

TEXTO DE APOIO PARA

VIBRAÇÕES DE NAVIOS

Carlos Guedes Soares

Secção Autónoma de Engenharia Naval
Instituto Superior Técnico
1996/97

1.	INTRODUÇÃO	3
2.	ANÁLISE NUMÉRICA DE SISTEMAS SIMPLES	5
2.1	<i>SISTEMA ELÁSTICO COM UM GRAU DE LIBERDADE</i>	5
2.2	<i>SISTEMA ELÁSTICO COM DOIS GRAUS DE LIBERDADE</i>	8
2.3	<i>SISTEMA ELÁSTICO DE UM GRAU DE LIBERDADE COM DISSIPADOR</i>	9
2.4	<i>SISTEMA ELASTO-PLÁSTICO COM UM GRAU DE LIBERDADE</i>	10
2.5	<i>MÉTODOS DE INTEGRAÇÃO NUMÉRICA DIRECTA</i>	12
2.5.1	<u>Método da Aceleração Linear</u>	12
2.5.2	<u>Método do θ de Wilson</u>	13
2.5.3	<u>Método de Newmark</u>	15
2.5.4	<u>Método das Diferenças Centrais</u>	16
2.5.5	<u>Método de Houbolt</u>	17
2.6	<i>MÉTODOS DE INTEGRAÇÃO DA RESPOSTA</i>	18
2.6.1	<u>Resposta a uma Função Periódica</u>	18
2.6.2	<u>Resposta a um Impulso</u>	19
2.6.3	<u>Resposta a uma Função Aperiódica</u>	21
3.	FORMULAÇÃO DOS PROBLEMAS DE DINÂMICA	24
3.1	<i>PRINCÍPIO DA CONSERVAÇÃO DA ENERGIA</i>	24
3.2	<i>ENERGIA POTENCIAL DE DEFORMAÇÃO</i>	26
3.3	<i>PRINCÍPIO DO TRABALHO VIRTUAL</i>	26
3.4	<i>PRINCÍPIO DE HAMILTON</i>	28
3.4.1	<u>Sistema de Massa e Mola</u>	30
3.4.2	<u>Vibrações de uma Barra em Tracção</u>	31
3.4.3	<u>Dedução das Equações das Vibrações Transversais de Vigas</u>	32
3.4.4	<u>Viga Encastrada com Carregamento Lateral</u>	37
3.5	<i>EQUAÇÕES DE LAGRANGE</i>	38
4.	ANÁLISE DINÂMICA DE SISTEMAS DISCRETOS	42
4.1	<i>COEFICIENTES DE INFLUÊNCIA</i>	42
4.2	<i>ENERGIA DE DEFORMAÇÃO</i>	42
4.3	<i>EQUAÇÃO DE LAGRANGE</i>	47
4.4	<i>TRANSFORMAÇÕES LINEARES DE COORDENADAS</i>	48
4.5	<i>MODOS PRÓPRIOS DE VIBRAÇÕES</i>	53
4.6	<i>SOLUÇÃO DO PROBLEMA DE VALORES PRÓPRIOS</i>	57
4.6.1	<u>Método da Iteração Matricial</u>	57
4.6.2	<u>Método de Jacobi</u>	63
4.7	<i>COCIENTE DE RAYLEIGH</i>	71
4.8	<i>SISTEMAS SEM RESTRIÇÕES</i>	73
	<i>MODOS PRÓPRIOS EM SISTEMAS COM AMORTECIMENTO VISCOSO</i>	75
5.	ANÁLISE DINÂMICA DE SISTEMAS CONTÍNUOS	77
5.1	<i>VIBRAÇÕES TRANSVERSAIS DE CABOS</i>	77
5.2	<i>VIBRAÇÕES LONGITUDINAIS DE BARRAS</i>	79
5.2.1	<u>Vibrações Torsionais de Barras</u>	82
5.2.2	<u>Vibrações Transversais de Vigas</u>	83
6.	MÉTODOS APROXIMADOS DE ANÁLISE DE SISTEMAS CONTÍNUOS	86
6.1	<i>MÉTODO DE RAYLEIGH</i>	86
6.2	<i>MÉTODO DE HOLZER</i>	90
6.2.1	<i>Exemplo da Aplicação do Método de Holzer às Vibrações Torsionais</i>	94
6.3	<i>MÉTODO DE MYKLESTAD PARA VIBRAÇÕES FLEXURAS</i>	98

1. INTRODUÇÃO

A disciplina de Vibrações de Navios é a terceira de uma sequência que estuda problemas de dinâmica. Em Mecânica Aplicada II, estuda-se os princípios da dinâmica dos corpos rígidos, desenvolvendo a familiaridade com a aplicação da segunda lei de Newton. Em Dinâmica do Navio, estuda-se em mais detalhe as aplicações da dinâmica dos corpos rígidos ao estudo do comportamento do navio no mar. Para poder descrever a resposta do navio em mar agitado, é necessário dar uma introdução à teoria dos processos estocásticos, os quais são utilizados para descrever a elevação da superfície do mar agitado e a correspondente resposta do navio.

Enquanto na disciplina de Dinâmica do Navio se considera o Navio como um corpo rígido, em Vibrações do Navio vai-se estudar o comportamento do navio considerado como um corpo flexível. Serão estudadas técnicas básicas de análise de dinâmica de estruturas, procedendo-se a uma revisão dos métodos de tratamento de sistemas discretos, os quais se podem utilizar como aproximações para representar sistemas contínuos. Tratar-se-ão depois os métodos específico de sistemas contínuos em particular a análise modal.

Após o estudo das técnicas de análise dinâmica de estruturas, proceder-se-á à sua aplicação ao caso específico dos navios. Serão caracterizadas as fontes de excitação mais importantes e proceder-se-á ao estudo da resposta da estrutura primária e de algumas importantes estruturas secundárias às excitações em causa. Considerar-se-á também diferentes métodos de redução das vibrações ou do seu efeito em equipamentos e pessoas a bordo dos navios.

A característica fundamental do comportamento dinâmico é a dependência no factor tempo e é o desenvolvimento de forças de inércia que estão associadas ao movimento. Ao descrever o comportamento dinâmico há alguma tendência em associar a designação de oscilações com o comportamento a baixas frequências e a de vibrações ao comportamento quando a frequência é elevada. Como as baixas frequências estão associadas com grandes massas, é mais comum designar por oscilações o comportamento do navio como corpo rígido e por vibrações o comportamento dinâmico da sua estrutura.

As vibrações vão provocar esforços dinâmicos nos elementos estruturais que têm de ser dimensionados para os resistir, quer do ponto de vista da carga máxima a que ficam sujeitos, quer da acumulação de danos por fadiga.

As vibrações estão associadas a acelerações e velocidades que vão ser sentidas pelas pessoas que se encontram a bordo, provocando uma deterioração do meio ambiente. Para além disso, a interacção com o ar e com a água vai provocar o ruído aéreo e submarino, afectando o primeiro o meio ambiente a bordo. Portanto, as vibrações têm de ser encaradas como um problema de resistência estrutural, quer se trate da estrutura primária do navio, de estruturas secundárias ou de equipamentos, e como um problema relacionado com a qualidade de vida a bordo.

A forma mais eficiente de resolver os problemas de vibrações consiste em identificar a fonte de excitação e resolvê-la. No entanto, na grande maioria das situações isso não é possível, pelo que se torna necessário quantificar a excitação e a resposta da estrutura à excitação. Com resposta caracterizada em função de parâmetros como massa, amortecimento e rigidez, é possível decidir como alterar alguns deles para evitar as

características mais indesejáveis da resposta estrutural. O objectivo fundamental desta disciplina é a familiarização com os métodos de cálculo da resposta estrutural.

2. ANÁLISE NUMÉRICA DE SISTEMAS SIMPLES

Inicia-se o estudo do comportamento dinâmico de estruturas pela análise numérica da resposta de sistemas simples. A utilização de métodos numéricos para a resolução das equações diferenciais do equilíbrio, representa o tratamento mais geral que se pode dar a estes problemas, e é o único que se torna possível de aplicar no caso de problemas de grande complexidade. Assim, começa-se desde o início por chamar a atenção para as particularidades destes métodos.

O cálculo numérico da resposta de sistemas simples tem também a vantagem de realçar os parâmetros que influem no movimento e de analisar em detalhe a variação no tempo da resposta, o que contribui para uma melhor percepção do fenómeno.

Os sistemas vão ser estudados, consistem em associações de massas e molas, as quais podem ser idealizações de estruturas, representando a mola a rigidez das mesmas (figura 1).

2.1 Sistema Elástico com um Grau de Liberdade

Estes sistemas, normalmente representados por uma mola, uma massa e eventualmente um dissipador, ficam completamente definidos por uma única coordenada, normalmente o deslocamento da massa.

Considere-se um sistema de uma mola com rigidez k e de uma massa m que está actuada por uma força $F(t)$. Representando por x o deslocamento da massa, a equação do equilíbrio é dada pela aplicação da segunda lei de Newton:

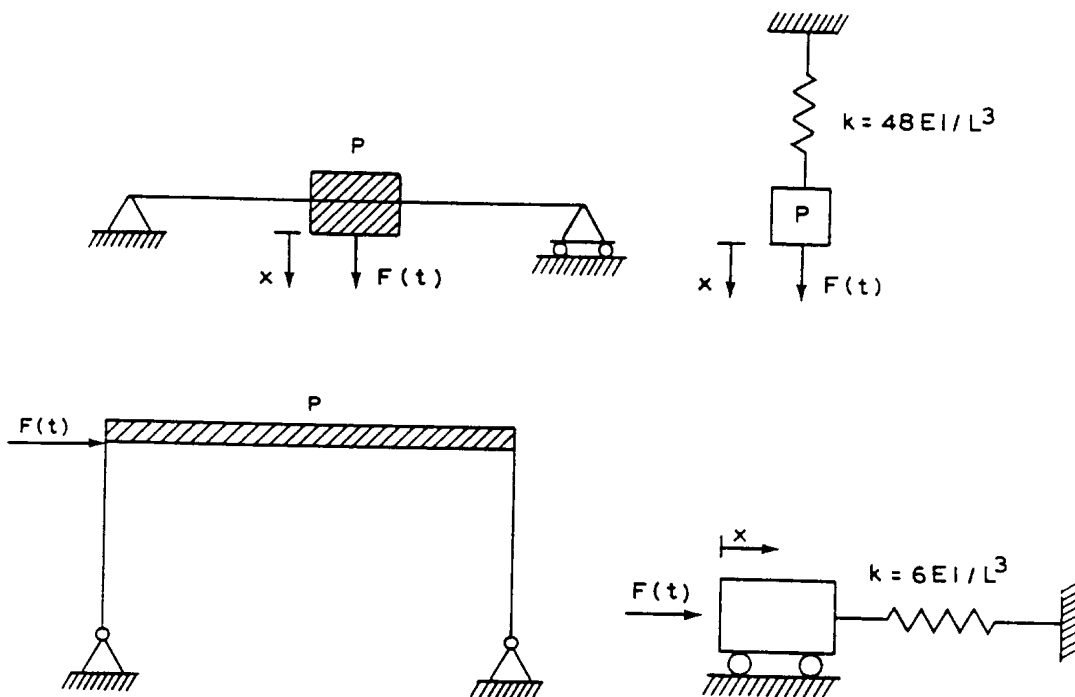


Figura 1 - Idealização com um grau de liberdade para representar modelos estruturais

$$F(t) - kx = m\ddot{x}$$

onde x representa a aceleração do movimento, ou seja, a segunda derivada de x em ordem ao tempo.

Note-se que a mesma equação podia ter sido deduzida a partir da aplicação do princípio d'Alembert para o que teria de considerar-se a existência de uma força de inércia igual ao produto da massa pela aceleração, a qual se opunha ao movimento. Estabelecendo o equilíbrio dinâmico resultava então:

$$F(t) - kx - m\ddot{x} = 0$$

o que é evidentemente a mesma equação que foi deduzida anteriormente.

Esta equação que tem uma solução analítica sobejamente conhecida, irá ser utilizada para ilustrar os princípios da integração numérica no tempo. Este processo consiste em partir das condições Iniciais do movimento, em termos de deslocamento, velocidade e aceleração, e caminhar em intervalos de tempo, calculando o valor daquelas grandezas em pontos distantes no tempo. Há vários métodos disponíveis, mas Iniciar-se-á o estudo com um que seja intuitivamente perceptível.

Considere-se que se dividiu o tempo em intervalos discretos, de duração Δt fixa, e que se vai estudar a evolução que o deslocamento do corpo tem ao longo do tempo. Designa-se por x_i o deslocamento quando o tempo é $t = i$. Δt e x_{i-1} o deslocamento no intervalo de tempo imediatamente anterior. A aceleração nesta altura determina-se a partir da equação do movimento:

$$\ddot{x}_i = \frac{F_i}{m} - \frac{k}{m}x_i$$

onde $F_i = F(t_i) = F(i\Delta t)$.

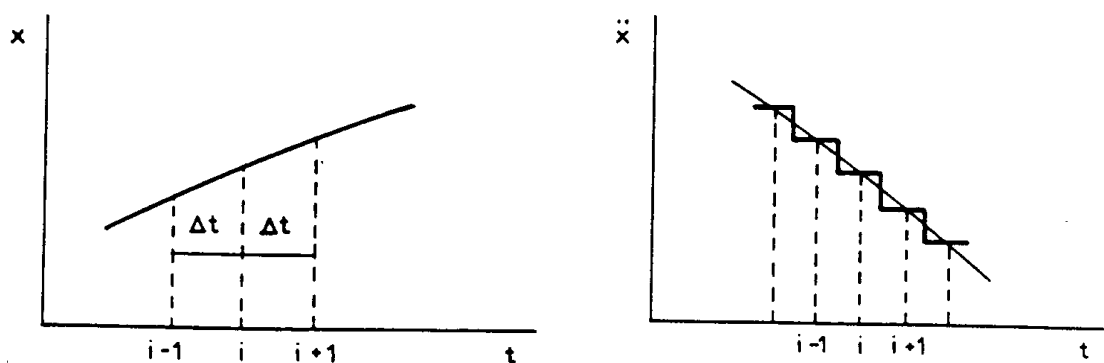


Figura 2 - Discretização da aceleração no método da aceleração constante

Para se determinar o deslocamento no intervalo de tempo seguinte, pode extrapolar-se utilizando um valor médio da velocidade \dot{x}_{im} :

$$x_{i+1} = x_i + \dot{x}_{im}\Delta t$$

o que implica considerar-se que entre os pontos i e $i+1$, a velocidade é constante.

O valor médio que a velocidade vai ter no intervalo de i para $(i+1)$ pode extrapolar-se a partir do seu valor no intervalo $(i-1)$ a i e do valor da aceleração em i :

$$\dot{x}_m = \frac{x_i - x_{i-1}}{\Delta t} + \ddot{x}_i \Delta t$$

o que implica a hipótese que \ddot{x}_i é constante durante o período de $(i-1/2)$ a $(i+1/2)$. Esta hipótese equivale a aproximar-se a curva da aceleração por uma série de segmentos de recta nos intervalos Δt , substituído a área sob a curva pela área dos rectângulos limitados por aqueles segmentos.

Substituído o valor da velocidade média na expressão anterior, obtém-se a expressão para o deslocamento:

$$x_{i+1} = 2x_i - x_{i-1} + \left(\frac{F_i}{m} - \frac{k}{m} x_i \right) (\Delta t)^2$$

a qual permite determinar o deslocamento quando o tempo é $(i+1) \Delta t$ a partir dos valores do deslocamento nos dois intervalos de tempo anteriores.

Esta descrição aproximada do movimento terá uma precisão aceitável desde que o intervalo de tempo Δt escolhido seja suficientemente pequeno relativamente à taxa de variação de aceleração no tempo, já que se considerou a aceleração constante durante o intervalo de tempo. Obviamente que à medida que Δt tende para zero, a solução tende para o seu valor exacto mas o esforço de computação também se torna impraticável. Em regra, consegue-se obter resultados com suficiente precisão, utilizando-se um intervalo de tempo que não seja superior a um décimo do período natural do sistema. No entanto, é necessário verificar que este intervalo é suficientemente pequeno para poder representar adequadamente a variação temporal da força de excitação $F(t)$.

Para o início do processo do cálculo da variação do deslocamento no tempo, é necessário ter um procedimento especial pois quando $t = 0$, não há um valor de x_{i-1} para substituir na fórmula. Pode considerar-se que a velocidade vai ser constante durante o primeiro intervalo de tempo, e igual ao seu valor a meio do intervalo $(\dot{x}_0 + \ddot{x}_0 \Delta t / 2)$. O deslocamento será o produto da velocidade pelo tempo Δt :

$$x_1 = x_0 + \dot{x}_0 \cdot \Delta t + \frac{1}{2} \ddot{x}_0 (\Delta t)^2$$

Alternativamente podia considerar-se que a aceleração varia linearmente durante o primeiro intervalo de tempo, o que conduziria a:

$$x_1 = x_0 + \dot{x}_0 \cdot \Delta t + (2\ddot{x}_0 + \ddot{x}_1) \frac{(\Delta t)^2}{6}$$

conforme se mostra em detalhe na secção 2.5.1.

Esta expressão só pode ser avaliada iterativamente já que inicialmente não se sabe o valor de \ddot{x}_1 o qual se determina a partir da equação de equilíbrio, dependendo pois do próprio x_1 . No entanto, nos casos em que a força aplicada inicialmente é zero, e portanto, em que a aceleração inicial também é zero, a primeira expressão não permite o início do processo de cálculo, sendo necessário utilizar a segunda.

O método de integração que se descreveu é um dos muitos disponíveis, os quais variam nas suas propriedades de estabilidade numérica e de convergência, e que diferem na dimensão do intervalo de tempo que permitem utilizar na integração.

2.2 Sistema Elástico com dois Graus de Liberdade

Considere-se agora o sistema de dois graus de liberdade indicado na figura:

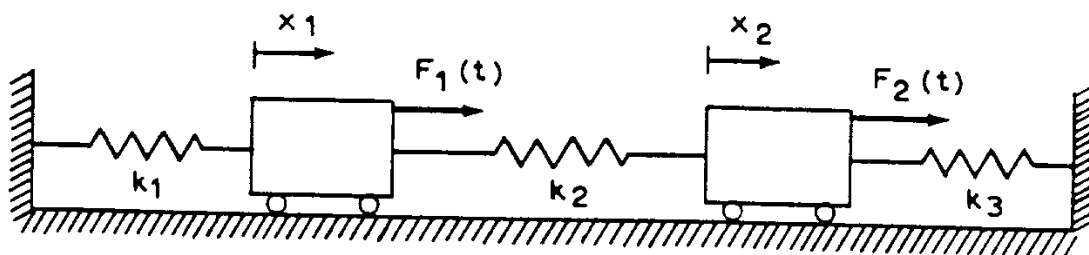


Figura 3 - Sistema com dois graus de liberdade

Aplicando as condições do equilíbrio às duas massas resulta nas seguintes equações:

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1(t) + (k_1 + k_2) x_1(t) - k_2 x_2(t) - F_1(t) &= 0 \\ m_2 \ddot{x}_2(t) - k_2 x_1(t) + (k_2 + k_3) x_2(t) - F_2(t) &= 0 \end{aligned}$$

O sistema de equações será resolvido aplicando os mesmos princípios do que no caso de uma só equação. As acelerações das massas obtém-se a partir do valor dos deslocamentos e das forças de excitação:

$$\begin{aligned} \ddot{x}_{1i}(t) &= \frac{F_{1i}}{m_1} - \frac{k_1 + k_2}{m_1} x_{1i} + \frac{k_2}{m_1} x_{2i} \\ \ddot{x}_{2i}(t) &= \frac{F_{2i}}{m_2} + \frac{k_2}{m_2} x_{1i} - \frac{k_2 + k_3}{m_2} x_{2i} \end{aligned}$$

Agora a fórmula de recorrência

$$x_{i+1} = 2x_i - x_{i-1} + \ddot{x}_i (\Delta t)^2$$

deverá ser aplicada sucessivamente aos dois deslocamentos x_1 e x_2 , cujo valor é necessário conhecer para que se possa determinar o valor das acelerações no instante considerado.

