Teste de Matemática A

2022 / 2023

Teste N.º 4

Matemática A

Duração do Teste: 90 minutos

10.º Ano de Escolaridade

Nome do aluno: ____ N.º: ___ Turma: ___

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta.

Não é permitido o uso de corretor. Risque aquilo que pretende que não seja classificado.

É permitido o uso de calculadora.

Apresente apenas uma resposta para cada item.

As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado.

Na resposta aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Escreva na folha de respostas o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Na resposta aos restantes itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias. Quando para um resultado não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

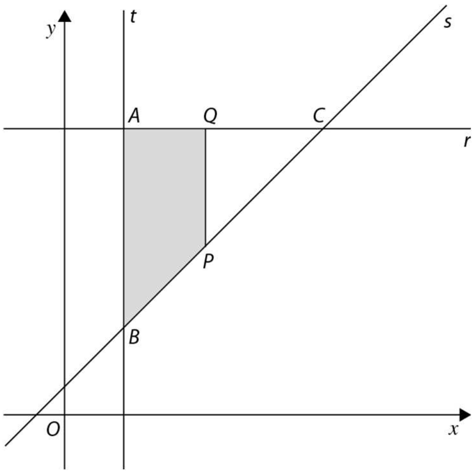
1. Considere o polinómio P definido por $P(x) = 5x^2 + x + 2023$ e um valor real não nulo a.

Sabe-se que o polinómio P tem o mesmo resto quando dividido por $x - a$ e por $x + 2a$.

Qual é o valor de a?

(A) $-\frac{1}{5}$ **(B)** $\frac{1}{5}$ **(C)** $-\frac{3}{5}$ **(D)** $\frac{3}{5}$

2. Na figura estão representadas, num referencial o.n. Oxy, as retas r, s e t.



Os pontos A e B são, respetivamente, os pontos de interseção das retas r e s com a reta t.

O ponto C é o ponto de interseção das retas r e s.

Sabe-se que:

- a reta r é definida pela equação $y = 10$;
- a reta s é definida pela equação $y = x + 1$;
- a reta t é definida pela equação $x = 2$.

Considere que um ponto P se desloca ao longo do segmento de reta $[BC]$, nunca coincidindo com o ponto B nem com o ponto C, e que um ponto Q se desloca ao longo do segmento de reta $[AC]$, acompanhando o movimento do ponto P, de forma que a abcissa do ponto Q seja sempre igual à abcissa do ponto P.

Seja x a abcissa do ponto P.

2.1. Mostre que a área do trapézio $[ABPQ]$ pode ser dada, em função de x, com $x \in]2, 9[$, por:

$$A(x) = -\frac{x^2}{2} + 9x - 16$$

2.2. Sem recorrer à calculadora, determine os valores de x para os quais a área do trapézio $[ABPQ]$ é superior a 12. Apresente a sua resposta, usando a notação de intervalos de números reais.

2.3. Considere a função f, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = -\frac{x^2}{2} + 9x - 16$. A função f pode ser definida por uma expressão do tipo $f(x) = a(x - h)^2 + k$, onde a, h e k são números reais.

Quais são os valores de a, h e k?

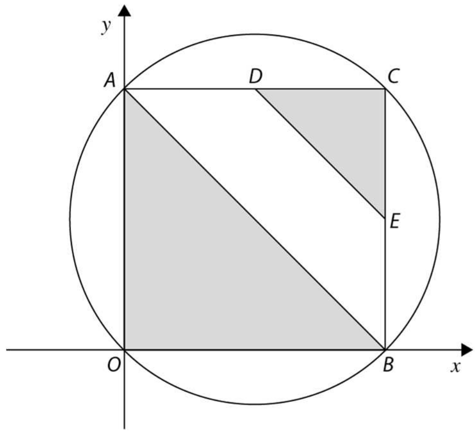
(A) $a = \frac{1}{2}$; $h = -9$ e $k = -\frac{49}{2}$

(B) $a = -\frac{1}{2}$; $h = 9$ e $k = \frac{49}{2}$

(C) $a = -1$; $h = 18$ e $k = -32$

(D) $a = -\frac{1}{2}$; $h = 9$ e $k = -16$

3. Na figura estão representados, num referencial o.n. Oxy, a circunferência definida pela equação $x^2 + y^2 - 4x - 4y = 0$ e um quadrado $[OACB]$ inscrito na circunferência.



