen}\beta\cos\beta = 12\operatorname{sen}\beta\cos\beta = 6\operatorname{sen}(2\beta)$$



Sabe-se que:

$2\beta + \alpha + \frac{\pi}{3} = 2\pi$, ou seja:

$$2\beta = 2\pi - \frac{\pi}{3} - \alpha \Leftrightarrow 2\beta = \frac{5\pi}{3} - \alpha$$

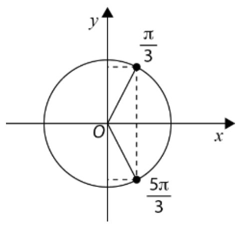
Logo, a área lateral da pirâmide é igual a:

$$6\operatorname{sen}(2\beta) = 6\operatorname{sen}\left(\frac{5\pi}{3} - \alpha\right) =$$

$$= 6\left[\operatorname{sen}\left(\frac{5\pi}{3}\right)\cos\alpha - \cos\left(\frac{5\pi}{3}\right)\operatorname{sen}\alpha\right] =$$

$$= 6\left[-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha - \frac{1}{2}\operatorname{sen}\alpha\right] =$$

$$= -3\sqrt{3}\cos\alpha - 3\operatorname{sen}\alpha \quad \text{c.q.d.}$$



$$\operatorname{sen}\left(\frac{5\pi}{3}\right) = -\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

$$\cos\left(\frac{5\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$$