O intervalo de tempo a adoptar na integração numérica deverá ser tal que represente adequadamente a resposta do sistema com o menor período natural. Deve, pois, ser da

ordem de um décimo do período natural do modo de vibração mais baixo. O sistema indicado na figura tem dois modos de vibração com as frequências naturais iguais a:

$$\omega_n^2 = \frac{1}{2} \frac{m_1 k_{22} + m_2 k_{11}}{m_1 m_2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{m_1 k_{22} + m_2 k_{11}}{m_1 m_2} \right)^2 - 4 \frac{(k_{11} k_{22} - k_{12}^2)}{m_1 m_2}}$$

onde $k_{11} = k_1 + k_2$, $k_{12} = -k_2$ e $k_{22} = k_2 + k_3$. O período natural T_n será igual a $2\pi / \omega$.

2.3 Sistema Elástico de um Grau de Liberdade com Dissipador

Todos os sistemas estruturais têm um certo grau de dissipação, o qual pode ser determinante na caracterização da resposta em regime estacionário. Já o mesmo não se passa nos casos em que a duração da carga é pequena e se pretende determinar somente o valor máximo da resposta.

O amortecimento em estruturas, pode ter várias formas, uma das quais é o resultado da fricção molecular interna no material. Pode ainda resultar da fricção nas juntas estruturais, não só entre os vários elementos estruturais mas também entre a estrutura e os apoios. No caso das estruturas que estão em contacto com fluídos, como é o caso do navio, o amortecimento da resposta estrutural, resulta também da transferência de energia para o fluído ao qual também é transmitido o movimento.

Regra geral, o amortecimento estrutural é fundamentalmente do tipo viscoso, ou seja, a força de amortecimento é proporcional à velocidade, e opõe-se ao movimento. Para representar o efeito do amortecimento num sistema de mola e massa, a equação do equilíbrio deduzida na secção 1.1. será acrescentada do termo $-c\dot{x}$:

$$kx + c\dot{x} + m\ddot{x} - F(t) = 0$$

onde c é uma constante de amortecimento. Quando está constante tem um valor igual ou superior ao amortecimento crítico:

$$c_c = 2\sqrt{km}$$

o sistema deixa de vibrar e fica com um deslocamento que diminui exponencialmente com o tempo.

Para resolver a equação do movimento no tempo, procede-se como anteriormente, calculando a aceleração em cada intervalo de tempo a partir da equação do equilíbrio dinâmico:

$$\ddot{x}_i = \frac{F_i}{m} - \frac{k}{m} x_i - \frac{c}{m} \dot{x}_i$$

No entanto, neste caso também se torna necessário calcular a velocidade em todos os instantes. Para isso, pode considerar-se que a velocidade num dos intervalos de tempo, será

igual à velocidade média no intervalo anterior mais um incremento provocado pela aceleração do movimento:

$$\dot{x}_i = \frac{x_i - x_{i-1}}{\Delta t} + \frac{1}{2} \ddot{x}_i \Delta t$$

Esta aproximação é consistente com a hipótese anteriormente adoptada de a aceleração ser constante durante um intervalo de tempo, e representa a velocidade num ponto como a média das velocidades que existem em pontos que estão $\Delta t/2$ mais adiantados e mais atrasados no tempo. Substituindo a expressão da velocidade na da aceleração, obtêm-se:

$$\ddot{x}_i = \frac{F_i - kx_i - c(x_i - x_{i-1}) / \Delta t}{m + c \Delta t / 2}$$

Tendo as expressões para a aceleração e a velocidade nos diferentes pontos, a resposta no tempo é calculada da mesma forma do que a indicada na secção 2.1.

2.4 Sistema Elasto-Plástico com um Grau de Liberdade

Até aqui só se consideraram sistemas elásticos que têm uma resposta linear, ou seja, em que o deslocamento é proporcional à força sem haver um limite superior para o deslocamento possível. A constante de proporcionalidade é a constante da mola ou a rigidez do sistema, a qual, muitas vezes não é linear, dependendo ela própria da extensão a que está sujeita.

Considere-se um elemento estrutural sujeito a um carregamento dinâmico, admitindo que as deformações estruturais que se iniciam no domínio elástico, se podem estender ao domínio plástico. No regime linear elástico e no regime de deformações plásticas, a relação força deslocamento representa-se por um segmento de recta com um declive k e um segmento horizontal, respectivamente. A transição de um regime para o outro dá-se com a estrutura parcialmente plastificada e representa-se por uma curva que faz uma transição suave entre os dois segmentos de recta mencionados.

Em muitos casos práticos, a zona de transição entre o comportamento elástico e o plástico, não influi significativamente na resposta pelo que as características do sistema idealizam-se por um modelo elástico perfeitamente plástico em que se considera que o elemento se comporta elasticamente até se atingir o nível correspondente à plastificação total. Após plastificação, o descarregamento é feito elasticamente até se atingir novamente o limite plástico na direcção oposta.

A adequação deste modelo depende evidentemente das características da estrutura em causa. Numa viga em apoios simples, a carga de ruptura atinge-se quando se desenvolve uma rótula plástica na viga. No entanto, numa viga encastrada, só se forma um mecanismo com a existência de três rótulas, duas das quais nos apoios.

A deformação que ocorre entre o início de formação da primeira rótula e o final da formação da última é significativamente maior do que no caso da viga em apoios simples em que só há necessidade de formar uma rótula.

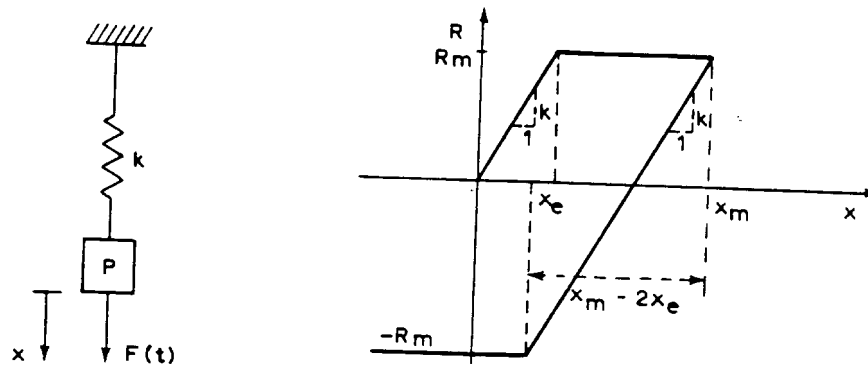


Figura 4 - Sistema de um grau de liberdade com mola elasto-plástica

As estruturas são normalmente dimensionadas para trabalharem no regime elástico, pelo que em regra, as vibrações a que estão sujeitas, são totalmente elásticas. No entanto, há por vezes situações de carregamento particularmente intenso que levam a respostas que entram no domínio plástico. Um dimensionamento que entre em linha de conta com este comportamento, permite grandes economias de material, já que tira partido da grande capacidade de absorção de energia que ocorre nas deformações no domínio plástico. No caso dos navios, uma situação frequente é o impacto do casco nas ondas, o qual provoca uma resposta vibratória que poderá ter picos de tensão muito elevados nos primeiros ciclos de resposta.

Considere-se a resposta de um sistema de mola e massa em que a resistência oferecida pela mola é proporcional ao deslocamento ($R = kx$) até se atingir a resistência máxima R_m , à qual corresponde um deslocamento limite do comportamento elástico:

$$X_e = R_m / k$$

A equação geral do movimento será

$$m\ddot{x} + R - F(t) = 0$$

a qual pode ser representada por um conjunto de três equações, cada uma das quais com um domínio de aplicação que depende do valor de deformação:

$$\begin{aligned} m\ddot{x} + kx - F(t) &= 0 & \text{se } 0 < x < x_e \\ m\ddot{x} + kx_e - F(t) &= 0 & \text{se } x_e < x < x_m \\ m\ddot{x} + kx_e - (x_m - x) - F(t) &= 0 & \text{se } (x_m - 2x_e) < x < x_m \\ m\ddot{x} - kx_e - k(x_m - x) - F(t) &= 0 & \text{se } x_{-m} < x < (x_m - 2x_e) \end{aligned}$$

onde x_m representa o valor máximo do deslocamento na altura em que se inicia o descarregamento elástico de sentido contrário, e x_{-m} o valor quando se reinicia o carregamento.

A terceira equação representa as vibrações elásticas do sistema depois de ter havido a deformação plástica, e é válida enquanto não se iniciarem as deformações plásticas no sentido oposto, o que ocorre quando $x < (x_m - 2x_e)$. Não se torna necessário estender este

exemplo a este domínio, que já tem menor aplicação prática, e que será uma repetição dos conceitos utilizados na dedução da segunda equação.

Para se desenvolver o cálculo da resposta do sistema no tempo há que ter em conta que o valor da aceleração num dado instante depende do valor do deslocamento nesse instante:

$$\begin{aligned} \ddot{x}_i &= \frac{F_i}{m} - \frac{k}{m} x_i && \text{se } 0 < x_i < x_e \\ \ddot{x}_i &= \frac{F_i}{m} - \frac{kx_e}{m} && \text{se } x_e < x < x_m \\ \ddot{x}_i &= \frac{F_i}{m} - \frac{kx_e}{m} + \frac{k}{m} (x_m - x_i) && \text{se } (x_m - 2x_e) < x < x_m \\ \ddot{x}_i &= \frac{F_i}{m} + \frac{kx_e}{m} && \text{se } x_{-m} < x < (x_m - 2x_e) \end{aligned}$$

2.5 Métodos de Integração Numérica Directa

O método de integração numérica descrito nos parágrafos anteriores baseava-se na hipótese de que a aceleração e a velocidade eram constantes durante períodos de tempo iguais a Δt , ao fim dos quais tinham variações súbitas. Este método pode satisfazer o grau de precisão que se pretender, tornando os intervalos de tempo tão pequenos quanto necessário.

Nos casos em que a solução da equação de equilíbrio seja um procedimento pesado computacionalmente, torna-se vantajoso utilizar valores maiores de Δt , a fim de diminuir o número de vezes que é necessário calcular o valor da aceleração. No entanto, para que isso continue a conduzir a resultados precisos, é necessário que o método de cálculo represente adequadamente a variação da aceleração e velocidade entre dois pontos afastados de Δt . Diferentes métodos numéricos foram desenvolvidos para resolver este problema, e a característica fundamental de todos eles é de que se destinam a satisfazer as equações do movimento em pontos discretos no tempo. Entre estes pontos, o deslocamento, velocidade e aceleração do movimento variam de acordo com hipóteses que variam de método para método.

2.5.1 Método da Aceleração Linear

Um refinamento óbvio ao método anterior é aproximar a variação da aceleração entre dois pontos por um segmento de recta em vez de a considerar constante e com variações em degraus. Neste caso, a aceleração num intervalo é:

$$\ddot{x}(t) = \ddot{x}_i + \frac{\ddot{x}_{i+1} - \ddot{x}_i}{\Delta t} (t - t_i) \quad t_i < t < t_{i+1}$$

e a velocidade obtém-se por integração:

$$\dot{x}(t) = \dot{x}_i + \int_{t_i}^t \ddot{x}(t) dt$$

onde $\dot{x}(t)$ é dado pela expressão anterior. Resolvendo o integral obtém-se:

ou

$$\dot{x}(t) = \dot{x}_i + \ddot{x}_i(t - t_i) + \frac{\ddot{x}_{i+1} - \ddot{x}_i}{2\Delta t} (t - t_i)^2 \quad t_i < t < t_{i+1}$$

quando $t = t_{i+1}$ a velocidade será:

$$\dot{x}_{i+1} = \dot{x}_i + \frac{\Delta t}{2} (\ddot{x}_{i+1} + \ddot{x}_i)$$

O deslocamento no ponto $(i+1)$ calcula-se também por integração da velocidade:

$$x_{i+1} = x_i + \int_{t_i}^{t_{i+1}} \dot{x}(t) dt = x_i + \dot{x}_i \Delta t + \frac{(\Delta t)^2}{6} (2\ddot{x}_i + \ddot{x}_{i+1})$$

onde $\dot{x}(t)$ se obteve da fórmula anterior de recorrência. A fórmula de recorrência para x faz depender x_{i+1} da aceleração \ddot{x}_{i+1} , a qual se calcula a partir da equação de movimento. Note-se que este método é autoiniciável, não necessitando de qualquer procedimento especial para calcular o primeiro deslocamento.

No caso de um sistema de mola e massa, resulta:

$$x_{i+1} = \frac{x_i + \dot{x}_i \cdot \Delta t + \frac{\ddot{x}_i}{3} (\Delta t)^2 + \frac{F_{i+1}}{m} \frac{(\Delta t)^2}{6}}{1 + \frac{k}{m} \frac{(\Delta t)^2}{6}}$$

Em sistemas mais complicados, não é possível obter uma fórmula simples para x_{i+1} , pelo que o procedimento a optar deverá ser o de estimar um valor para \ddot{x}_{i+1} , a partir do qual se calcula x_{i+1} , cujo valor será depois utilizado nas equações de equilíbrio para corrigir \ddot{x}_{i+1} , repetindo-se o procedimento até se alcançar a convergência.

A experiência de utilização deste método revelou que deve realizar-se um incremento de tempo igual a 1/6 do período natural para se obter uma precisão comparável à do método de aceleração constante com intervalos de 1/10 do período.

2.5.2 Método do θ de Wilson

Este método é uma generalização do método da aceleração linear, e considera que a variação linear não é só entre o instante t_i e t_{i+1} , mas sim entre t_i e $t_{i+\theta} = t_i + \theta \Delta t$. Este método, que se reduz ao da aceleração linear quando $\theta = 1$, vai buscar informação do movimento em $t_{i+\theta}$ para calcular o deslocamento em t_i . Este método é incondicionalmente estável, desde que θ seja maior do que 1.37, pelo que é frequente adoptar o valor $\theta=1.4$.

Tendo a aceleração uma variação linear, pode exprimir-se:

$$\ddot{x}(t_i + \tau) = \ddot{x}_i + \frac{\tau}{\theta\Delta t}(\ddot{x}_{i+\theta} - \ddot{x}_i) \quad \text{para } 0 < \tau < \theta\Delta t$$

Integrando esta expressão, obtém-se sucessivamente:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t_i + \tau) &= \dot{x}_i + \ddot{x}_i\tau + \frac{\tau^2}{2\theta\Delta t}(\ddot{x}_{i+\theta} - \ddot{x}_i) \\ x(t_i + \tau) &= x_i + \dot{x}_i\tau + \frac{1}{2}\ddot{x}_i\tau^2 + \frac{\tau^3}{6\theta\Delta t}(\ddot{x}_{i+\theta} - \ddot{x}_i) \end{aligned}$$

as quais são válidas para $0 \leq \tau \leq \theta\Delta t$. Substituído $\tau = \theta\Delta t$ nas duas expressões anteriores, obtém-se:

$$\begin{aligned} \dot{x}_{i+\theta} &= \dot{x}_i + \frac{\theta\Delta t}{2}(\ddot{x}_{i+\theta} + \ddot{x}_i) \\ x_{i+\theta} &= x_i + \theta\Delta t \dot{x}_i + \frac{\theta^2\Delta t}{6}(\ddot{x}_{i+\theta} + 2\ddot{x}_i) \end{aligned}$$

Esta última equação pode ser resolvida em ordem a $\ddot{x}_{i+\theta}$:

$$\ddot{x}_{i+\theta} = \frac{6}{\theta^2\Delta t^2}(x_{i+\theta} - x_i) - \frac{6}{\theta\Delta t}\dot{x}_i - 2\ddot{x}_i$$

o que se substitui na expressão da velocidade para obter:

$$\ddot{x}_{i+\theta} = \frac{3}{\theta\Delta t}(x_{i+\theta} - x_i) - 2\dot{x}_i - \frac{\theta\Delta t}{2}\ddot{x}_i$$

Para se obter a expressão do deslocamento, é necessário o recurso à equação do movimento com a hipótese que a força de excitação também se pode extrapolar linearmente:

$$* F_{i+\theta} = F_i + \theta(F_{i+1} - F_i)$$

Assim, a equação do movimento resulta em:

$$m \ddot{x}_{i+\theta} + c \dot{x}_{i+\theta} + k x_{i+\theta} = F_i + \theta (F_{i+1} - F_i)$$

Substituído as expressões da aceleração e velocidade nesta expressão e fazendo:

$$F_{i+\theta} = \left(\frac{6m}{\theta^2\Delta t^2} + \frac{3c}{\theta\Delta t} + k \right) x_{i+\theta}$$

* Obtendo uma aproximação a $F_{i+\theta}$ que a seguir se calcula de forma mais precisa.

resulta em:

$$F_{i+\theta} = F_i + \theta (F_{i+1} - F_i) + m \left(\frac{6m}{\theta^2 \Delta t^2} x_i + \frac{6c}{\theta \Delta t} \dot{x}_i + 2\ddot{x}_i \right) + c \left(\frac{3m}{\theta \Delta t} x_i + 2\dot{x}_i + \frac{\theta \Delta t}{2} \ddot{x}_i \right)$$

expressão que permite determinar a força no instante $i+\theta$ a partir de informação dos instantes i e $i+1$. Após obtido o valor de $F_{i+\theta}$, a penúltima expressão dá o valor de $x_{i+\theta}$.

Depois de obtido o valor de $x_{i+\theta}$, utilizam-se as expressões anteriores para deduzir o valor dos deslocamentos, velocidade e aceleração nos passos seguintes:

$$\begin{aligned} \ddot{x}_{i+1} &= \frac{6}{\theta^3 \Delta t^2} (x_{i+\theta} - x_i) - \frac{6}{\theta^2 \Delta t} \dot{x}_i + \left(1 - \frac{3}{\theta}\right) \ddot{x}_i \\ \dot{x}_{i+1} &= \dot{x}_i + \frac{\Delta t}{2} (\ddot{x}_{i+1} + \ddot{x}_i) \\ x_{i+1} &= x_i + \Delta t \dot{x}_i + \frac{\Delta t^2}{6} (\ddot{x}_{i+1} + 2\ddot{x}_i) \end{aligned}$$

expressões que constituem as fórmulas de recorrência que permitem progredir no tempo.

2.5.3 Método de Newmark

O método do β de Newmark representa outra generalização do método da aceleração linear, o qual, no entanto, dá um peso variável à aceleração nos extremos do intervalo nas expressões da velocidade e aceleração:

$$\begin{aligned} \dot{x}_{i+1} &= \dot{x}_i + ((1-\beta) \ddot{x}_i + \beta \ddot{x}_{i+1}) \Delta t \\ x_{i+1} &= x_i + \dot{x}_i \Delta t + \left(\left(\frac{1}{2} - \alpha \right) \ddot{x}_i + \alpha \ddot{x}_{i+1} \right) \Delta t^2 \end{aligned}$$

Dando valores diferentes aos parâmetros β e α , obtém-se métodos com diferentes características. Com $\beta = 1/2$ e $\alpha = 1/6$, obtém-se o método da aceleração linear, enquanto $\beta = 1/2$ e $\alpha = 1/4$ representa o método da aceleração constante.