Sabe-se que:

- os vértices A e B do quadrado pertencem aos eixos coordenados;
- a reta AB é paralela à bissetriz dos quadrantes pares e passa pelo centro da circunferência;
- $[ABED]$ é um trapézio isósceles;
- D é o ponto médio de $[AC]$.

3.1. Mostre que a circunferência tem centro no ponto de coordenadas $(2, 2)$ e raio $2\sqrt{2}$.

3.2. Em qual das opções se encontra uma equação vetorial da reta AB?

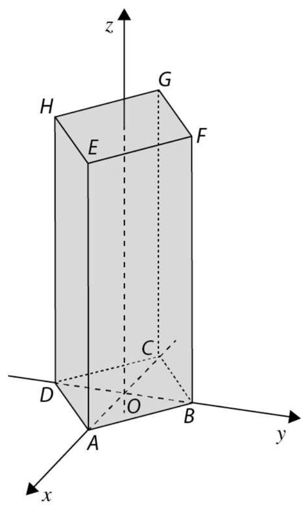
(A) $(x, y) = (2, 2) + k(1, 1), k \in \mathbb{R}$ **(B)** $(x, y) = (3, 3) + k(1, -1), k \in \mathbb{R}$

(C) $(x, y) = (1, 1) + k(1, 1), k \in \mathbb{R}$ **(D)** $(x, y) = (1, 3) + k(1, -1), k \in \mathbb{R}$

3.3. Determine as coordenadas de todos os vértices do quadrado.

3.4. Escreva uma condição que defina a região do plano a sombreado, incluindo a fronteira.

4. Na figura está representado, em referencial o.n. $Oxyz$, um prisma quadrangular regular$[ABCDEFGH]$, cuja base está contida no plano xOy.



Sabe-se ainda que:

- os pontos $A(3, 0, 0)$ e $B(0, 3, 0)$ são dois dos vértices da base;
- o centro da base é a origem do referencial;
- a altura do prisma é 8.

4.1. Considere o ponto P, de coordenadas $(k^2 + 2k,\ k^2 + 3k,\ -13)$, com $k \in \mathbb{R}$.

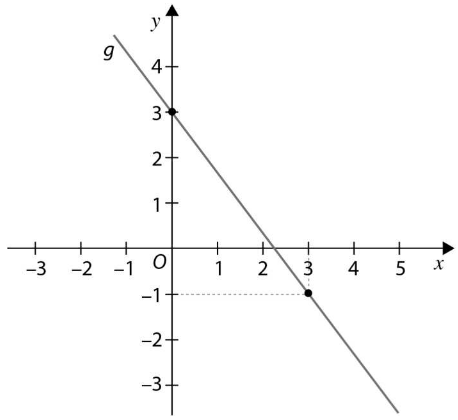
Qual é o valor de k para o qual o ponto P pertence à reta AE?

(A) -3 **(B)** -1 **(C)** 1 **(D)** 3

4.2. Considere a esfera centrada na origem e raio $\|\overrightarrow{AG}\|$ e considere também o plano α, plano mediador do segmento de reta $[BF]$.

Determine a área da interseção da esfera com o plano α.

5. Considere a função polinomial f definida, em $\mathbb{R}$, por $f(x) = x^4 - x^3 - 7x^2 + 13x - 6$ e a função afim g representada graficamente por:



5.1. Qual é o valor de $(f \circ g)(3) + g^{-1}(3)$?

(A) -25 **(B)** -24 **(C)** 23 **(D)** 24

5.2. Sabendo que 1 é raiz dupla do polinómio que define a função f, determine, sem recorrer à calculadora, os valores de x que verificam a condição $f(x) < 0$.

Apresente o conjunto-solução usando a notação de intervalos de números reais.

5.3. A função f tem três zeros. Recorrendo à calculadora gráfica, determine, com aproximação às décimas, o número real positivo k para o qual a função $f(x) + k$ tenha um único zero.