Procedendo como anteriormente, utiliza-se a equação de equilíbrio para obter a aceleração \ddot{x}_{i+1} em função de \dot{x}_{i+1} , x_{i+1} e F_{i+1} . Substituído nas equações anteriores, obtém-se as fórmulas de recorrência:

$$\begin{aligned} x_{i+1} &= \left(\frac{m}{\alpha \Delta t^2} + \frac{\beta c}{\alpha \Delta t} + k \right)^{-1} \left\{ F_{i+1} + \frac{m x_i}{\alpha \Delta t^2} + \frac{m \dot{x}_i}{\alpha \Delta t} + \left(\frac{1}{2\alpha} - 1 \right) m \ddot{x}_i + \frac{c \beta x_i}{\alpha \Delta t} + \left(\frac{\beta}{\alpha} - 1 \right) c \dot{x}_i + \left(\frac{\beta}{\alpha} - 2 \right) \frac{\alpha \Delta t \ddot{x}_i c}{2} \right\} \\ \dot{x}_{i+1} &= \dot{x}_i + (1-\beta) \Delta t \ddot{x}_i + \beta \Delta t \ddot{x}_{i+1} \\ \ddot{x}_{i+1} &= \frac{x_{i+1} - x_i}{\alpha \Delta t^2} - \frac{\dot{x}_i}{\alpha \Delta t} - \left(\frac{1}{2\alpha} - 1 \right) \ddot{x}_i \end{aligned}$$

Este método introduz um amortecimento artificial que é proporcional a $\left(\beta - \frac{1}{2}\right)$, o que só é evitado quando se escolhe $\beta = 1/2$. Quando β é menor do que $1/2$, há um amortecimento negativo, o qual produz uma vibração auto-excitada resultante do procedimento numérico. Por outro lado, quando β é maior do que $1/2$, o procedimento de cálculo introduz um amortecimento positivo que reduz a amplitude da resposta.

2.5.4 Método das Diferenças Centrais

Enquanto os métodos anteriores foram deduzidos a partir de conceitos de análise do movimento, e de hipóteses relativas à variação da velocidade, há outros métodos que se baseiam em aproximar as derivadas por diferenças finitas.

O método das diferenças centrais consiste em exprimir a velocidade e aceleração no ponto i em função da informação nos pontos $(i-1)$ e $(i+1)$, o que se deduz a partir das expansões em série de Taylor:

$$\begin{aligned} x_{i+1} &= x_i + \Delta t \dot{x}_i + \frac{\Delta t^2}{2} \ddot{x}_i + \frac{\Delta t^3}{6} \dddot{x}_i + \dots \\ x_{i-1} &= x_i - \Delta t \dot{x}_i + \frac{\Delta t^2}{2} \ddot{x}_i - \frac{\Delta t^3}{6} \dddot{x}_i + \dots \end{aligned}$$

Considerando só os dois primeiros termos desta série e subtraindo-os, deduz-se a expressão para a primeira derivada:

$$\dot{x}_i = \frac{1}{2\Delta t} (x_{i+1} - x_{i-1})$$

Utilizando agora, três termos das séries e somando-os obtém-se a expressão da segunda derivada:

$$\ddot{x}_i = \frac{1}{\Delta t^2} (x_{i+1} - 2x_i + x_{i-1})$$

Introduzindo estas duas expressões na equação do movimento resulta em:

$$m \left\{ \frac{x_{i+1} - 2x_i + x_{i-1}}{\Delta t^2} \right\} + c \left\{ \frac{x_{i+1} - x_{i-1}}{2\Delta t} \right\} + k x_i = F_i$$

o que permite determinar o deslocamento no instante t_{i+1} :

$$x_{i+1} = \left(\frac{m}{\Delta t^2} + \frac{c}{2\Delta t} \right)^{-1} \left\{ \left(\frac{2m}{\Delta t^2} - k \right) x_i + \left(\frac{c}{2\Delta t} - \frac{m}{\Delta t^2} \right) x_{i-1} + F_i \right\}$$

Repare-se que esta fórmula de recorrência depende do valor do deslocamento nos instantes i e $i-1$ e da força em i , o que resultou de se ter utilizado a equação de equilíbrio no instante

i em vez do instante $(i+1)$, como nos casos anteriores. Por isso, este é um método explícito de integração.

No entanto, é necessário um procedimento especial para iniciar o processo de cálculo, pois, no instante zero o deslocamento depende de x_{-1} . Considerando a equação do equilíbrio em $t = 0$, obtém-se:

$$\ddot{x}_0 = \frac{1}{m} (F_0 - c \dot{x}_0 - k x_0)$$

onde \dot{x}_0 e x_0 são a velocidade e deslocamento iniciais. Substituído esta expressão na das derivadas permite determinar:

$$x_{-1} = \dot{x}_0 - \Delta t \dot{x}_0 + \frac{\Delta t^2}{2} \ddot{x}_0$$

com o qual já é possível iniciar o processo de cálculo da resposta.

Embora este método de integração tenha a vantagem de ser explícito, tem também o inconveniente de ser só condicionalmente estável, ou seja, é necessário utilizar valores de Δt inferiores a um dado valor crítico, para que o método seja estável. Pode provar-se que o método só é estável quando

$$\Delta t \leq T_n / \pi$$

onde T_n é o período natural de vibração do sistema.

2.5.5 Método de Houbolt

Este método também se baseia em aproximar as derivadas por diferenças finitas, envolvendo, no entanto, quatro pontos em vez de três como no caso anterior. As expressões da velocidade e aceleração são dadas por:

$$\dot{x}_{i+1} = \frac{1}{6\Delta t} (11x_{i+1} - 18x_i + 9x_{i-1} - 2x_{i-2})$$

$$\ddot{x}_{i+1} = \frac{1}{2\Delta t^2} (2x_{i+1} - 5x_i + 4x_{i-1} - x_{i-2})$$

Este método de integração é implícito, pois, vai utilizar a equação do equilíbrio no ponto $i+1$ para determinar x_{i+1} . Substituído as duas expressões anteriores na equação do equilíbrio em t_{i+1} obtém-se:

$$x_{i+1} = \left(\frac{2m}{\Delta t^2} + \frac{11c}{6\Delta t} + k \right)^{-1} \left\{ F_{i+1} + \left(\frac{5m}{\Delta t^2} + \frac{3c}{\Delta t} \right) x_i - \left(\frac{4m}{\Delta t^2} + \frac{3c}{2\Delta t} \right) x_{i-1} + \left(\frac{m}{\Delta t^2} + \frac{c}{3\Delta t} \right) x_{i-2} \right\}$$

Note-se que é necessário saber x_{-1} e x_{-2} para se Iniciar este processo de cálculo. Normalmente utiliza-se o método das diferenças centrais para arrancar o cálculo nos dois intervalos de tempo Iniciais e depois passa-se ao de Houbolt.

2.6 Métodos de Integração da Resposta

Os métodos de integração directa que se acabaram de descrever recorrem directamente às equações do equilíbrio, as quais são satisfeitas nos sucessivos pontos no tempo. Estes métodos são úteis para sistemas complexos ou não-lineares. Sistemas mais simples podem ter a resposta descrita por uma solução analítica das equações o que, no entanto, só será aplicável para excitações harmónicas.

A resposta de sistemas simples a excitações harmónicas é sobejamente conhecida. quando a excitação não é harmónica mas é periódica, pode utilizar-se o integral de Fourier para a representar por um somatório de funções periódicas. Desta forma pode calcular-se a resposta do sistema a cada uma das componentes, obtendo-se a resposta total por sobreposição das respostas de cada componente. No entanto, quando a força de excitação não é periódica, pode calcular-se a resposta recorrendo à resposta a um impulso juntamente com um integral de convolução.

2.6.1 Resposta a uma Função Periódica

Quando a força de excitação é periódica, com um período $T = 2\pi / \omega$, pode representar-se por uma série de Fourier:

$$F(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{i=1}^{\infty} a_i \cos i\omega t + \sum_{i=1}^{\infty} b_i \sin i\omega t$$

onde os coeficientes são:

$$a_i = \frac{2}{T} \int_0^T F(t) \cos i\omega t dt \quad , i = 0, 1, 2, \dots$$

$$b_i = \frac{2}{T} \int_0^T F(t) \sin i\omega t dt \quad , i = 1, 2, \dots$$

Com esta representação, a equação do movimento de um sistema massa, mola e amortecedor é:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = \frac{a_0}{2} + \sum_{i=1}^{\infty} a_i \cos i\omega t + \sum_{i=1}^{\infty} b_i \sin i\omega t$$

A resposta a esta excitação pode obter-se a partir da sobreposição das respostas às seguintes equações:

$$\begin{aligned} m\ddot{x} + c\dot{x} + kx &= \frac{a_0}{2} \\ m\ddot{x} + c\dot{x} + kx &= a_i \cos i\omega t \quad , i = 1, 2, \dots \\ m\ddot{x} + c\dot{x} + kx &= b_i \sin i\omega t \quad , i = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

que se obtém separando a força de excitação indicada no segundo termo nas suas várias componentes.

As soluções destas equações são:

$$\begin{aligned} x_0(t) &= a_0 / 2k \\ x_{1i}(t) &= \frac{a_i / k}{\sqrt{[(1 - i^2 \lambda^2)^2 + (2\xi i \lambda)^2]}} \cos (i\omega t - \phi_i) \\ x_{2i}(t) &= \frac{b_i / k}{\sqrt{[(1 - i^2 \lambda^2)^2 + (2\xi i \lambda)^2]}} \sin (i\omega t - \phi_i) \end{aligned}$$

onde $\lambda = \frac{\omega}{\omega_n}$

$$\phi_i = \arctg \left(\frac{2\xi i \lambda}{1 - i^2 \lambda^2} \right)$$

Finalmente a resposta total é obtida somando os três tipos de soluções:

$$x(t) = x_0(t) + \sum_{i=1}^{\infty} (x_{1i}(t) + x_{2i}(t))$$

2.6.2 Resposta a um Impulso

Considere-se o impulso transmitido pela força F que actua durante um período de tempo muito curto Δt . Este impulso vai provocar uma variação na quantidade de movimento do sistema:

$$I = \int_t^{t+\Delta t} F \cdot dt = m \dot{x}(t + \Delta t) - m \dot{x}(t)$$

O impulso unitário define-se no limite em que $\Delta t \rightarrow 0$ como:

$$I(t) = \int_{t^-}^{t^+} F(t) \cdot dt = 1$$

Esta definição implica que F tenda para infinito naquele ponto para que o impulso possa ter um valor finito quando dt tende para zero.

Considere-se agora um sistema de massa, mola e amortecedor que satisfaz a equação:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0$$

e que é sujeito a um impulso a partir de uma posição com deslocamento x_0 e velocidade \dot{x}_0 .

A resposta é dada por

$$x(t) = \exp(-\xi\omega_n t) \left[x_0 \cos \omega_d t + \frac{\dot{x}_0 + \xi\omega_n x_0}{\omega_d} \text{sen } \omega_d t \right]$$

onde o amortecimento e frequências naturais do sistema com e sem amortecimento são dadas respectivamente por:

$$\xi = c / 2m\omega_n$$

$$\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \xi^2}$$

$$\omega_n = \sqrt{k / m}$$

e a massa está em repouso ($x_0 = \dot{x}_0 = 0$) para ($t < 0$), e se no instante $t = 0$ lhe é aplicado um impulso unitário, vem

$$I(0) = 1 = m \dot{x}_{0^+} - m \dot{x}_{0^-} = m \dot{x}_0$$

donde a velocidade inicial da massa é

$$\dot{x}_0 = 1 / m$$

e a resposta do sistema fica:

$$x(t) = \exp(-\omega_n t) \frac{\text{sen } \omega_d t}{m \omega_d} \equiv h(t)$$

o que se define como resposta a um impulso unitário e se representa por $h(t)$.

Se o impulso tivesse um valor F em vez de ser unitário, a resposta seria $F h(t)$.

Finalmente, se o impulso em vez de ser aplicado no momento $t = 0$, o fosse quando $t = \tau$, a resposta vem:

$$x(t) = F h(t - \tau)$$

2.6.3 Resposta a uma Função Aperiódica

Considere-se agora que o sistema é excitado por uma força qualquer $F(t)$ não-periódica. Esta força pode considerar-se constituída por um conjunto de impulsos de duração Δt muito pequena e com uma intensidade igual a $F(\tau)$. A resposta devida a este impulso será:

$$dx(t) = F(\tau) d\tau h(t - \tau)$$

resposta resultante de uma série de impulsos obtém-se por integração:

$$x(t) = \int_0^t F(\tau) \cdot h(t - \tau) \cdot d\tau$$

ou seja:

$$x(t) = \frac{1}{m\omega_d} \int_0^t F(\tau) \cdot \exp\{-\xi\omega_n(t - \tau)\} \cdot \text{sen } \omega_d(t - \tau) \cdot d\tau$$

expressão que é conhecida como o integral de convolução de Duhamel. No caso de funções arbitrarias, o integral não tem expressão analítica e avalia-se numericamente.

Note-se que o cálculo da resposta do sistema neste caso tem características fundamentalmente diferentes dos casos analisados na secção 2.5, onde era necessário resolver a equação do movimento a cada instante no tempo. Neste caso, torna-se necessário calcular numericamente um integral.

2.6.3.1 Integração por Aproximações Constantes

A função de excitação pode representar-se por um conjunto de impulsos rectangulares com uma intensidade igual ao valor da função no instante médio do intervalo de tempo e com uma duração igual a $\Delta\tau$.

A resposta do sistema durante o intervalo de tempo entre t_{i-1} e t_i obtém-se somando a resposta devida a F_i à que existia em $t = t_{i-1}$, que funciona como condição inicial. Assim, obtém-se:

$$x_i = \frac{F_i}{k} \left\{ 1 - \exp\left[-\xi\omega_n(t - t_{i-1})\right] \left[\cos \omega_d(t - t_{i-1}) + \frac{\xi\omega_n}{\omega_d} \text{sen } \omega_d(t - t_{i-1}) \right] \right\} + \\ + \exp\left[-\xi\omega_n(t - t_{i-1})\right] \left[x_{i-1} \cos \omega_d(t - t_{i-1}) + \frac{\dot{x}_{i-1} + \xi\omega_n x_{i-1}}{\omega_d} \text{sen } \omega_d(t - t_{i-1}) \right]$$

Esta resposta, que é válida no intervalo entre t_{i-1} e t_i , vai tomar o valor x_i quanto $t = t_i$:

$$x_i = \frac{F_i}{k} \left\{ 1 - \exp(-\xi \omega_n \Delta t_i) \left[\cos \omega_d \Delta t_i + \frac{\xi \omega_n}{\omega_d} \operatorname{sen} \omega_d \Delta t_i \right] \right\} +$$

$$+ \exp[-\xi \omega_n \Delta t_i] \left[x_{i-1} \cos \omega_d \Delta t_i + \frac{\dot{x}_{i-1} + \xi \omega_n x_{i-1}}{\omega_d} \operatorname{sen} \omega_d \Delta t_i \right]$$

Diferenciando a expressão de $x(t)$ e avaliando-a no instante $t = t_i$ obtém-se:

$$\dot{x}_i = \frac{F_i \omega_d}{k} \exp(-\xi \omega_n \Delta t_i) \left(1 + \frac{\xi \omega_n^2}{\omega_d^2} \operatorname{sen} \omega_d \Delta t_i + \omega_d \right) \exp(-\xi \omega_n \Delta t_i)$$

$$\left\{ -x_{i-1} \operatorname{sen} \omega_d \Delta t_i + \frac{\dot{x}_{i-1} + \xi \omega_n x_{i-1}}{\omega_d} \cos \omega_d \Delta t_i - \frac{\xi \omega_n}{\omega_d} \left(x_{i-1} \cos \omega_d \Delta t_i + \frac{\dot{x}_{i-1} + \xi \omega_n x_{i-1}}{\omega_d} \operatorname{sen} \omega_d \Delta t_i \right) \right\}$$

Estas duas equações permitem o cálculo do deslocamento e velocidade no instante t_i a partir da informação no instante t_{i-1} sendo fórmulas de recorrência que conduzem ao cálculo da resposta no tempo.

2.6.3.2 Integração por Aproximações Lineares

Representando a variação da função de excitação por uma aproximação linear entre dois pontos, obtém-se uma melhor descrição da história da força. A fórmula de recorrência obtém-se por um procedimento análogo ao da anterior resultando em:

$$x_i = \frac{(F_i - F_{i-1})}{k t_i} \left\{ \Delta t_i \frac{2\xi}{\omega_n} + \exp(-\xi \omega_n \Delta t_i) \left(\frac{2\xi}{\omega_n^2} \cos \omega_d \Delta t_i - \frac{\omega_d^2 - 2\omega_n^2}{\omega_n \omega_d} \operatorname{sen} \omega_d \Delta t_i \right) \right\} +$$

$$+ \frac{F_{i-1}}{k} (1 - \xi \omega_n \Delta t_i) \left(\cos \omega_d \Delta t_i + \frac{\xi \omega_n}{\omega_d} \operatorname{sen} \omega_d \Delta t_i \right) +$$

$$+ \exp(-\xi \omega_n \Delta t_i) \left(x_{i-1} \cos \omega_d \Delta t_i + \frac{\dot{x}_{i-1} + \xi \omega_n x_{i-1}}{\omega_d} \operatorname{sen} \omega_d \Delta t_i \right)$$

A correspondente expressão para a velocidade é:

$$\begin{aligned} \dot{x}_i = & \frac{(F_i - F_{i-1})}{k t_i} + \left\{ 1 - \exp(-\xi \omega_n \Delta t_i) \left(\cos \omega_d \Delta t_i + \frac{\xi \omega_n}{\omega_d} \operatorname{sen} \omega_d \Delta t_i \right) \right\} + \\ & + \frac{F_{i-1}}{k} \exp(\xi \omega_n \Delta t_i) \frac{\omega_n^2}{\omega_d} \operatorname{sen} \omega_d \Delta t_i + \exp(-\xi \omega_n \Delta t_i) \cdot \\ & \cdot \left\{ \dot{x}_{i-1} \cos \omega_d \Delta t_i - \frac{\xi \omega_n}{\omega_d} \left(\dot{x}_{i-1} + \frac{\omega_n}{\xi} x_{i-1} \right) \operatorname{sen} \omega_d \Delta t_i \right\} \end{aligned}$$

3. FORMULAÇÃO DOS PROBLEMAS DE DINÂMICA

Muitos problemas de dinâmica resolveram-se a partir da aplicação directa da segunda lei de Newton e da consideração de forças e quantidade de movimento, o que conduz a equações diferenciais do equilíbrio.

Alternativamente, pode considerar-se a energia do sistema e, a partir desta formulação deduzir as equações do movimento. Enquanto no primeiro caso se utilizam grandezas vectoriais, no segundo opera-se com escalares.

3.1 Princípio da Conservação da Energia

Considere-se uma partícula de massa m que se move ao longo de uma curva sob a acção de uma força \underline{F} . Definido a posição da partícula num dado instante pelo vector \underline{r} , o trabalho elementar dW que se produz quando a partícula se move a distância $d\underline{r}$ é dado pelo produto interno daqueles vectores: $dW = \underline{F} \cdot d\underline{r}$.

O trabalho realizado ao deslocar a massa do ponto 1 para 2 ao longo da trajectória c é dado por:

$$W_{12} = \int_{r_1}^{r_2} \underline{F} \cdot d\underline{r}$$

No caso de uma partícula com massa constante, a lei de Newton diz-nos que $\underline{F} = m(d\underline{\dot{r}}/dt)$, o que sendo substituído na equação anterior e tendo em atenção que $d\underline{r} = \underline{\dot{r}} \cdot dt$ conduz a:

$$\begin{aligned} W_{12} &= \int_{r_1}^{r_2} \underline{F} \cdot d\underline{r} = \int_{t_1}^{t_2} m \frac{d\underline{\dot{r}}}{dt} \cdot \underline{\dot{r}} dt = \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} m \frac{d}{dt} (\underline{\dot{r}} \cdot \underline{\dot{r}}) dt = \\ &= \frac{1}{2} m \underline{\dot{r}}_2 \cdot \underline{\dot{r}}_2 - \frac{1}{2} m \underline{\dot{r}}_1 \cdot \underline{\dot{r}}_1 = \frac{1}{2} m \dot{r}_2^2 - \frac{1}{2} m \dot{r}_1^2 = T(t_2) - T(t_1) \end{aligned}$$

ou seja, o trabalho realizado entre o ponto 1 e 2 é igual à diferença da energia cínética T nesses pontos, a qual é dada por:

$$T = \frac{1}{2} m \underline{\dot{r}} \cdot \underline{\dot{r}}$$

Define-se um campo de forças conservativas como aquele em que o trabalho realizado em mover uma partícula de um ponto para outro, depende das posições iniciais e finais, independentemente do caminho percorrido.

A energia potencial $V(r_1)$ associada com a posição \underline{r}_1 define-se como o trabalho executado num campo de forças conservativas para mover a partícula da posição \underline{r} para uma posição de referência \underline{r}_0

$$W_{12} = \int_{r_1}^{r_2} \underline{F} \cdot d\underline{r} = \int_{r_1}^{r_0} \underline{F} \cdot d\underline{r} + \int_{r_0}^{r_2} \underline{F} \cdot d\underline{r} = V(r_1) - \int_{r_2}^{r_0} \underline{F} \cdot d\underline{r} = -\{V(r_2) - V(r_1)\}$$

ou seja, o trabalho feito num campo de forças conservativas é igual ao negativo da variação da energia potencial (V):

$$dW_c = -dV$$

As forças não-conservativas envolvem dissipação de energia como acontece com a fricção, o que torna o trabalho que produzem dependente do percurso. As forças conservativas, por não dependerem de percurso, podem deduzir-se a partir de uma função potencial, ou seja:

$$dW = \underline{F} \cdot d\underline{r} = -dV = -\underline{\nabla} V \cdot d\underline{r}$$

onde o gradiente é dado por:

$$\underline{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x} \underline{i} + \frac{\partial}{\partial y} \underline{j} + \frac{\partial}{\partial z} \underline{k}$$

e a expressão anterior conduz a $\underline{F} = -\underline{\nabla} V$.

Fazendo o produto externo destas expressões, tem-se que

$$\underline{\nabla} \times \underline{F} = -\underline{\nabla} \times \underline{\nabla} V$$

Uma função ϕ em que $\partial^2 \phi / \partial x \partial y = \partial^2 \phi / \partial y \partial x$ obedece à relação:

$$\underline{\nabla} \times \underline{\nabla} \phi = 0$$

a qual implica que o divergente de \underline{F} se anula:

$$\underline{\nabla} \times \underline{F} = -\underline{\nabla} \times \underline{\nabla} V = 0$$

ou seja, num campo de forças conservativas, o divergente de \underline{F} é zero, ou seja, o trabalho feito por uma força num percurso fechado é zero.

De um modo geral, pode representar-se o trabalho total produzido por um sistema de forças como o somatório do trabalho conservativo e não-conservativo do sistema:

$$W_{12} = W_{12c} + W_{12nc}$$

onde o trabalho não-conservativo é dado por:

$$W_{12nc} = W_{12} - W_{12c} = (T_2 - T_1) + (V_2 - V_1) = (T_2 + V_2) - (T_1 + V_1) = E_2 - E_1$$

A energia total E representa a soma da energia cinética com a potencial:

$$E = T + V$$

Num campo de forças conservativas $W_{12nc} = 0$, o que implica que

$$E_2 = E_1 = E$$

ou seja, a energia total de um sistema permanece constante, o que constitui princípio de conservação da energia.

3.2 *Energia Potencial de Deformação*

Considere-se uma mola de comprimento inicial L , a qual é distendida um comprimento δ no domínio elástico. Neste caso, a força na mola é proporcional ao deslocamento e numa posição intermédia $0 < x < \delta$ a força de restituição que se desenvolve é:

$$F = -kx$$

e actua na direcção oposta ao deslocamento.

A energia potencial na posição δ é:

$$V(\delta) = \int_{\delta}^0 F dx = -k \int_{\delta}^0 x dx = \pm \frac{1}{2} k x^2 = \frac{1}{2} F \delta$$

qual fica armazenada na mola e é igual ao trabalho feito pelas forças exteriores.

Uma barra de um material isotrópico definido pela relação tensão-extensão ($\sigma - \epsilon$):

$$\sigma = E \epsilon$$

onde E é o módulo de elasticidade, comporta-se de modo semelhante à mola. A energia potencial num volume elementar é:

$$dV = \frac{1}{2} \sigma \epsilon A dx = \frac{1}{2} \frac{P}{A} \frac{P}{AE} A dx$$

A energia total obtém-se integrando a energia potencial ao longo da barra:

$$V = \frac{1}{2} \int_0^L \sigma \epsilon A dx = \frac{1}{2} \int_0^L E \epsilon^2 A dx = \frac{1}{2} \int_0^L \frac{P^2}{AE} dx$$

3.3 *Princípio do Trabalho Virtual*

Considere-se os deslocamentos virtuais $\delta x_i, \delta y_i, \delta z_i$ como variações infinitesimais e arbitrárias das coordenadas de um sistema. Estes deslocamentos para serem possíveis têm de ser compatíveis com as restrições ou condições de fronteira do sistema. Se as coordenadas estão relacionadas pela equação de restrição:

$$f(x_i; y_i, z_i, t) = C \quad , i = 1, 2, \dots, n$$

os deslocamentos virtuais devem ser tais que

$$f(x_i + \delta x_i, y_i + \delta y_i, z_i + \delta z_i, t) = C \quad , i = 1, 2, \dots, n$$

para qualquer valor do tempo t .

As operações que regem as variações δ são as mesmas que se aplicam aos diferenciais d . Assim, expandindo esta expressão em série de Taylor, tem-se que:

$$f(x_i + \delta x_i, y_i + \delta y_i, z_i + \delta z_i, t) = f(x_i, y_i, z_i, t) + \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \delta x_i + \frac{\partial f}{\partial y_i} \delta y_i + \frac{\partial f}{\partial z_i} \delta z_i \right)$$

o que face à definição da função $f(\cdot)$, implica que:

$$\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \delta x_i + \frac{\partial f}{\partial y_i} \delta y_i + \frac{\partial f}{\partial z_i} \delta z_i \right) = 0$$

Esta é a equação que os deslocamentos virtuais têm de satisfazer para serem compatíveis com as restrições do sistema.

Considere-se agora uma partícula i actuada por um sistema de forças com uma resultante \underline{R}_i . Se o sistema está em equilíbrio, a resultante é zero, e o trabalho feito durante um deslocamento virtual é zero:

$$\delta W_i = \underline{R}_i \cdot \delta \underline{r}_i = 0$$

Se o sistema de forças F_i tem também um conjunto de restrições f_i , o equilíbrio resulta em:

$$\underline{R}_i = \underline{F}_i + \underline{f}_i = 0$$

Substituído esta expressão na do trabalho resulta em

$$\delta W_i = \underline{F}_i \cdot \delta \underline{r}_i + \underline{f}_i \cdot \delta \underline{r}_i = 0$$

Normalmente as restrições são reacções que se desenvolvem nos apoios do sistema, os quais não se movendo, não permitem que se produza trabalho. Neste caso resulta que

$$\underline{F}_i \cdot \delta \underline{r}_i = F_{x_i} \delta x_i + F_{y_i} \delta y_i + F_{z_i} \delta z_i = 0$$

Se o sistema for constituído por N partículas, a soma do trabalho virtual em todas elas tem de se anular:

$$\delta W = \sum_{i=1}^N \delta W_i = \sum_{i=1}^N \underline{R}_i \cdot \delta \underline{r}_i = 0$$

Também neste caso, eliminando as reacções conduz à expressão do princípio dos trabalhos virtuais:

$$\sum_{i=1}^N \underline{F}_i \cdot \delta \underline{r}_i = 0$$

o qual diz que num sistema de forças em equilíbrio, o trabalho executado pelas forças exteriores ao sistema através de deslocamentos virtuais compatíveis com as restrições do sistema são zero.

A variação da energia potencial associada com os deslocamentos virtuais δx , δy , e δz de uma partícula é:

$$\delta V = \frac{\partial V}{\partial x} \delta x + \frac{\partial V}{\partial y} \delta y + \frac{\partial V}{\partial z} \delta z$$

Num campo de forças conservativas, $\delta W = -\delta V$ mas segundo o princípio do trabalho virtual:

$$\delta W = \underline{F} \cdot d\underline{r} = 0 = -\left(\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x} \delta x + \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial y} \delta y + \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial z} \delta z \right)$$

Dado que as variações são independentes, esta equação só é satisfeita se:

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial y} = \frac{\partial V}{\partial z} = 0$$

o que representa as condições para que V tenha um extremo, isto é, para que seja um ponto de estacionaridade.

3.4 Princípio de Hamilton

O princípio dos trabalhos virtuais foi deduzido para o caso do equilíbrio estático, podendo, no entanto, generalizar-se ao caso dinâmico com o recurso ao princípio d'Alembert. O princípio de Hamilton considera todo o movimento do sistema entre os instantes t_1 e t_2 , sendo, pois, um princípio integral. A vantagem deste princípio é que se passa a operar com escalares que são independentes do sistema de coordenadas utilizado.

Quando a resultante do sistema de forças \underline{F}_i e \underline{f}_i , que actuam numa partícula m_i não são iguais a zero, vão provocar uma aceleração $\underline{\ddot{r}}_i$, à qual está associada uma força de inércia $m_i \underline{\ddot{r}}_i$:

$$\underline{F}_i + \underline{f}_i - m_i \underline{\ddot{r}}_i = 0$$

Aplicando o princípio dos trabalhos virtuais ao caso dinâmico vem:

$$(\underline{F}_i - m_i \ddot{\underline{r}}_i) \delta \underline{r}_i = 0$$

e para um sistema de N massas será:

$$\sum_{i=1}^N (\underline{F}_i - m_i \ddot{\underline{r}}_i) \cdot \delta \underline{r}_i = \sum_{i=1}^N (F_{x_i} - m_i \ddot{x}_i) \delta x_i + \sum_{i=1}^N (F_{y_i} - m_i \ddot{y}_i) \delta y_i + \sum_{i=1}^N (F_{z_i} - m_i \ddot{z}_i) \delta z_i = 0$$

O trabalho virtual produzido pelas forças é:

$$\delta W = \sum_{i=1}^N \underline{F}_i \cdot \delta \underline{r}_i$$

Alterando a ordem dos operadores d/dt e δ resulta:

$$\frac{d}{dt}(\dot{\underline{r}}_i \cdot \delta \underline{r}_i) = \ddot{\underline{r}}_i \cdot \delta \underline{r}_i + \dot{\underline{r}}_i \cdot \delta \dot{\underline{r}}_i = \ddot{\underline{r}}_i \cdot \delta \underline{r}_i + \delta \left(\frac{1}{2} \dot{\underline{r}}_i \cdot \dot{\underline{r}}_i \right)$$

donde

$$\ddot{\underline{r}}_i \cdot \delta \underline{r}_i = \frac{d}{dt}(\dot{\underline{r}}_i \cdot \delta \underline{r}_i) - \delta \left(\frac{1}{2} \dot{\underline{r}}_i \cdot \dot{\underline{r}}_i \right)$$

Multiplicando ambos os termos por m_i e somando obtém-se:

$$\sum_{i=1}^N m_i \ddot{\underline{r}}_i \cdot \delta \underline{r}_i = \sum_{i=1}^N m_i \frac{d}{dt}(\dot{\underline{r}}_i \cdot \delta \underline{r}_i) - \delta \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i (\dot{\underline{r}}_i \cdot \dot{\underline{r}}_i) = \sum_{i=1}^N m_i \frac{d}{dt}(\dot{\underline{r}}_i \cdot \delta \underline{r}_i) - \delta T$$

onde T é a energia cinética do sistema.

Tendo em conta que:

$$\sum_{i=1}^N m_i \ddot{\underline{r}}_i \cdot \delta \underline{r}_i = \sum_{i=1}^N \underline{F}_i \cdot \delta \underline{r}_i = \delta W$$

e substituído esta expressão na anterior, vem finalmente

$$\delta T + \delta W = \sum_{i=1}^N m_i \frac{d}{dt}(\dot{\underline{r}}_i \cdot \delta \underline{r}_i)$$

Considere-se uma variação $\delta \underline{r}_i$ ao percurso de um ponto material de t_1 a t_2 . Nos extremos, o percurso real e a sua variação são coincidentes, implicando que:

$$\delta \underline{r}_i = 0 \text{ em } t = t_1 \text{ e } t = t_2$$

Multiplicando a expressão anterior por dt e integrando entre t_1 e t_2 resulta em:

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta T + \delta W) = \int_{t_1}^{t_2} \sum m_i \frac{d}{dt} (\dot{r}_i \cdot \delta r_i) dt = \sum \int_{t_1}^{t_2} m_i \frac{d}{dt} (\dot{r}_i \cdot \delta r_i) dt = \sum m_i \dot{r}_i \cdot \delta r_i \Big|_{t_1}^{t_2}$$

Como a variação δr_i se anula nos extremos do percurso resulta que:

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta T + \delta W) dt = 0$$

No caso de forças conservativas $\delta W = -\delta V$ donde resulta finalmente, o princípio de Hamilton:

$$\int_{t_1}^{t_2} L dt = 0$$

onde o lagrangeano L é $(T-V)$.

Havendo também forças não-conservativas F_{nc} , o princípio de Hamilton toma a forma:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (T - V) dt + \int_{t_1}^{t_2} F_{nc} \cdot \delta r = 0$$

3.4.1 Sistema de Massa e Mola

Considere-se agora a aplicação do princípio de Hamilton ao estudo de um sistema de uma massa e mola actuados por uma força F . As energias cinética e potencial do sistema serão:

$$T = \frac{1}{2} m \dot{u}^2$$

$$V = \frac{1}{2} k u^2$$

onde u é o deslocamento do sistema.

Substituindo estas expressões na do princípio de Hamilton resulta:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{1}{2} m \dot{u}^2 - \frac{1}{2} k u^2 \right) dt + \int_{t_1}^{t_2} F(t) \delta u dt = 0$$

Aplicando a variação δ aos vários termos vem:

$$\int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{1}{2} m 2\dot{u} \delta\dot{u} - \frac{1}{2} k 2u \delta u \right) dt + \int_{t_1}^{t_2} F \delta u dt = 0$$

Integrando por partes vem:

$$m\dot{u} \delta u \Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \delta u m \ddot{u} dt - \int_{t_1}^{t_2} k u \delta u dt + \int_{t_1}^{t_2} F \delta u dt = 0$$

ou

$$\int_{t_1}^{t_2} (m\ddot{u} + ku - F) \delta u dt - m\dot{u} \delta u \Big|_{t_1}^{t_2} = 0$$

o que implica que

$$m\ddot{u} + ku = F$$

já que as variações δu são arbitrárias. Esta é a conhecida equação do movimento que anteriormente tinha sido deduzido a partir de considerações de equilíbrio.

3.4.2 Vibrações de uma Barra em Tracção

Considere-se agora uma aplicação do princípio de Hamilton ao movimento longitudinal de uma barra. A energia elástica de deformação de uma barra que se deforma longitudinalmente é:

$$V(t) = \frac{1}{2} \int_0^L E A(x) \left\{ \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \right\}^2 dx$$

onde $EA(x)$ é a rigidez da barra e, u é o deslocamento longitudinal. A energia cinética é:

$$T(t) = \frac{1}{2} \int_0^L m(x) \left\{ \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} \right\}^2 dx$$

onde $m(x)$ é a massa por unidade de comprimento da barra. O princípio de Hamilton neste caso fica com a seguinte forma:

$$\begin{aligned} \delta \int_{t_1}^{t_2} (T - V) dt &= \delta \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \frac{1}{2} \int_0^L m \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 dx - \frac{1}{2} \int_0^L E A \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx \right\} = \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \int_0^L m \frac{\partial u}{\partial t} \delta \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right) dx - \int_0^L E A \frac{\partial u}{\partial x} \delta \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) dx \right\} dt = 0 \end{aligned}$$

Alterando a ordem de integração e dos operadores δ e $\partial / \partial t$, integra-se por partes:

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} m \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right) \delta \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right) dt &= \int_{t_1}^{t_2} m \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial}{\partial t} (\delta u) dt = \left(m \frac{\partial u}{\partial t} \right) (\delta u) \Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial}{\partial t} \left(m \frac{\partial u}{\partial t} \right) (\delta u) dt = \\ &= - \int_{t_1}^{t_2} m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \delta u dt \end{aligned}$$

pois $\delta u = 0$ em $t = t_1$ e $t = t_2$. O outro termo vem:

$$\begin{aligned} \int_0^L E A \frac{\partial u}{\partial x} \delta \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) dx &= \int_0^L E A \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} (\delta u) dx = \\ &= \left(E A \frac{\partial u}{\partial x} \right) \delta u \Big|_0^L - \int_0^L \frac{\partial}{\partial x} \left(E A \frac{\partial u}{\partial x} \right) \delta u dx \end{aligned}$$

substituindo estas duas expressões no princípio de Hamilton:

$$\int_{t_1}^{t_2} \left\{ \int_0^L \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(E A \frac{\partial u}{\partial x} \right) - m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right) \delta u dx - \left(E A \frac{\partial u}{\partial x} \right) \delta u \Big|_0^L \right\} dt = 0$$

Esta equação tem de ser satisfeita para uma variação δu arbitrária, a qual, no entanto, tem de se anular nos extremos do intervalo $x = 0$ e $x = L$. Neste caso resulta que:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(E A \frac{\partial u}{\partial x} \right) - m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$$

e

$$\left(E A \frac{\partial u}{\partial x} \right) \delta u \Big|_0^L = 0$$

Estas duas equações representam a equação diferencial do movimento e as condições de fronteira de u que têm de ser satisfeitas, ou seja nos extremos da viga, ou $\delta u = 0$, o que corresponde a fixar o deslocamento ou $\partial u / \partial x = 0$ o que implica uma rotação nula.

3.4.3 Dedução das Equações das Vibrações Transversais de Vigas

Como exemplo de aplicação dos princípios gerais da dinâmica considere-se as vibrações transversais de uma viga não uniforme.

Considere-se que num ponto qualquer x ao longo da viga, a massa por unidade de comprimento é $m(x)$, a área da secção transversal é $A(x)$ e o momento de inércia relativamente ao eixo neutro é $I(x)$. A deformação transversal $z(x,t)$ no ponto x e no instante t resulta dos componentes de flexão e esforço transverso. O declive da viga indica-se por:

$$\frac{\partial z(x,t)}{\partial x} = \psi(x,t) + \beta(x,t)$$

onde ψ é a rotação devida à flexão e β é a distorção devida ao esforço de corte.