Explique como procedeu. Na sua resposta, deve incluir o(s) gráfico(s) visualizado(s) na sua calculadora e a(s) coordenada(s) do(s) ponto(s) que considere relevante(s) arredondada(s) às décimas.

FIM

COTAÇÕES

Item													
Cotação (em pontos)													
1.	**2.1.**	**2.2.**	**2.3.**	**3.1.**	**3.2.**	**3.3.**	**3.4.**	**4.1**	**4.2.**	**5.1.**	**5.2.**	**5.3.**	
10	20	20	10	15	10	15	20	10	20	10	20	20	**200**

Teste N.º 4 – Proposta de resolução

1. Opção (B)

$P(a) = P(-2a)$

$5a^2 + a + 2023 = 5 \times (-2a)^2 + (-2a) + 2023$

$\Leftrightarrow 5a^2 + a = 20a^2 - 2a$

$\Leftrightarrow -15a^2 + 3a = 0$

$\Leftrightarrow a(-15a + 3) = 0$

$\Leftrightarrow a = 0 \ \lor \ -15a + 3 = 0$

$\Leftrightarrow a = 0 \ \lor \ a = \frac{3}{15}$

Como $a \in \mathrm{IR}\backslash\{0\}$, então $a = \frac{1}{5}$.

2.

2.1. $A(x) = \frac{\overline{AB}+\overline{QP}}{2} \times \overline{AQ} =$

$= \frac{7 + (9 - x)}{2} \times (x - 2) =$

$= \left(\frac{16}{2} - \frac{x}{2}\right) \times (x - 2) =$

$= 8x - 16 - \frac{x^2}{2} + x =$

$= -\frac{x^2}{2} + 9x - 16$ c.q.d.

Cálculo auxiliar

$A(2, 10)$

$B(2, 3)$ $\quad y_B = 2 + 1 = 3$

$Q(x, 10)$

$P(x, x + 1)$

Assim:

$\overline{AB} = 10 - 3 = 7$

$\overline{QP} = 10 - (x + 1) = 9 - x$

$\overline{AQ} = x - 2$

2.2. Pretende-se os valores de $x \in]2, 9[$ tais que:

$A(x) > 12$

$\Leftrightarrow -\frac{x^2}{2} + 9x - 16 > 12$

$\Leftrightarrow -\frac{x^2}{2} + 9x - 28 > 0$

$\Leftrightarrow -x^2 + 18x - 56 > 0$

Assim, os valores de x que satisfazem o pretendido são os valores de x que pertencem ao conjunto $]4, 14[\cap]2, 9[$, isto é, $x \in]4, 9[$.

Cálculo auxiliar

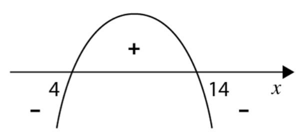
$-x^2 + 18x - 56 = 0$

$\Leftrightarrow x = \frac{-18 \pm \sqrt{18^2 - 4 \times (-1) \times (-56)}}{2 \times (-1)}$

$\Leftrightarrow x = \frac{-18 \pm \sqrt{100}}{-2}$

$\Leftrightarrow x = \frac{-18+10}{-2} \ \lor \ x = \frac{-18-10}{-2}$

$\Leftrightarrow x = 4 \ \lor \ x = 14$



2.3. Opção (B)

$f(x) = -\frac{x^2}{2} + 9x - 16 = -\frac{1}{2}(x^2 - 18x) - 16 =$

$= -\frac{1}{2}(x^2 - 18x + 9^2 - 9^2) - 16 =$

$$= -\frac{1}{2}(x^2 - 18x + 9^2) - 9^2 \times \left(-\frac{1}{2}\right) - 16 =$$
$$= -\frac{1}{2}(x-9)^2 + \frac{81}{2} - 16 =$$
$$= -\frac{1}{2}(x-9)^2 + \frac{49}{2}$$

Assim, $a = -\frac{1}{2}$, $h = 9$ e $k = \frac{49}{2}$.

3.

3.1. $x^2 + y^2 - 4x - 4y = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 2^2 + y^2 - 4y + 2^2 = 2^2 + 2^2$

$$\Leftrightarrow (x-2)^2 + (y-2)^2 = 8$$

A circunferência tem centro (2, 2) e raio $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$.

3.2. Opção (D)

Como a reta *AB* é paralela à bissetriz dos quadrantes pares (reta de equação $y = -x$) tem o mesmo declive, ou seja, -1. Assim, um vetor diretor da reta *AB* é o vetor $\vec{u}$ de coordenadas (1, −1), o que exclui as opções (A) e (C), pois não apresentam na respetiva equação vetorial um vetor diretor colinear com $\vec{u}$.

Como a reta *AB* passa pelo centro da circunferência, ponto de coordenadas (2, 2), verifiquemos se o ponto pertence às retas cujas equações se encontram nas opções (B) e (D):

$$(2,2) = (3,3) + k(1,-1)$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2 = 3 + k \\ 2 = 3 - k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = -1 \\ k = 1 \end{cases}$$

Condição impossível, logo o ponto de coordenadas (2, 2) não pertence a esta reta, o que exclui a opção (B).

$$(2,2) = (1,3) + k(1,-1)$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2 = 1 + k \\ 2 = 3 - k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 1 \\ k = 1 \end{cases}$$

O ponto de coordenadas (2, 2) pertence a esta reta, logo a opção verdadeira é a (D).

3.3. Os vértices do quadrado são os pontos $O(0,0)$, A, B e C.

- O ponto A é o ponto de interseção da circunferência com o semieixo positivo Oy:

$$x^2 + y^2 - 4x - 4y = 0 \ \land \ x = 0$$
$$\Leftrightarrow 0^2 + y^2 - 0 - 4y = 0 \ \land \ x = 0$$
$$\Leftrightarrow y(y-4) = 0 \ \land \ x = 0$$
$$\Leftrightarrow (y = 0 \ \lor \ y = 4) \ \land \ x = 0$$

Assim, $A(0,4)$.

- O ponto B é o ponto de interseção da circunferência com o semieixo positivo Ox:

$x^2 + y^2 - 4x - 4y = 0 \ \wedge \ y = 0$

$\Leftrightarrow x^2 + 0^2 - 4x - 0 = 0 \ \wedge \ y = 0$

$\Leftrightarrow x(x-4) = 0 \ \wedge \ y = 0$

$\Leftrightarrow (x = 0 \ \vee \ x = 4) \ \wedge \ y = 0$

Assim, $B(4, 0)$.

- O ponto C tem a mesma abcissa do ponto B e a mesma ordenada do ponto A, logo as coordenadas de C são (4, 4).

3.4.

Equação reduzida da reta AB: $y = -x + 4$

Equação reduzida da reta DE: $y = -x + 6$

Cálculo auxiliar
D é o ponto médio de [*AC*], logo as coordenadas de *D* são (2, 4).
Assim:
$y = -x + b$
e $4 = -2 + b \Leftrightarrow b = 6$

A condição que define a região a sombreado, incluindo a fronteira, é:

$(y \leq -x + 4 \ \wedge \ x \geq 0 \ \wedge \ y \geq 0) \ \vee \ (y \geq -x + 6 \ \wedge \ x \leq 4 \ \wedge \ y \leq 4)$

4.

4.1. Opção (A)

A reta AE pode ser definida pela condição $x = 3 \wedge y = 0$.

Assim, para que $P(k^2 + 2k, k^2 + 3k, -13)$ pertença à reta AE, tem que:

$k^2 + 2k = 3 \ \wedge \ k^2 + 3k = 0 \Leftrightarrow k^2 + 2k - 3 = 0 \ \wedge \ k(k+3) = 0$

$\Leftrightarrow k = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \times 1 \times (-3)}}{2 \times 1} \ \wedge \ (k = 0 \ \vee \ k + 3 = 0)$

$\Leftrightarrow (k = 1 \ \vee \ k = -3) \ \wedge \ (k = 0 \ \vee \ k = -3)$

$\Leftrightarrow k = -3$

4.2.