Considerando-se que as deformações transversais e as rotações são pequenas, o momento flector é dado por:

$$M(x,t) = E \cdot I(x) \cdot \frac{\partial \psi}{\partial x}$$

e o esforço transversal é

$$Q(x, t) = k. G. A(x). \beta(x, t)$$

onde k é um factor que depende da forma da secção da viga.

Para aplicar o princípio de Hamilton generalizado, exprime-se a energia cinética por:

$$T(t) = \frac{1}{2} \int_0^L \left(\frac{\partial z}{\partial t} \right)^2 m(x) dx + \frac{1}{2} \int_0^L \left(\frac{\partial \Psi}{\partial t} \right)^2 J(x) dx$$

Donde L é o comprimento da viga e $J(x)$ é o momento de inércia por unidade de comprimento da massa. O momento de inércia da massa relaciona-se com o momento de inércia da secção através da densidade do material:

$$J(x) = \rho. I(x) = \frac{m(x)}{A(x)} I(x) = k_x^2 m(x)$$

onde k_x é o raio de giração relativamente ao eixo neutro. A variação da energia cinética vem:

$$\delta T = \int_0^L m \frac{\partial z}{\partial t} \delta \frac{\partial z}{\partial t} dx + \int_0^L k_x^2 m \frac{\partial \Psi}{\partial t} \delta \left(\frac{\partial \Psi}{\partial t} \right) dx$$

O trabalho virtual produzido no sistema tem a componente das forças conservativas, a qual é igual à variação da energia potencial, e a componente não conservativa igual ao produto das forças aplicadas $p(t, x)$ pelo deslocamento transversal:

$$\delta W(t) = \delta W_C(t) + \delta W_{nc}(t) = -\delta V(t) + \int_0^L p(x, t). \delta z(x, t). dx$$

A energia potencial é dada por:

$$\begin{aligned} V(t) &= \frac{1}{2} \int_0^L M(x, t) \frac{\partial \Psi}{\partial x} dx + \frac{1}{2} \int_0^L Q(x, t) \beta dx = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^L E I(x) \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x} \right)^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^L k_x G. A(x) \beta^2 dx \end{aligned}$$

A variação da energia potencial obtém-se desta expressão:

$$\delta V = \int_0^L E. I \frac{\partial \Psi}{\partial x} \delta \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x} \right) dx + \int_0^L k_x G. A \beta \delta \beta dx$$

onde a distorção é dada por:

$$\beta = \frac{\partial z}{\partial x} - \psi$$

Introduzindo, agora, as variações da energia cinética e do trabalho virtual na expressão do princípio de Hamilton generalizado, vem:

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta T + \delta w) dt = \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \int_0^L m \frac{\partial z}{\partial t} \delta \left(\frac{\partial z}{\partial t} \right) dx + \int_0^L k_x^2 m \frac{\partial \psi}{\partial t} \delta \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} \right) dx - \int_0^L E.I \frac{\partial \psi}{\partial x} \delta \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right) dx - \int_0^L k_x^2 G.A \left(\frac{\partial z}{\partial x} - \psi \right) \delta \left(\frac{\partial z}{\partial x} - \psi \right) dx + \int_0^L p \delta z dx \right\} dt = 0$$

Trocando agora a ordem de integração entre x e t e integrando por partes, obtém-se:

$$\int_{t_1}^{t_2} m \frac{\partial z}{\partial t} \delta \left(\frac{\partial z}{\partial t} \right) dt = \int_{t_1}^{t_2} m \frac{\partial z}{\partial t} \frac{\partial}{\partial t} (\delta z) dt = m \frac{\partial z}{\partial t} \delta z \Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial}{\partial t} \left(m \frac{\partial z}{\partial t} \right) (\delta z) dt = \int_{t_1}^{t_2} m \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} \delta z dt$$

o que é consequência de $\delta z = 0$ em t_1 e t_2 . Por um processo análogo demonstra-se que

$$\int_{t_1}^{t_2} k_x^2 m \frac{\partial \psi}{\partial t} \delta \frac{\partial \psi}{\partial t} dt = \int_{t_1}^{t_2} k_x^2 m \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \delta \psi dt$$

Integrando agora as expressões que envolvem as coordenadas espaciais, obtêm-se as condições de fronteira, já que as variações dos deslocamentos não se anulam nas extremidades da viga, mas somente nos extremos do intervalo de tempo:

$$\int_0^L E.I \frac{\partial \psi}{\partial x} \delta \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right) dx = \int_0^L E.I \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} (\delta \psi) dx = \left(E.I \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) \delta \psi \Big|_0^L - \int_0^L \frac{\partial}{\partial x} \left(E.I \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) \delta \psi dx$$

$$\int_0^L k_x G.A \left(\frac{\partial z}{\partial x} - \psi \right) \delta \left(\frac{\partial z}{\partial x} - \psi \right) dx = \left\{ k_x G.A \left(\frac{\partial z}{\partial x} - \psi \right) dx \Big|_0^L - \int_0^L \frac{\partial}{\partial x} \left\{ k_x G.A \left(\frac{\partial z}{\partial x} - \psi \right) \right\} \delta z dx - \int_0^L k_x G.A \left(\frac{\partial z}{\partial x} - \psi \right) \right\} \delta \psi dx$$

Substituindo o resultado das quatro integrações por partes na expressão do princípio de Hamilton generalizado, vem:

$$\begin{aligned}
 & \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \int_0^L \left(\frac{\partial}{\partial x} k_x G.A \left(\frac{\partial z}{\partial x} - \psi \right) \right) - m \frac{\partial^2}{\partial t^2} p \right\} \delta z \, dx + \\
 & + \int_0^L \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left(E.I \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) + k_x G.A \left(\frac{\partial z}{\partial x} - \psi \right) \right\} - k_x^2 m \frac{\partial^2}{\partial t^2} \delta \psi \, dx - \\
 & - \left(E.I \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) \delta \psi \Big|_0^L - \left\{ k_x G.A \left(\frac{\partial z}{\partial x} - \psi \right) dz \right\} \Big|_0^L dt = 0
 \end{aligned}$$

Dado que os deslocamentos virtuais $\delta\psi$ e δz são arbitrários e independentes, no domínio $0 < x < L$, a satisfação desta expressão obriga a que:

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial}{\partial x} \left\{ k_x G.A \left(\frac{\partial z}{\partial x} - \psi \right) \right\} - m \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} + p = 0 \\
 & \frac{\partial}{\partial x} \left(E.I \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) + k_x G.A \left(\frac{\partial z}{\partial x} - \psi \right) - k_x^2 m \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0
 \end{aligned}$$

ao longo da viga. Para além disso, é necessário também que:

$$\begin{aligned}
 & \left(E.I \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) \delta \psi \Big|_0^L = 0 \\
 & \left\{ k_x G.A \left(\frac{\partial z}{\partial x} - \psi \right) \right\} \Big|_0^L = 0
 \end{aligned}$$

Estas expressões implicam que nas extremidades da viga se anulam as variações dos deslocamentos $\delta\psi$ e δz , ou então, as correspondentes expressões entre parêntesis.

As duas primeiras equações condicionam o movimento da barra, enquanto as duas ultimas são as condições de fronteira. Estas implicam que nas extremidades da viga o momento flector ou a rotação da viga se anule e que o esforço transversal ou a deformação de corte também se anulem.

Uma das grandes vantagens destes métodos variacionais reside na indicação das condições de fronteira que devem ser consideradas no problema. As que resultam de condições geométricas, e que envolvem os deslocamentos, são as condições geométricas ou as essenciais. Quando as condições geométricas não são suficientes, os métodos variacionais indicam as condições naturais, as quais envolvem os momentos flectores e o esforço de corte. As condições de fronteira essenciais e as adicionais completam-se por forma a que a solução das equações diferenciais é única.

A dedução das equações de movimento desta viga tiveram em conta o efeito da deformação de corte e da inércia de rotação. No entanto, em vigas com as dimensões da secção

transversal muito inferiores ao comprimento da barra, estes dois efeitos são desprezíveis. Neste caso, as equações podem ser combinadas resultando em:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left\{ E.I(x) \frac{\partial^2 z(x,t)}{\partial x^2} = -m(x) \frac{\partial^2 z(x,t)}{\partial t^2} \right\}$$

Quando $p = 0$. Esta é a equação diferencial das vibrações livres de uma viga de secção não uniforme.

Desprezando as deformações de corte, vem:

$$\psi(x,t) = \frac{\partial z(x,t)}{\partial x}$$

donde o momento é dado por:

$$M(x,t) = E.I(x) \frac{\partial^2 z(x,t)}{\partial x^2}$$

e o esforço transversal será:

$$Q(x,t) = -\frac{\partial M(x,t)}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial x} \left\{ E.I(x) \frac{\partial^2 z(x,t)}{\partial x^2} \right\}$$

Considere-se agora uma solução da equação com a forma de variáveis separáveis:

$$z(x,t) = Z(x) f(t)$$

Introduzindo esta expressão na eqn. (5.21) resulta em

$$\frac{1}{m(x) Z(x)} \frac{d^2}{dx^2} \left\{ E.I(x) \frac{d^2 Z(x,t)}{dx^2} \right\} = -\frac{1}{f(t)} \frac{d^2 f(t)}{dt^2}$$

onde cada um dos termos da igualdade depende só de uma variável. Para que a igualdade seja satisfeita para qualquer valor das variáveis, é necessário satisfazer simultaneamente as seguintes equações:

$$\frac{d^2}{dx^2} \left\{ E.I(x) \frac{d^2 Z(x,t)}{dx^2} \right\} - \omega^2 m(x) Z(x) = 0$$

$$\frac{d^2 f(t)}{dt^2} + \omega^2 f(t) = 0$$

Desta forma a equação diferencial às derivadas parciais foi transformada em duas equações diferenciais ordinárias. A segunda conduz a uma solução harmónica no tempo, enquanto a primeira, sendo de quarta ordem, necessita de quatro condições de fronteira.

Para se obter a solução deste sistema de equações é necessário resolver o problema de valores próprios, que consiste em determinar os valores de ω^2 que permitem obter a solução não trivial. Para cada valor próprio ou característico ω^2 , existe uma solução não trivial para $Z(x)$, a qual é a função própria ou característica associada àquele valor característico.

Como a equação em ordem a $f(t)$ é homogénea, o produto de uma constante por uma solução é também solução do sistema. Assim, as quatro condições de fronteira determinam a forma de solução mas a sua amplitude é arbitrária.

3.4.4 Viga Encastrada com Carregamento Lateral

Considere-se agora o caso de uma viga encastrada com um carregamento lateral $p(x,t)$ distribuído ao longo da viga e um peso concentrado P_0 colocado no extremo $x=L$ da viga. Neste caso as energias cinética e potencial e o trabalho são dados por:

$$T = \frac{1}{2} \int_0^L m \dot{w}^2 dx$$

$$V = \frac{1}{2} \int_0^L EI \left(\frac{d^2 w}{dx^2} \right)^2 dx$$

$$\delta W = P_0 \delta w(L) + \int_0^L p(x,t) \delta w(x) dx$$

O princípio de Hamilton vem:

$$\delta \int_0^t \left\{ \int_0^L \frac{1}{2} m \dot{w}^2 - \frac{1}{2} \int_0^L EI \left(\frac{d^2 w}{dx^2} \right)^2 \right\} dt + \int_0^t \{ P_0 \delta w(L) + \int_0^L p(x,t) \delta w(x) dx \} dt = 0$$

Aplicando a variação aos termos da equação:

$$\int_0^t \left\{ \int_0^L m \dot{w} \delta \dot{w} dx - \int_0^L EI w'' \delta w'' dx + P_0 \delta w(L) + \int_0^L p \delta w dx \right\} dt = 0$$

Integrando por partes vem:

$$(m \dot{w} \delta w)|_0^t - \int_0^t \int_0^L m \ddot{w} \delta w dt dx - \int_0^t \{ EI w'' \delta w' |_0^L - (EI w''') \delta w |_0^L - \int_0^L (EI w''') \delta w dx \} dt + \int_0^t \{ P_0 \delta w(L) + \int_0^L p \delta w dx \} dt = 0$$

Coligindo termos resulta:

$$\int_0^t \int_0^L (-m\ddot{w} - (E I w''')'' + p) \delta w \, dx + [(E I w''')'_L + P_0(t)] \delta w(L) - (E I w''')'_0 \delta w(0) - (E I w''')_L \delta w'(L) + (E I w''')_0 \delta w'(0) \} dt = 0$$

Para que $\int_0^t (\dots) dt = 0$, é necessário que cada termo do integral se anule:

$$-m\ddot{w} - (E I w''')'' + p = 0 \quad (\text{equação de equilíbrio dinâmico})$$

$$\text{em } x = L \quad \left\{ \begin{array}{l} (E I w''')'_L + P_0 = 0 \quad \text{esforço de corte} \\ (E I w''')_L = 0 \quad \text{momento flector} \end{array} \right\} \quad \text{condições de fronteira de forças}$$

$$\text{em } x = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} (E I w''')'_0 \delta w(0) = 0 \rightarrow \delta w(0) = 0 \quad \text{ou } w'''(0) = 0 \\ (E I w''')_0 \delta w'(0) = 0 \rightarrow \delta w'(0) = 0 \quad \text{ou } w''(0) = 0 \end{array} \right\} \quad \begin{array}{l} \text{condições de fronteira} \\ \text{geométricas} \end{array}$$

3.5 Equações de Lagrange

Num sistema de partículas descrito pelas variáveis de posição r_i , pode utilizar-se um outro sistema de variáveis generalizadas q_k que:

$$r_i = r_i(q_1, q_2, \dots, q_n, t)$$

onde n é o numero de graus de liberdade do sistema. As velocidades obtêm-se por diferenciação:

$$\dot{r}_i = \frac{dr_i}{dt} = \frac{\partial r_i}{\partial q_1} \dot{q}_1 + \frac{\partial r_i}{\partial q_2} \dot{q}_2 + \dots + \frac{\partial r_i}{\partial q_n} \dot{q}_n + \frac{\partial r_i}{\partial t}$$

A energia cinética do sistema será:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \dot{r}_i \cdot \dot{r}_i = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \left(\sum_r \sum_s \frac{\partial r_i}{\partial q_r} \cdot \frac{\partial r_i}{\partial q_s} \dot{q}_r \dot{q}_s + 2 \frac{\partial r_i}{\partial t} \sum_{i=1}^N \frac{\partial r_i}{\partial q_r} \dot{q}_r + \frac{\partial r_i}{\partial t} \cdot \frac{\partial r_i}{\partial t} \right)$$

donde resulta que

$$T = T(q_i, \dot{q}_i, t) \quad i = 1, 2, \dots, n$$

A variação da energia cinética é:

$$\delta T = \sum_{k=1}^n \frac{\partial T}{\partial q_k} \delta q_k + \sum_{k=1}^n \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \delta \dot{q}_k$$

Integrando δt de t_1 e t_2 vem:

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta T dt = \sum_{k=1}^n \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial T}{\partial q_k} \delta q_k dt + \sum_{k=1}^n \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \delta \dot{q}_k dt$$

mas

$$\delta \dot{q}_k = \delta \frac{dq_k}{dt} = \frac{d}{dt} \delta q_k$$

trocando a sequência da aplicação da variação e da diferenciação vem:

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \delta \dot{q}_k dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \frac{d}{dt} (\delta q_k) dt$$

e integrando por partes,

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \frac{d}{dt} (\delta q_k) dt = \left. \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \delta q_k \right|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \delta q_k \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right) dt = - \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right) \delta q_k dt$$

pois $\delta q_k = 0$ em t_1 e t_2 .

Substituído esta expressão na da energia cínética vem:

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} \delta T dt &= \delta \int_{t_1}^{t_2} T dt = \sum_{k=1}^n \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial T}{\partial q_k} \delta q_k dt - \sum_{k=1}^n \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right) \delta q_k dt = \\ &= - \sum_{k=1}^n \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right) - \left(\frac{\partial T}{\partial q_k} \right) \right) \delta q_k dt \end{aligned}$$

e há forças exteriores a actuar no sistema, o trabalho virtual é:

$$\delta W = \sum_{j=1}^P \underline{F}_j \cdot \delta \underline{r}_j$$

onde a variação do deslocamento se pode representar por:

$$\delta \underline{r}_j = \frac{\partial \underline{r}_j}{\partial q_1} \delta q_1 + \frac{\partial \underline{r}_j}{\partial q_2} \delta q_2 + \dots + \frac{\partial \underline{r}_j}{\partial q_n} \delta q_n$$

e portanto:

$$\delta W = \sum_{j=1}^P \left(\underline{F}_j \frac{\partial \underline{r}_j}{\partial q_1} \delta q_1 + \underline{F}_j \frac{\partial \underline{r}_j}{\partial q_2} \delta q_2 + \dots + \underline{F}_j \frac{\partial \underline{r}_j}{\partial q_n} \delta q_n \right)$$

Em vez de representar o trabalho virtual em termos das forças reais, actuando nas coordenadas generalizadas, também se pode representar como o produto de forças generalizadas Q_k , actuando em deslocamentos generalizados δq_k . Neste caso, a direcção das forças e deslocamentos generalizada são coíidentes e

$$\delta W = \sum_{k=1}^n Q_k \delta q_k$$

A força generalizada nem sempre representa uma força, embora o produto $Q_k \delta q_k$ represente trabalho. Comparando as duas últimas expressões, deduz-se que:

$$Q_k = \sum_{j=1}^p F_j \frac{dr_{-j}}{dq_k}$$

Tendo as expressões para a energia cínética e para o trabalho das forças exteriores, pode substituir-se no princípio de Hamilton generalizado:

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta T + \delta M) dt = - \sum_{k=1}^n \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} - Q_k \right) \delta q_k dt = 0$$

Os deslocamentos virtuais são por definição arbitrários. Além disso, sendo as coordenadas generalizadas independentes umas das outras, os valores de δq_k podem ser escolhidos arbitrariamente. Escolha-se por conveniência:

$$\begin{aligned} \delta q_k &\neq 0 & \text{se } k &= r \\ \delta q_k &= 0 & \text{se } k &\neq r \end{aligned}$$

Neste caso, a satisfação da equação leva a:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_r} \right) - \left(\frac{\partial T}{\partial q_r} \right) = 0 \quad , r = 1, 2, \dots, n.$$

as quais são válidas para qualquer valor de r, e não são mais do que as equações de Lagrange do movimento. Estas equações são equivalentes ao princípio de Hamilton.

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta T + \delta W) dt = 0$$

Aquelas equações são muito gerais na medida em que Q_k pode representar forças conservativas ou não-conservativas, as quais ícluem forças internas dissipativas e forças externas. Para as forças conservativas

$$W_c(q_k) = -V(q_k)$$

e

$$\delta W_c(q_k) = \sum_{k=1}^n Q_{kc} \delta q_k = -\delta V(q_k) = -\sum_{k=1}^n \frac{\partial V}{\partial q_k} \delta q_k$$

donde se conclui que $Q_{kc} = -\partial V / \partial q_r$ e a equação de Lagrange vem:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_r} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_r} - \frac{\partial V}{\partial q_r} = Q_{rc} \quad , r = 1, 2, \dots, n$$

Dado que V é independente de \dot{q}_r pode reformular-se a equação para

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_r} = Q_{rc}$$

onde $L = T - V$ é o Lagrangeano.

4. ANÁLISE DINÂMICA DE SISTEMAS DISCRETOS

4.1 Coeficientes de Influência

Considere-se um sistema de várias massas e molas. Define-se coeficiente de influência de flexibilidade c_{ij} como a deformada no ponto $x = x_i$, devida a uma força unitária aplicada em $x = x_j$. Num sistema linear, a deformada é proporcional à força, donde se deduz que:

$$u_{ij} = c_{ij} \cdot F_j \quad (4.1)$$

Mas num sistema linear é aplicável o princípio da sobreposição, donde pode-se concluir que a deformada total em $x = x_i$ se obtém somando as contribuições de todas as forças F_j que actuam no sistema:

$$u_i = \sum_{j=1}^n u_{ij} = \sum_{j=1}^n c_{ij} F_j \quad , i = 1, 2, \dots, n \quad (4.2)$$

De forma equivalente pode-se definir o coeficiente de influência de rigidez k_{ij} como sendo a força que actuando em $x = x_i$ produz uma deformação unitária em $x = x_j$ quando todos os outros pontos do sistema estão fixos.

Na forma matricial pode representar-se

$$\{u\} = [c] \{F\} \quad (4.3)$$

$$\{F\} = [k] \{u\} \quad (4.4)$$

onde as matrizes $[c]$ e $[k]$ são a matriz de flexibilidade e rigidez respectivamente. Substituindo $[F]$ na primeira equação resulta:

$$\{u\} = [c][k] \{u\} \quad (4.5)$$

o que implica que

$$[c][k] = [I] \quad (4.6)$$

onde I é a matriz unitária que tem os elementos diagonais iguais à unidade e os outros termos nulos. Daqui se conclui que uma matriz é igual ao inverso da outra.

4.2 Energia de Deformação

Considere-se um sistema com n forças F_i e denomine-se u_i o deslocamento no ponto i na direcção da força F_i . Neste caso, sendo F_i a única força presente, a energia de deformação é:

$$V_i = \frac{1}{2} F_i u_i \quad (4.7)$$

A energia total de deformação devida às n forças é

$$V = \sum_{i=1}^n V_i = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n F_i \cdot u_i \quad (4.8)$$

Representando os deslocamentos em termos dos coeficientes de flexibilidade vem:

$$V = \frac{1}{2} \sum_i F_i \sum_j c_{ij} F_j = \frac{1}{2} \sum_i \sum_j c_{ij} F_i F_j \quad (4.9)$$

Como a energia potencial também se pode representar por

$$V = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n F_j u_j \quad (4.10)$$

e

$$u_j = \sum_{i=1}^n c_{ji} \cdot F_i \quad (4.11)$$

obtém-se neste caso

$$V = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ji} F_i F_j \quad (4.12)$$

e por comparação com a expressão anterior conclui-se que

$$c_{ij} = c_{ji} \quad (4.13)$$

o que é a expressão do teorema da reciprocidade de Maxwell.

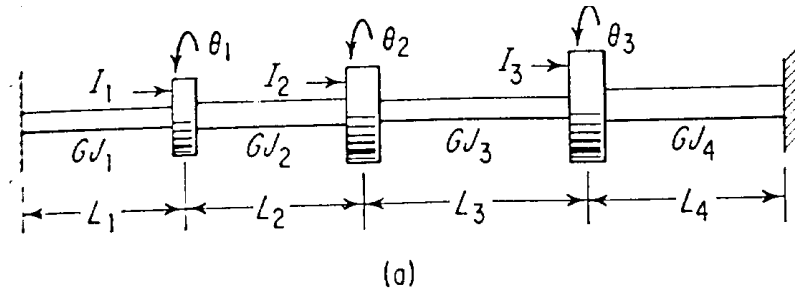
Podia-se ter utilizado uma formulação semelhante para demonstrar igualmente que:

$$k_{ij} = k_{ji} \quad (4.14)$$

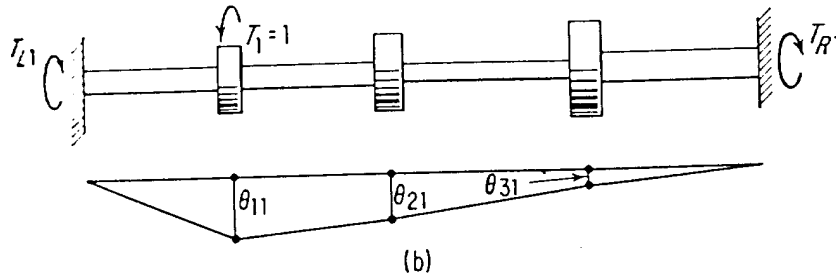
Isto implica que as matrizes \underline{c} e \underline{k} consideradas na secção anterior são simétricas.

Considere-se o exemplo do movimento de rotação de três rotores com momentos polares de inércia I_1 , I_2 e I_3 que estão colocados num veio com secção uniforme entre as massas e encastrado nos extremos. A rigidez torcional dos veios é de GJ_1 , GJ_2 , GJ_3 , e GJ_4 . Isto implica que as constantes de mola associadas a cada secção do veio são dadas por:

$$k_i = \frac{GJ_i}{L_i}, \quad i = 1, 2, 3, 4. \quad (4.15)$$



Para determinar os coeficientes de flexibilidade aplica-se um momento unitário ao rotor 1 e calculam-se os ângulos de rotação θ_{11} , θ_{21} e θ_{31} que resultam, como se indica na figura (b).



À esquerda da massa 1 há uma constante de mola k_1 enquanto à direita há três molas em série. Por isso os momentos torsores que se geram no encastramento à esquerda T_{L1} e à direita T_{R1} devidos a este momento unitário em 1 são:

$$T_{L1} = \theta_{11} k_1, \quad T_{R1} = \frac{\theta_{11}}{\sum_{i=2}^4 \left(\frac{1}{k_i} \right)} \quad (4.16)$$

Mas como o equilíbrio impõe que:

$$T_{L1} + T_{R1} = T_{11} = 1, \quad (4.17)$$

obtem-se, por substituição, o coeficiente de influência:

$$a_{11} = \theta_{11} = \frac{1}{k_1 + \left[\sum_{i=2}^4 \left(\frac{1}{k_i} \right) \right]^{-1}} = \frac{\sum_{i=2}^4 \left(\frac{1}{k_i} \right)}{k_1 \sum_{i=1}^4 \left(\frac{1}{k_i} \right)} \quad (4.18)$$

O ângulo de rotação θ_{31} obtém-se a partir do momento no apoio direito e da rigidez do segmento de veio 4:

$$a_{31} = \theta_{31} = \frac{T_{R1}}{k_4} = \frac{1}{k_1 k_4 \sum_{i=1}^4 \left(\frac{1}{k_i} \right)}, \quad (4.19)$$

O ângulo θ_{21} resulta da rotação θ_{31} que é aumentada da rotação que se dá entre a massa 3 e 2 isto é T_{R1}/k_3 . Assim o coeficiente de influência é dado por:

$$a_{21} = \theta_{21} = \frac{T_{R1}}{k_3} + \frac{T_{R1}}{k_4} = \frac{k_3 + k_4}{k_3 k_4} T_{R1} = \frac{k_3 + k_4}{k_1 k_3 k_4 \sum_{i=1}^4 \left(\frac{1}{k_i} \right)} \quad (4.20)$$

Aplicando agora um momento $T_{22} = 1$ obtém-se os momentos nos apoios, tendo em conta que há duas molas rotacionais de cada lado da massa:

$$T_{L2} = \frac{\theta_{22}}{\left(\frac{1}{k_1} \right) + \left(\frac{1}{k_2} \right)}, \quad T_{R2} = \frac{\theta_{22}}{\left(\frac{1}{k_3} \right) + \left(\frac{1}{k_4} \right)}, \quad (4.21)$$

Estes momentos têm de satisfazer o equilíbrio:

$$T_{L2} + T_{R2} = 1, \quad (4.22)$$

pelo que, de forma análoga se obtém os coeficientes de influência correspondentes:

$$a_{22} = \theta_{22} = \frac{\left[\left(\frac{1}{k_1} \right) + \left(\frac{1}{k_2} \right) \right] \left[\left(\frac{1}{k_3} \right) + \left(\frac{1}{k_4} \right) \right]}{\sum_{i=1}^4 \left(\frac{1}{k_i} \right)} = \frac{(k_1 + k_2)(k_3 + k_4)}{\prod_{i=1}^4 k_i \sum_{i=1}^4 \left(\frac{1}{k_i} \right)} \quad (4.23)$$

$$a_{12} = \theta_{12} = \frac{T_{L2}}{k_1} = \frac{\left(\frac{1}{k_3} \right) + \left(\frac{1}{k_4} \right)}{k_1 \sum_{i=1}^4 \left(\frac{1}{k_i} \right)} = \frac{(k_3 + k_4)}{k_1 k_3 k_4 \sum_{i=1}^4 \left(\frac{1}{k_i} \right)} \quad (4.24)$$

$$a_{32} = \theta_{32} = \frac{T_{R2}}{k_4} = \frac{\left(\frac{1}{k_1} \right) + \left(\frac{1}{k_2} \right)}{k_4 \sum_{i=1}^4 \left(\frac{1}{k_i} \right)} = \frac{(k_1 + k_2)}{k_1 k_2 k_4 \sum_{i=1}^4 \left(\frac{1}{k_i} \right)} \quad (4.25)$$

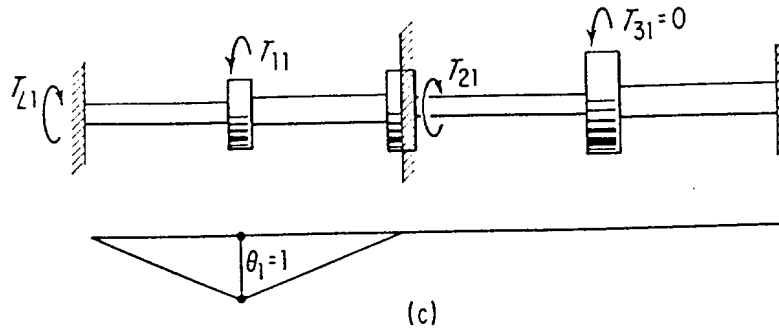
Os restantes coeficientes obtém-se simplesmente por consideração de simetria, alterando os índices das expressões anteriores:

$$a_{33} = \theta_{33} = \frac{\sum_{i=1}^3 \left(\frac{1}{k_i} \right)}{k_4 \sum_{i=1}^4 \left(\frac{1}{k_i} \right)}, \quad (4.26)$$

$$a_{23} = \theta_{23} = \frac{k_1 + k_2}{k_1 k_2 k_4 \sum_{i=1}^4 \left(\frac{1}{k_i} \right)} = a_{32} \quad (4.27)$$

$$a_{13} = \theta_{13} = \frac{1}{k_1 k_4 \sum_{i=1}^4 \left(\frac{1}{k_i} \right)} = a_{31} \quad (4.28)$$

Os coeficientes de rigidez são muito mais simples de obter pois são os momentos gerados quando se aplica uma rotação unitária numa massa, mantendo todas as outras rotações nulas como se indica na figura (c).



Ao aplicar uma rotação $\theta_1 = 1$ produzem-se nas extremidades do segmento de veio os momentos T_{L1} e T_{21} dados por:

$$T_{L1} = 1 \times k_1, \quad T_{21} = 1 \times k_2. \quad (4.29)$$

Considerações de equilíbrio implicam que $T_{11} = T_{L1} + T_{21}$ pelo que os coeficientes de influência de rigidez são dados por:

$$\begin{aligned} k_{11} &= T_{L1} + T_{21} = k_1 + k_2, \\ k_{21} &= -T_{21} = -k_2, \\ k_{31} &= T_{31} = 0. \end{aligned} \quad (4.30)$$

Facilmente se aplicava este procedimento aos outros pontos calculando os restantes coeficientes:

$$\begin{aligned} k_{12} &= -k_2, & k_{22} &= k_2 + k_3, & k_{32} &= -k_3, \\ k_{13} &= 0, & k_{23} &= -k_3, & k_{33} &= k_3 + k_4. \end{aligned} \quad (4.31)$$

Os coeficientes de influência de flexibilidade e rigidez podem ser representados em forma de matriz como se indica:

$$a = \frac{1}{\prod_{i=1}^4 k_i \sum_{i=1}^4 \left(\frac{1}{k_i} \right)} \times \begin{bmatrix} k_3 k_4 + k_2(k_3 + k_4) & k_2(k_3 + k_4) & k_2 k_3 \\ k_2(k_3 + k_4) & (k_1 + k_2)(k_3 + k_4) & k_3(k_1 + k_2) \\ k_2 k_3 & k_3(k_1 + k_2) & k_1 k_2 + k_3(k_1 + k_2) \end{bmatrix}. \quad (4.32)$$

$$[k] = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 \\ 0 & -k_3 & k_3 + k_4 \end{bmatrix}. \quad (4.33)$$

A facilidade de obtenção da matriz de rigidez leva a concluir que a forma mais prática de obter a matriz de flexibilidade é construir a matriz de rigidez e invertê-la.

4.3 Equação de Lagrange

A equação de Lagrange deduzida anteriormente tem a forma:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_r} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_r} + \frac{\partial V}{\partial q_r} = Q_r, \quad r = 1, 2, \dots, n \quad (4.34)$$

onde Q_r é uma força generalizada não conservativa e a equação é válida para os vários deslocamentos generalizados. O conjunto das equações pode representar-se sob a forma de uma matriz.

Um caso de especial interesse é a energia cinética que depende só das velocidades e não das coordenadas:

$$T = \frac{1}{2} \{\dot{q}\}^T [m] \{\dot{q}\} \quad (4.35)$$

onde m é a matriz das massas ou de inércia. Esta expressão representa uma forma quadrática que é positiva definida, pois a energia cinética nunca pode ser negativa, e só se anula quando as velocidades são zero.

A energia potencial também se pode exprimir em coordenadas generalizadas:

$$V = \frac{1}{2} \{q\}^T [k] \{q\} \quad (4.36)$$

o que também é uma forma quadrática.

Dado que as energias cinética e potencial são independentes do sistema de coordenadas adoptado, as matrizes de inércia e rigidez dependem do conjunto de coordenadas generalizadas que está a ser utilizado. Considere-se a derivada da energia cinética relativamente a \dot{q}_r :

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_r} = \frac{1}{2} \{\delta_{ir}\}^T [m] \{\dot{q}\} + \frac{1}{2} \{\dot{q}\}^T [m] \{\delta_{ir}\} \quad (4.37)$$

onde a matriz δ_{ir} é uma matriz com valores do delta de Kronecker, a qual tem todos os elementos nulos excepto quando $i = r$ onde os elementos são a unidade.

Tendo em conta que m é simétrica, a expressão anterior vem:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_r} = \{\delta_{ir}\}^T [m] \{\dot{q}\} = [m_r] \{\dot{q}\}, \quad r = 1, 2, \dots, n \quad (4.38)$$

onde $[m_r]$ é a linha que corresponde à linha r da matriz $[m]$. Portanto, o vector com todas as derivadas, de $r = 1$ a n será:

$$\left\{ \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} \right\} = \{[m_r] \{\dot{q}\}\} = [m] \{\dot{q}\} \quad (4.39)$$

Derivando esta igualdade vem

$$\frac{d}{dt} \left\{ \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} \right\} = [m] \{\ddot{q}\} \quad (4.40)$$

Como T depende só da velocidade,

$$\left\{ \frac{\partial T}{\partial q} \right\} = \{0\} \quad (4.41)$$

De forma análoga se pode obter que

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial q_r} &= \frac{1}{2} \{\delta_{ir}\}^T [k] \{q\} + \frac{1}{2} \{q\}^T [k] \{\delta_{ir}\} = \{\delta_{ir}\}^T [k] \{q\} = \\ &= [k_r] \{q\} \quad , r = 1, 2, \dots, n \end{aligned} \quad (4.42)$$

Daqui se infere que

$$\left\{ \frac{\partial V}{\partial q} \right\} = [k] \{q\} \quad (4.43)$$

Introduzindo todas estas expressões na equação de Lagrange resulta em:

$$[m] \{\ddot{q}\} + [k] \{q\} = \{Q\} \quad (4.44)$$

o que representa a equação do movimento ou do equilíbrio dinâmico.

No caso particular, em que as coordenadas generalizadas são mesmo os deslocamentos reais dos pontos, a matriz de inércia é diagonal.

4.4 Transformações Lineares de Coordenadas

Considere-se um sistema de n graus de liberdade representado por coordenadas generalizadas. As energias cinética e potencial representam-se por:

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \sum_i \sum_j m_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j \\ V &= \frac{1}{2} \sum_i \sum_j K_{ij} q_i q_j \end{aligned} \quad (4.45)$$

onde os coeficientes da matriz de inércia e de rigidez dependem do sistema de coordenadas utilizado, embora sejam sempre simétricos.

Querendo representar-se o sistema por outras coordenadas, η_r , estas podem relacionar-se com as anteriores por uma transformação linear com coeficientes constantes β_{ij} :

$$q_i = \sum_{r=1}^n \beta_{ir} \cdot \eta_r \quad (4.46)$$

donde

$$\dot{q}_i = \sum_{r=1}^n \beta_{ir} \cdot \dot{\eta}_r \quad (4.47)$$

Introduzindo estas expressões nas anteriores resulta em:

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \sum_i \sum_j m_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j = \frac{1}{2} \sum_i \sum_j m_{ij} \sum_r \beta_{ir} \dot{\eta}_r \sum_s \beta_{js} \dot{\eta}_s = \\ &= \frac{1}{2} \sum_i \sum_s \dot{\eta}_r \dot{\eta}_s \sum_i \sum_j m_{ij} \beta_{ir} \beta_{js} = \frac{1}{2} \sum_r \sum_s M_{rs} \dot{\eta}_r \dot{\eta}_s \end{aligned} \quad (4.48)$$

onde:

$$M_{rs} = \sum_i \sum_j m_{ij} \beta_{ir} \beta_{js} \quad (4.49)$$

Procedendo analogamente para a energia potencial obtém-se:

$$V = \frac{1}{2} \sum_i \sum_j k_{ij} q_i q_j = \frac{1}{2} \sum_r \sum_s K_{rs} \eta_r \eta_s \quad (4.50)$$

onde:

$$K_{rs} = \sum_i \sum_j k_{ij} \beta_{ir} \beta_{js} \quad (4.51)$$

Note-se que os coeficientes de inércia e rigidez no sistema de coordenadas transformadas continuam a ser simétricos. Para aplicar o princípio dos trabalhos virtuais no novo sistema de coordenadas, exprime-se o trabalho virtual:

$$\delta W = \sum_i Q_i \delta q_i = \sum_i Q_i \sum_r \beta_{ir} \delta \eta_r = \sum_r \delta \eta_r \sum_i \beta_{ir} Q_i = \sum_r N_r \delta \eta_r \quad (4.52)$$

onde:

$$N_r = \sum_i \beta_{ir} Q_i \quad (4.53)$$

são as forças generalizadas correspondentes ao sistema de coordenadas η_r .

Escolhendo os coeficientes β_{ij} por forma a que $M_{rs} = 0$ quando $r \neq s$, a expressão da energia cinética fica sem termos cruzados e o sistema torna-se desacoplado inercialmente. Analogamente, se a escolha dos coeficientes resultar em K_{rs} para $r \neq s$, o sistema é desacoplado elasticamente. Conclui-se, portanto, que o acoplamento no sistema de equações não é uma propriedade inerente ao sistema, mas depende do sistema de coordenadas adoptado.