- Equação da esfera centrada na origem e raio $\|\overrightarrow{AG}\|$: $x^2 + y^2 + z^2 \leq 100$

Cálculo auxiliar
$A(3, 0, 0)$
$G(-3, 0, 8)$
$\|\overrightarrow{AG}\| = \sqrt{(-3-3)^2 + (0-0)^2 + (8-0)^2} = \sqrt{36 + 64} =$
$= \sqrt{100} =$
$= 10$

- Equação do plano α (plano mediador de $[BF]$): $z = 4$

- Interseção da esfera com o plano α:

  $x^2 + y^2 + z^2 \leq 100 \ \wedge \ z = 4 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + 4^2 \leq 100 \ \wedge \ z = 4$

  $\Leftrightarrow x^2 + y^2 \leq 84 \ \wedge \ z = 4$

  Círculo de raio $\sqrt{84}$.

A área da interseção da esfera com o plano α é:

$A = \pi \times \left(\sqrt{84}\right)^2 = 84\pi$

5.

5.1. Opção (B)

$(f \circ g)(3) + \underbrace{g^{-1}(3)}_{0 \ (*)} = f\big(g(3)\big) + 0 = f(-1) =$

$= 1^4 - (-1)^3 - 7 \times (-1)^2 + 13 \times (-1) - 6 =$

$= -24$

(*) Se (0, 3) ∈ gráf. g, então (3, 0) ∈ gráf. g^{-1}.

5.2. $f(x) = x^4 - x^3 - 7x^2 + 13x - 6 = (x-1)(x-1)(x^2 + x - 6) =$

$= (x-1)^2(x-2)(x+3)$

Cálculos auxiliares

	1	−1	−7	13	−6
1		1	0	−7	6
	1	0	−7	6	0
1		1	1	−6	
	1	1	−6	0	

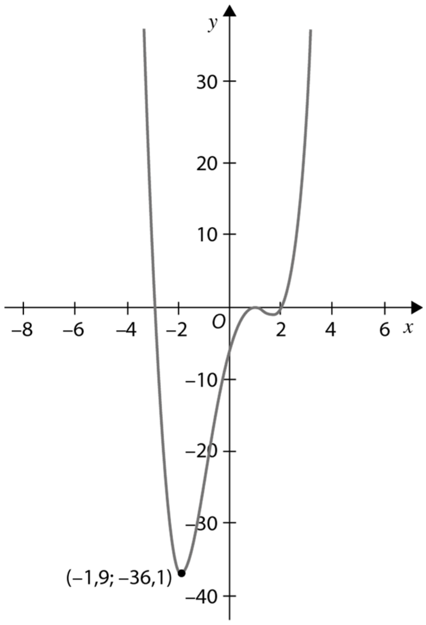
$x^2 + x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \times 1 \times (-6)}}{2 \times 1} \Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{25}}{2}$

$\Leftrightarrow x = 2 \ \vee \ x = -3$

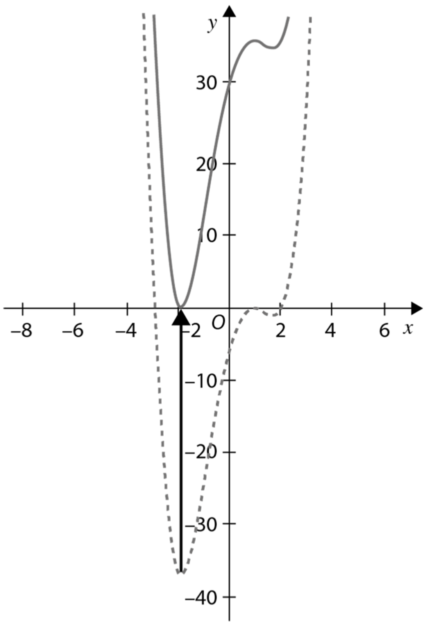
x	$-\infty$	-3		1		2	$+\infty$
$(x-1)^2$	+	+	+	0	+	+	+
$x-2$	−	−	−	−	−	0	+
$x+3$	−	0	+	+	+	+	+
$f(x)$	+	0	−	0	−	0	+

Assim, $f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in \,]-3, 1[\, \cup \,]1, 2[$.

5.3.



Para que a função $f(x) + k$ tenha apenas um zero, o gráfico de f terá de sofrer uma translação associada ao vetor (0, k), onde k é o valor em módulo do mínimo absoluto de f.



Recorrendo às capacidades gráficas da calculadora, obtém-se, com aproximação às décimas, $k \approx 36{,}1$.