É possível obter um sistema de coordenadas que tornem o sistema de equações desacoplado, tanto elástica como inercialmente. Neste caso é necessário resolver n equações diferenciais independentes. As coordenadas que tornam o sistema desacoplado denominam-se coordenadas naturais, e a matriz de transformação linear ou matriz modal representa os valores próprios e os vectores próprios ou modos próprios.

É bastante mais simples resolver um sistema de equações independentes, pelo que se procura transformar os sistemas de equações para esta forma, procedendo a uma análise modal.

O desenvolvimento da transformação de coordenadas também pode ser feito com a representação matricial. A transformação linear representa-se por

$$\{q\} = [\beta]\{\eta\} \quad \text{e} \quad \{\dot{q}\} = [\beta]\{\dot{\eta}\} \quad (4.54)$$

e a matriz transposta por:

$$\{q\}^T = \{\eta\}^T [\beta]^T \quad (4.55)$$

Analogamente as energias cinética e potencial representam-se por:

$$T = \frac{1}{2} \{\dot{q}\}^T [m] \{\dot{q}\} = \frac{1}{2} \{\dot{\eta}\}^T [\beta]^T [m] [\beta] \{\dot{\eta}\} = \frac{1}{2} \{\dot{\eta}\}^T [M] \{\dot{\eta}\} \quad (4.56)$$

$$V = \frac{1}{2} \{q\}^T [k] \{q\} = \frac{1}{2} \{\eta\}^T [\beta]^T [k] [\beta] \{\eta\} = \frac{1}{2} \{\eta\}^T [K] \{\eta\}$$

onde

$$[M] = [\beta]^T [m] [\beta] \quad (4.57)$$

e

$$[K] = [\beta]^T [k] [\beta] \quad (4.58)$$

são as matrizes de inércia e rigidez. As matrizes \underline{M} e \underline{K} são simétricas porque as matrizes \underline{m} e \underline{k} também o são.

O trabalho virtual é

$$\delta W = \{\delta q\}^T \{Q\} = \{\delta q\}^T \{\beta\}^T \{Q\} = \{\delta \eta\}^T \{N\} \quad (4.59)$$

onde $\{N\} = [\beta]^T \{Q\}$

As equações do movimento que resultam são:

$$[M]\{\ddot{\eta}\} + [K]\{\eta\} = \{N\} \quad (4.60)$$

No caso de o sistema ser totalmente desacoplado, as matrizes M e K são diagonais e o sistema de equações representa um conjunto de n equações independentes:

$$M_{rr} \ddot{\eta}_r(t) + K_{rr} \eta_r(t) = N_r(t) \quad , r = 1, 2, \dots, n \quad (4.61)$$

cada uma das quais é a equação de um sistema com um grau de liberdade.

Considere-se agora a aplicação da equação de Lagrange a este caso em que as coordenadas generalizadas são as próprias rotações das massas:

$$q_1 = \theta_1, \quad q_2 = \theta_2, \quad q_3 = \theta_3.$$

A energia cinética vem dada por:

$$T = \frac{1}{2} I_1 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} I_2 \dot{\theta}_2^2 + \frac{1}{2} I_3 \dot{\theta}_3^2 = \frac{1}{2} \{\dot{\theta}\}^T [I_p] \{\dot{\theta}\}, \quad (4.62)$$

o que se representa facilmente em forma matricial onde a matriz de inércia é diagonal:

$$[I_p] = \begin{bmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{bmatrix} \quad (4.63)$$

A energia potencial vai exprimir-se em termos de rotação relativa em cada segmento do veio, o que também se pode exprimir matricialmente:

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{2} k_1 \theta_1^2 + \frac{1}{2} k_2 (\theta_2 - \theta_1)^2 + \frac{1}{2} k_3 (\theta_3 - \theta_2)^2 + \frac{1}{2} k_4 \theta_3^2 \\ &= \frac{1}{2} [(k_1 + k_2) \theta_1^2 - 2k_2 \theta_1 \theta_2 + (k_2 + k_3) \theta_2^2 - 2k_3 \theta_2 \theta_3 + (k_3 + k_4) \theta_3^2] \\ &= \frac{1}{2} \{\theta\}^T [k] \{\theta\}, \end{aligned} \quad (4.64)$$

onde a matriz de rigidez é:

$$[k] = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 \\ 0 & -k_3 & k_3 + k_4 \end{bmatrix}. \quad (4.65)$$

onde cada termo da matriz de rigidez é dado por

$$k_i = \frac{GJ_i}{L_i}. \quad (4.66)$$

Definindo-se agora o vector dos momentos torsores,

$$\{T\} = \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{Bmatrix}, \quad (4.67)$$

a equação do movimento resulta em

$$[I_p]\{\ddot{\theta}\} + [k]\{\theta\} = \{T\}. \quad (4.68)$$

Continuando com o mesmo exemplo mas adoptando as coordenadas generalizadas, a energia cinética vem:

$$T = \frac{1}{2}\{\dot{q}\}^T m\{\dot{q}\}, \quad (4.69)$$

e a energia potencial exprime-se por:

$$V = \frac{1}{2}\{q\}^T [k]\{q\}, \quad (4.70)$$

Considere-se agora que

$$\begin{aligned} m_1 = m_2 = I_p, & \quad m_3 = 2I_p, \\ k_1 = k_2 = k_3 = k, & \quad k_4 = 2k, \end{aligned} \quad (4.71)$$

A matriz de inércia torna-se em:

$$[m] = I_p \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad (4.72)$$

e a de rigidez exprime-se por:

$$[k] = k \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}. \quad (4.73)$$

Considere-se agora uma transformação linear dada por:

$$\{q\} = [\beta]\{\eta\}, \quad (4.74)$$

onde a matriz de transformação tem a forma:

$$[\beta] = I_p^{-1/2} - \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0.4959 & 0.6074 & 0.6209 \\ 0.6646 & 0.1949 & -0.7215 \\ 0.3954 & -0.5446 & 0.2171 \end{bmatrix}. \quad (4.75)$$

Calculando a energia cinética obtém-se

$$T = \frac{1}{2} \{\dot{q}\}^T [m] \{\dot{q}\} = \frac{1}{2} \{\dot{\eta}\}^T [\beta]^T [m] [\beta] \{\dot{\eta}\} = \frac{1}{2} \{\dot{\eta}\}^T \{\dot{\eta}\} = \frac{1}{2} (\dot{\eta}_1^2 + \dot{\eta}_2^2 + \dot{\eta}_3^2), \quad (4.76)$$

o que não tem produtos cruzados. Analogamente obtém-se a energia potencial:

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{2} \{q\}^T [k] \{q\} = \frac{1}{2} \{\eta\}^T [\beta]^T [k] [\beta] \{\eta\} = \frac{1}{2} \{\eta\}^T [\omega^2] \{\eta\} = \\ &= \frac{1}{2} (\omega_1^2 \eta_1^2 + \omega_2^2 \eta_2^2 + \omega_3^2 \eta_3^2), \end{aligned} \quad (4.77)$$

onde a matriz diagonal que multiplica as rotações contém o quadrado das frequências naturais de vibração:

$$\omega_1^2 = 0.6595 \frac{k}{m}, \quad \omega_2^2 = 1.6791 \frac{k}{m}, \quad \omega_3^2 = 3.1627 \frac{k}{m}.$$

Com a escolha criteriosa da matriz de transformação foi possível obter

$$[\beta]^T [m] [\beta] = [I] \quad (4.78)$$

$$[\beta]^T [k] [\beta] = [\omega^2] \quad (4.79)$$

Isto foi possível pois a matriz β continha os modos próprios normalizados de forma à matriz de inércia transformada ser a identidade e a matriz de rigidez transformada ser diagonal. A seguir estudar-se-ão os métodos de obter a matriz β a partir do conhecimento das propriedades do sistema.

4.5 Modos próprios de Vibrações

Quando se tem uma transformação de variáveis que torna o sistema de equações de movimento desacopladas, obtém-se configurações do sistema descritas por vectores modais ou modos próprios. A matriz que transforma o sistema naqueles modos é a matriz modal. Dado um sistema arbitrário de equações, os vectores modais obtêm-se resolvendo o problema de valores próprios e vectores próprios.

Considere-se as equações de vibração livre de um sistema:

$$[m] \{\ddot{q}\} + [k] \{q\} = \{0\} \quad (4.80)$$

Procuram-se soluções desta equação que sejam separáveis no tempo:

$$q_i(t) = u_i f(t) \quad (4.81)$$

o que implica que a forma ou modo de deslocamento não varia no tempo, variando só a sua amplitude. Substituindo esta expressão nas equações do movimento, vem:

$$[m] \{u\} \ddot{f}(t) + [k] \{u\} f(t) = \{0\} \quad (4.82)$$

Este sistema representa um conjunto de n equações do tipo:

$$\sum_{j=1}^n m_{ij} u_j \ddot{f}(t) + \sum_{j=1}^n k_{ij} u_j f(t) = 0 \quad , i = 1, 2, \dots, n \quad (4.83)$$

as quais podem ter a variação no tempo e no espaço separadas:

$$-\frac{\ddot{f}(t)}{f(t)} = \frac{\sum k_{ij} u_j}{\sum m_{ij} u_j} \quad , i = 1, 2, \dots, n \quad (4.84)$$

A solução de equações pelo método de separação de variáveis consiste em notar que a igualdade acima indicada só se verifica se aqueles quocientes forem iguais a uma constante positiva representada por ω^2 . Neste caso as duas equações são equivalentes a:

$$\begin{aligned} \ddot{f}(t) + \omega^2 f(t) &= 0 \\ \sum (k_{ij} - \omega^2 m_{ij}) u_j &= 0 \quad , i = 1, 2, \dots, n \end{aligned} \quad (4.85)$$

Escolhendo um valor positivo para ω^2 obtém-se para a primeira equação soluções harmónicas do tipo:

$$f(t) = A \cos(\omega t - \phi) \quad (4.86)$$

em vez de soluções exponenciais. A solução da segunda equação vai ditar se são possíveis todos os valores de ω^2 ou se haverá qualquer limitação. A procura da constante ω^2 para a qual o conjunto das equações homogéneas tem uma solução não-trivial, é um problema de valores característicos ou de valores próprios.

Pondo de parte as soluções triviais em que todos os u_j sejam nulos, o problema pode pôr-se da seguinte forma:

$$[k] \{u\} = \omega^2 [m] \{u\} \quad (4.87)$$

A solução destas equações só é possível quando se anula o determinante característico:

$$\Delta = [k] - \omega^2 [m] = 0 \quad (4.88)$$

Expandindo este determinante obtém-se uma equação algébrica de ordem n em ω^2 com n raízes ou valores próprios. Como as matrizes \underline{k} e \underline{m} são simétricas e positivas definidas, pode demonstrar-se que as raízes da equação são reais e positivas.

A menor das n frequências é denominada fundamental ou frequência própria. Para cada valor de frequência, a amplitude do movimento determina-se da resolução de:

$$[k]\{u\} = \omega_r^2 [m]\{u\} \quad r = 1, 2, \dots, n \quad (4.89)$$

Para cada ω^2 esta equação tem uma solução não trivial representada pelo vector $\{u^{(r)}\}$ chamado vector característico ou vector próprio. O produto de uma constante pelo vector é também solução do problema, pelo que a solução obtida indica a relação entre as amplitudes $k_i^{(r)}$ e não o seu valor absoluto. No entanto, a razão entre as amplitudes determina de forma inequívoca os modos naturais de vibração.

É comum dar um certo valor a um dos elementos de $\{u^{(r)}\}$ e ajustar os outros elementos de forma proporcional. Este processo de normalização produz os modos normais de vibração. É comum normalizar os vectores relativamente a $[m]$ mediante:

$$\{u^{(r)}\}^T [m] \{u^{(r)}\} = 1 \quad (4.90)$$

Os modos naturais têm uma propriedade importante que é a ortogonalidade entre si:

$$\{u^{(r)}\}^T [m] \{u^{(s)}\} = \delta_{rs} \quad (4.91)$$

Para se demonstrar a ortogonalidade dos vectores próprios considera-se o problema de valores próprios correspondente à frequência ω_s :

$$\omega_s^2 [m]\{u^{(s)}\} = [k]\{u^{(s)}\} \quad (4.92)$$

o que tem a mesma forma do que a equação correspondente à frequência ω_r indicada anteriormente. Multiplique-se a primeira por $\{u^{(s)}\}^T$ e a segunda por $\{u^{(r)}\}^T$:

$$\begin{aligned} \omega_r^2 \{u^{(s)}\}^T [m]\{u^{(r)}\} &= \{u^{(s)}\}^T [k]\{u^{(s)}\} \\ \omega_r^2 \{u^{(r)}\}^T [m]\{u^{(s)}\} &= \{u^{(s)}\}^T [k]\{u^{(s)}\} \end{aligned} \quad (4.93)$$

Transpondo-se a última equação e subtraindo da primeira resulta em:

$$(\omega_r^2 - \omega_s^2) \{u^{(s)}\}^T [m]\{u^{(r)}\} = 0 \quad (4.94)$$

tendo em conta que as matrizes \underline{m} e \underline{k} são simétricas.

Quando as frequências são diferentes ($r \neq s$), o produto das matrizes tem de ser zero, o que representa a condição de ortogonalidade. Esta condição também se podia deduzir relativamente à matriz de rigidez em vez da de inércia, como se pode ver no sistema anterior. No entanto, em muitos casos, a matriz de inércia é diagonal, e por isso prefere-se adoptar a normalização relativamente às massas.

Este conjunto de n vectores próprios é completo na medida em que um vector n dimensional representando um possível movimento do sistema, se pode construir por uma

combinação linear daqueles vectores. Por isso, qualquer forma de movimento representa-se por uma sobreposição de modos próprios multiplicados por constantes apropriadas. Estas constantes indicam o grau de participação que cada modo tem no movimento global.

A matriz modal representa-se pela junção dos vectores próprios:

$$[u] = [\{u^{(1)}\}, \{u^{(2)}\}, \dots, \{u^{(n)}\}] \quad (4.95)$$

e o problema de valores próprios pode indicar-se por:

$$[m][u] = [k][u][\omega^{-2}] \quad (4.96)$$

A propriedade de ortogonalidade dos modos utiliza-se para desacopular as equações do movimento do sistema. Considere-se a transformação:

$$\{q(t)\} = [u] \{\eta(t)\} \quad (4.97)$$

que reduz a energia cinética à seguinte expressão:

$$T = \frac{1}{2} \{\dot{q}\}^T [m] \{\dot{q}\} = \frac{1}{2} \{\dot{\eta}\}^T [u]^T [m] [u] \{\dot{\eta}\} = \frac{1}{2} \{\dot{\eta}\}^T \{\dot{\eta}\} \quad (4.98)$$

resultante da normalização dos modos relativamente à matriz de inércia.

A energia potencial por seu lado é:

$$V = \frac{1}{2} \{q\}^T [k] \{q\} = \frac{1}{2} \{\eta\}^T [u]^T [k] [u] \{\eta\} = \frac{1}{2} \{\eta\}^T [\omega^2] \{\eta\} \quad (4.99)$$

Neste caso o sistema de equações torna-se desacoplado:

$$\ddot{\eta}_r(t) + \omega_r^2 \eta_r(t) = 0 \quad r = 1, 2, \dots, n \quad (4.100)$$

onde η_r são as coordenadas normais do sistema, e as frequências naturais satisfazem a relação:

$$\omega_r^2 = \frac{K_{rr}}{M_{rr}} = \frac{\{u^{(r)}\} [k] \{u^{(r)}\}}{\{u^{(r)}\} [m] \{u^{(r)}\}} = \{u^{(r)}\}^T [k] \{u^{(r)}\} \quad (4.101)$$

As soluções são

$$\eta(t) = C_r \cos(\omega_r t - \phi_r) \quad r = 1, 2, \dots, n \quad (4.102)$$

Sobrepondo os movimentos harmónicos conduz a

$$\{q(t)\} = [u] \{\eta(t)\} = \sum_{r=1} C_r \{u^{(r)}\} \cos(\omega_r t - \phi_r) \quad (4.103)$$

Note-se que tanto as frequências como os modos próprios são característicos do sistema, dependendo das propriedades de inércia e rigidez do sistema.

Cada modo natural pode ser excitado independentemente, dependendo das condições iniciais e da frequência da excitação.

4.6 Solução do Problema de Valores Próprios

4.6.1 Método da Iteração Matricial

Este método conduz a um modo próprio de vibração ao fim de cada sequência de iterações. Baseia-se na hipótese que as frequências naturais são distintas, sendo a taxa de convergência afectada quando duas frequências estão muito próximas.

Considere-se o sistema:

$$[D]\{u\} = \frac{1}{\omega^2}\{u\} \quad (4.104)$$

onde a matriz dinâmica D é o produto da matriz de flexibilidade pela de inércia. Premultiplicando um vector inicial u_1 por D produz um outro vector u_2 , o qual é proporcional a u_1 se este fosse um dos vectores próprios. No caso de não o ser, u_2 será utilizado como novo vector inicial e o processo da premultiplicação por D repete-se até que o vector transformado seja proporcional ao vector Inicial. quando se alcança a convergência pela primeira vez, encontrou-se o primeiro modo próprio $u^{(1)}$ e a constante de proporcionalidade é $1/\omega_1^2$.

Segundo o teorema de expansão, qualquer vector u_1 pode representar-se pela combinação linear de vectores próprios:

$$\{u\}_1 = \sum_{r=1}^n C_r \{u^{(r)}\} \quad (4.105)$$

Por outro lado, qualquer vector $u^{(r)}$ premultiplicado pela matriz dinâmica, reproduz-se:

$$\{u\}_2 = [D]\{u\}_1 = \sum_{r=1}^n C_r [D]\{u^{(r)}\} = \sum_{r=1}^n \frac{C_r}{\omega_r^2} \{u^{(r)}\} \quad (4.106)$$

Repetindo o processo chega-se a:

$$\{u\}_p = [D]\{u\}_{p-1} = \sum \frac{C_r}{(\omega_r^2)^{p-1}} \{u^{(r)}\} \quad (4.107)$$

Sendo as frequências diferentes, o aumento do expoente p faz com que a soma fique dominada pelo termo que corresponde à menor frequência, o qual se confunde com o somatório quando se alcançar a convergência. A correspondente frequência é dada por:

$$\frac{u_{p-1}}{u_p} = \omega_1^2 \quad (4.108)$$

A taxa de convergência do método depende da semelhança entre o vector Inicial e o primeiro modo, e também da separação entre as frequências naturais. Quanto maior a separação entre a frequência mais baixa e a seguinte, mais rápida a convergência para o modo mais baixo. Uma grande vantagem do método é que erros de cálculo não conduzem a resultados errados, atrasando somente a convergência.

Para se obter o segundo modo, é necessário utilizar a condição de ortogonalidade relativamente ao primeiro modo:

$$\{u^{(1)}\}^T [m] \{u^{(1)}\} = 0 \quad (4.109)$$

o que se pode escrever:

$$u_1 m_1^{(1)} + u_2 m_2^{(1)} + \dots + u_n m_n^{(1)} = 0 \quad (4.110)$$

Resolvendo em ordem a u_1 obtém-se:

$$u_1 = m_{12}^{(1)} u_2 - m_{13}^{(1)} u_3 - \dots - m_{1n}^{(1)} u_n \quad (4.111)$$

onde $m_{1i}^{(1)} = m_i^{(1)} / m_1^{(1)}$ e $u_i (i = 2, n)$ tem um valor qualquer.

Construa-se agora a matriz:

$$[S^{(1)}] = \begin{bmatrix} 0 & -m_{12}^{(1)} & -m_{13}^{(1)} & \dots & m_{1n}^{(1)} \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \quad (4.112)$$

que permite obter:

$$\{u^{(2)}\}_c = [S^{(1)}] \{u\} \quad (4.113)$$

onde $\underline{u}_c^{(2)}$ é um vector constringido a ser ortogonal ao vector próprio $\{u^{(1)}\}$.

Quando se conduz o processo iterativo para obter o segundo modo, obtém-se então:

$$[D] \{u^{(2)}\}_c = [D][S^{(1)}] \{u\} = [D^{(2)}] \{u\} \quad (4.114)$$

onde a nova matriz dinâmica tem a primeira coluna nula. O processo iterativo com esta matriz leva ao segundo modo.

Para se obter o terceiro modo, é necessário construir uma nova matriz $[S^{(2)}]$ que tem as duas primeiras colunas nulas, o restante da diagonal é igual à unidade e o restante das duas primeiras linhas é dado por:

$$m_{ij}^{(2)} = \frac{m_i^2 m_j^{(1)} - m_i^{(1)} m_j^2}{m_1^{(2)} m_2^{(1)} - m_1^{(1)} m_2^{(2)}}, \quad i = 1, 2, \quad j = 3, 4, \dots, n \quad (4.115)$$

O processo vai-se repetindo mas o método perde precisão com o aumento do grau do modo de vibração. Consegue-se mitigar este problema utilizando sempre um grande número de algarismos significativos.

Consegue-se aumentar o ritmo de convergência fazendo a iteração com a matriz dinâmica elevada ao quadrado, embora o valor próprio que se extrai seja o quadrado da frequência natural. Note-se que se pode convergir para o modo mais elevado premultiplicando os vectores pelo inverso da matriz dinâmica, em vez da própria matriz.

Considere-se que no exemplo da secção 4.5 os rotores e os segmentos de veio que os ligam têm a seguinte inércia e rigidez respectivamente:

$$I_1 = I_2 = I_D, \quad I_3 = 2I_D, \quad (4.116)$$

$$k_1 = k_2 = k_3 = \frac{GJ}{L}, \quad k_4 = 2\frac{GJ}{L}$$

A matriz de flexibilidade que foi anteriormente deduzida para o caso genérico fica agora com a forma:

$$[a] = \frac{L}{7GJ} \begin{bmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 3 & 6 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \quad (4.117)$$

e a matriz de inércia é dada por:

$$[I_p] = \begin{bmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{bmatrix} = I_D \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad (4.118)$$

A matriz dinâmica obtém-se pelo produto da matriz de flexibilidade pela de inércia:

$$[D] = [a][I_p] = \frac{LI_D}{7GJ} \begin{bmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 3 & 6 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \frac{LI_D}{7GJ} \begin{bmatrix} 5 & 3 & 2 \\ 3 & 6 & 4 \\ 1 & 2 & 6 \end{bmatrix}. \quad (4.119)$$

Conhecendo o matriz dinâmica, o problema dos valores próprios fica formulado da seguinte maneira:

$$\begin{bmatrix} 5 & 3 & 2 \\ 3 & 6 & 4 \\ 1 & 2 & 6 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{Bmatrix} = \lambda \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{Bmatrix}, \quad \lambda = \frac{7GJ}{\omega^2 LI_D} \quad (4.120)$$

Iniciando o processo de iteração com o vector com todos os elementos iguais à unidade, vem:

$$\begin{bmatrix} 5 & 3 & 2 \\ 3 & 6 & 4 \\ 1 & 2 & 6 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1.0000 \\ 1.0000 \\ 1.0000 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 10.0000 \\ 13.0000 \\ 9.0000 \end{Bmatrix} = 10.0000 \begin{Bmatrix} 1.0000 \\ 1.3000 \\ 0.9000 \end{Bmatrix} \quad (4.121)$$

Na segunda iteração adopta-se o vector resultante como o vector inicial:

$$\begin{bmatrix} 5 & 3 & 2 \\ 3 & 6 & 4 \\ 1 & 2 & 6 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1.0000 \\ 1.3000 \\ 0.9000 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 10.7000 \\ 14.4000 \\ 9.0000 \end{Bmatrix} = 10.7000 \begin{Bmatrix} 1.0000 \\ 1.3458 \\ 0.8411 \end{Bmatrix} \quad (4.122)$$

Procedendo de forma semelhante em iterações sucessivas, chega-se ao fim de sete iterações a:

$$\begin{bmatrix} 5 & 3 & 2 \\ 3 & 6 & 4 \\ 1 & 2 & 6 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1.0000 \\ 1.3413 \\ 0.7985 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 10.6209 \\ 14.2418 \\ 8.4736 \end{Bmatrix} = 10.6209 \begin{Bmatrix} 1.0000 \\ 1.3409 \\ 0.7978 \end{Bmatrix} \quad (4.123)$$

considerando que nesta iteração já se atingiu a convergência, fica-se assim com o primeiro vector próprio e valor próprio:

$$\{\theta^{(1)}\} = \begin{Bmatrix} 1.0000 \\ 1.3409 \\ 0.7978 \end{Bmatrix}, \quad \lambda_1 = 10.6209 \quad (4.124)$$

Dado que o segundo vector próprio tem de ser ortogonal ao primeiro, tem de satisfazer a seguinte expressão:

$$\{\theta\}^T [I_p] \{\theta^{(1)}\} = I_D \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{Bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1.0000 \\ 1.3409 \\ 0.7978 \end{Bmatrix} = 0, \quad (4.125)$$

Esta equação permite exprimir θ_1 em função de θ_2 e θ_3 :

$$\theta_1 = -1.3409 \theta_2 - 1.5956 \theta_3, \quad (4.126)$$

As restantes coordenadas considera-se não constringidas:

$$\theta_2 = \theta_2, \quad \theta_3 = \theta_3. \quad (4.127)$$

Isto implica que a matriz de varrimento fica com a forma:

$$[S^{(1)}] = \begin{bmatrix} 0 & -1.3409 & -1.5956 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (4.128)$$

A nova equação dinâmica a ser adoptada na procura do segundo vector próprio é:

$$[D^{(2)}] = [D][S^{(1)}] = \frac{LI_D}{7GJ} \begin{bmatrix} 5 & 3 & 2 \\ 3 & 6 & 4 \\ 1 & 2 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1.3409 & -1.5956 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \frac{LI_D}{7GJ} \begin{bmatrix} 0 & -3.7045 & -5.9780 \\ 0 & 1.9773 & -0.7868 \\ 0 & 0.6591 & 4.4044 \end{bmatrix} \quad (4.129)$$

Inicie-se agora o processo de iteração com outro vector inicial:

$$\begin{bmatrix} 0 & -3.7045 & -5.9780 \\ 0 & 1.9773 & -0.7868 \\ 0 & 0.6591 & 4.4044 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.0000 \\ 0.0000 \\ -1.0000 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 5.9780 \\ 0.7868 \\ -4.4044 \end{Bmatrix} = 5.9780 \begin{Bmatrix} 1.0000 \\ 0.1316 \\ -0.7368 \end{Bmatrix} \quad (4.130)$$

Ao fim de onze iterações chega-se a:

$$\begin{bmatrix} 0 & -3.7045 & -5.9780 \\ 0 & 1.9773 & -0.7868 \\ 0 & 0.6591 & 4.4044 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1.0000 \\ 0.3214 \\ -0.8962 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 4.1669 \\ 1.3406 \\ -3.7354 \end{Bmatrix} = 4.1669 \begin{Bmatrix} 1.0000 \\ 0.3217 \\ -0.8964 \end{Bmatrix} \quad (4.131)$$

o que se pode considerar ter convergido para o segundo modo próprio:

$$\{\theta^{(2)}\} = \begin{Bmatrix} 1.0000 \\ 0.3217 \\ -0.8964 \end{Bmatrix}, \quad \lambda_2 = 4.1669 \quad (4.132)$$

É necessário estabelecer agora a condição que o terceiro vector próprio tem de ser ortogonal aos dois primeiros vectores próprios:

$$\{\theta\}^T [I_p] \{\theta^{(1)}\} = I_D \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{Bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1.0000 \\ 1.3409 \\ 0.7978 \end{Bmatrix} = 0, \quad (4.133)$$

$$\{\theta\}^T [I_p] \{\theta^{(2)}\} = I_D \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{Bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1.0000 \\ 0.3217 \\ -0.8964 \end{Bmatrix} = 0,$$

Resolvendo as duas equações em ordem a θ_1 e θ_2 leva a:

$$\theta_1 = 2.8623\theta_3, \quad \theta_2 = -3.3246\theta_3, \quad (4.134)$$

Mantendo a terceira coordenada sem constrangimentos

$$\theta_3 = \theta_3, \quad (4.135)$$

resulta a segunda matriz de varrimento

$$[S^{(2)}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2.8623 \\ 0 & 0 & -3.3246 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (4.136)$$

e a correspondente terceira matriz dinâmica:

$$[D^{(3)}] = [D][S^{(2)}] = \frac{LI_D}{7GJ} \begin{bmatrix} 5 & 3 & 2 \\ 3 & 6 & 4 \\ 1 & 2 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2.8623 \\ 0 & 0 & -3.3246 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \frac{LI_D}{7GJ} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 6.3377 \\ 0 & 0 & -7.3607 \\ 0 & 0 & 2.2131 \end{bmatrix} \quad (4.137)$$

Inicia-se a iteração com um vector arbitrário:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 6.3377 \\ 0 & 0 & -7.3607 \\ 0 & 0 & 2.2131 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.0000 \\ 0.0000 \\ 1.0000 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6.3377 \\ -7.3607 \\ 2.2131 \end{bmatrix} = 6.3377 \begin{bmatrix} 1.0000 \\ -1.1614 \\ 0.3492 \end{bmatrix} \quad (4.138)$$

Do fim de uma iteração obtém-se a convergência:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 6.3377 \\ 0 & 0 & -7.3607 \\ 0 & 0 & 2.2131 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.0000 \\ -1.1614 \\ 0.3492 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.2131 \\ -2.5704 \\ 0.7728 \end{bmatrix} = 2.2131 \begin{bmatrix} 1.0000 \\ -1.1614 \\ 0.3492 \end{bmatrix} \quad (4.139)$$

que indica de imediato o terceiro vector próprio:

$$\{\theta^{(3)}\} = \begin{bmatrix} 1.0000 \\ -1.1614 \\ 0.3492 \end{bmatrix}, \quad \lambda_3 = 2.2131. \quad (4.140)$$

Procede-se agora à normalização dos vectores próprios, satisfazendo a equação:

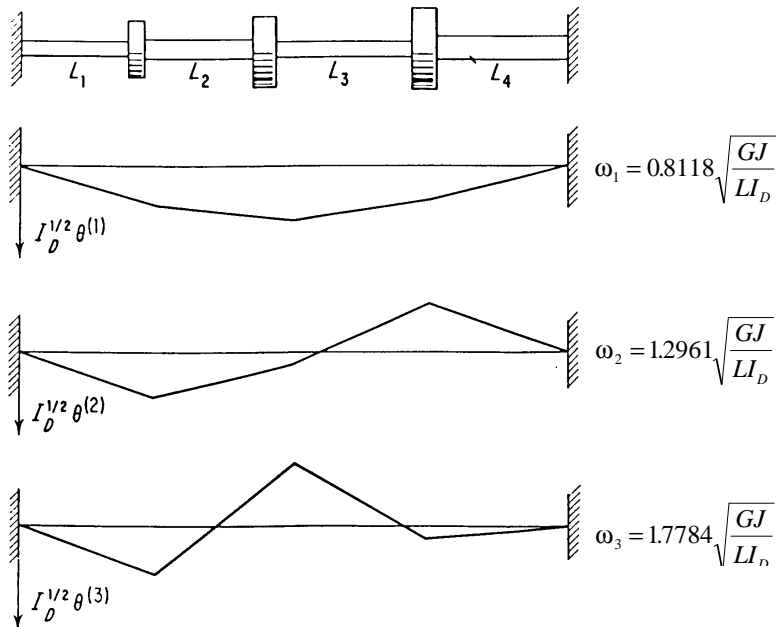
$$\{\theta^{(r)}\}^T [I_p] \{\theta^{(r)}\} = 1, \quad (4.141)$$

o que conduz aos seguintes modos próprios e correspondentes frequências naturais:

$$\{\theta^{(1)}\} = I_D^{-1/2} \begin{Bmatrix} 0.4956 \\ 0.6646 \\ 0.3954 \end{Bmatrix}, \quad \omega_1 = 0.8118 \sqrt{\frac{GJ}{LI_D}},$$

$$\{\theta^{(2)}\} = I_D^{-1/2} \begin{Bmatrix} 0.6075 \\ 0.1954 \\ -0.5445 \end{Bmatrix}, \quad \omega_2 = 1.2961 \sqrt{\frac{GJ}{LI_D}}, \quad (4.142)$$

$$\{\theta^{(3)}\} = I_D^{-1/2} \begin{Bmatrix} 0.6210 \\ -0.7213 \\ 0.2169 \end{Bmatrix}, \quad \omega_3 = 1.7784 \sqrt{\frac{GJ}{LI_D}}.$$



4.6.2 Método de Jacobi

O método de Jacobi é também um método iterativo embora leve à obtenção simultânea de todos os modos próprios do sistema. Baseia-se em rotações sucessivas da matriz de inércia.

Numa situação bidimensional, um sistema de eixos η_r relaciona-se com um sistema $\varepsilon_1 \varepsilon_2$ através de:

$$u_j = \sum_{i=1}^n c_{ji} \cdot F_i \quad (4.143)$$

onde θ é o ângulo entre o sistema de eixos. De uma forma matricial, esta relação pode representar-se por:

$$\{x\} = [R] \{\varepsilon\} \quad (4.144)$$

onde:

$$[R] = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\operatorname{sen} \theta \\ \operatorname{sen} \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \quad (4.145)$$

é a matriz de rotação. Esta matriz tem a propriedade de:

$$[R]^T [R] = [R] [R]^T = [I] \quad (4.146)$$

o que implica que

$$[R]^T = [R]^{-1} \quad (4.147)$$

As transformações lineares que têm a propriedade da matriz transposta ser igual à inversa denominam-se transformações ortonormais.

O método de Jacobi consiste na multiplicação sucessiva por matrizes de rotação que vão transformar uma matriz simétrica numa matriz diagonal, contendo os valores próprios.

Para se aplicar o método é necessário obter as matrizes $\underline{m}^{1/2}$ e $\underline{m}^{-1/2}$. Quando a matriz de inércia é diagonal, este cálculo é simples, pois elevar a matriz a um expoente é equivalente a elevar os elementos da diagonal. Quando \underline{m} não é diagonal, é necessário resolver o problema de valores próprios.

$$[K][u] = [m][u][\omega^2] \quad (4.148)$$

onde \underline{u} é a matriz modal. De um modo geral, denomina-se a matriz modal por \underline{z} e a dos valores próprios que lhe estão associados por γ :

$$[m][z] = [z][\gamma] \quad (4.149)$$

Se os vectores próprios estiverem normalizados, o seu produto será igual à matriz identidade, e o transposto de z é igual ao seu inverso. Posmultiplicando a expressão anterior pelo transposto de \underline{z} resulta em:

$$[m] = [z][\gamma][z]^T \quad (4.150)$$

Donde se pode deduzir que

$$\begin{aligned} [m]^{-1} &= ([z]^T)^{-1} [\gamma]^{-1} [z]^{-1} = [z][\gamma^{-1}][z]^T \\ [m]^{1/2} &= [z][\gamma^{1/2}][z]^T \end{aligned} \quad (4.151)$$

Se por outro lado, se tivesse premultiplicado a equação Inicial tinha-se obtido directamente:

$$[z]^T [m] [z] = [\gamma] \quad (4.152)$$

O objectivo do método de Jacobi é encontrar a matriz \underline{z} que transforme a \underline{m} em $\underline{\gamma}$. Considere-se, então, uma matriz de rotação \underline{R} que só difere da matriz unitária pelos elementos R_{ij} onde $i = p, q$ e $j = p, q$. Estes quatro elementos são iguais aos elementos da matriz de rotação considerada no caso bidimensional. Considere-se agora uma matriz simétrica \underline{a} e denomine-se \underline{b} a que resulta da seguinte transformação:

$$[b] = [R]^T [a] [R] \quad (4.153)$$

A matriz \underline{b} também é simétrica e os seus elementos são dados por:

$$\begin{aligned} b_{jk} &= a_{jk} & j, k \neq p, q \\ b_{pj} &= a_{pj} \cos \theta + a_{qj} \sin \theta & \text{se } j \neq p, q \\ b_{qj} &= -a_{pj} \sin \theta + a_{qj} \cos \theta & \text{se } j \neq p, q \\ b_{pp} &= a_{pp} \cos^2 \theta + 2a_{pq} \sin \theta \cos \theta + a_{qq} \sin^2 \theta \\ b_{qp} &= a_{pq} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) - (a_{pp} - a_{qq}) \sin \theta \cos \theta \\ b_{qq} &= a_{pp} \sin^2 \theta - 2a_{pq} \sin \theta \cos \theta + a_{qq} \cos^2 \theta \end{aligned} \quad (4.154)$$

Deste conjunto de expressões pode demonstra-se que:

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n b_{ij}^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}^2 \quad (4.155)$$

ou seja, a soma dos quadrados de todos os elementos de \underline{b} é igual à dos elementos de \underline{a} . Também se deduz que:

$$\sum_{j=1}^n b_{jj}^2 + 2b_{pq}^2 = \sum_{j=1}^n a_{jj}^2 + 2a_{pq}^2 \quad (4.156)$$

Quando o ângulo θ é escolhido de tal modo que

$$\tan 2\theta = \frac{2a_{pq}}{a_{pp} - a_{qq}} \quad (4.157)$$

o termo b_{pq} anula-se e a expressão anterior fica:

$$\sum_{j=1}^n b_{jj}^2 = \sum_{j=1}^n a_{jj}^2 + 2a_{pq}^2 \quad (4.158)$$

ou seja, a soma dos quadrados dos termos da diagonal de \underline{a} é superior à da diagonal de \underline{b} . Nesta transformação aumentaram-se os elementos da diagonal à custa dos elementos fora da diagonal, já que o somatório do quadrado de todos os elementos se mantém constante.

Por um processo de multiplicações sucessivas chega-se a uma matriz diagonal:

$$\begin{aligned} [m]_0 &= [m]_1 \\ [m]_1 &= [R]_1^T [m]_0 [R]_1 \\ &\vdots \\ [m]_t &= [R]_t^T [m]_{t-1} [R]_t \end{aligned} \quad (4.159)$$

e

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} [m]_t &= \lambda \\ \lim_{t \rightarrow \infty} \prod_{i=1}^n [R]_i &= [z] \end{aligned} \quad (4.160)$$

onde \prod representa o produto das matrizes de rotação. Conhecendo as matrizes \underline{z} e $\underline{\lambda}$ obtém-se facilmente $\underline{m}^{1/2}$ e $\underline{m}^{-1/2}$. Retomando o problema inicial de valores próprios, pode exprimir-se por:

$$[k] [m]^{-1/2} [m]^{1/2} [n] = [m]^{1/2} [n] [\omega^2] \quad (4.161)$$

o que é equivalente a

$$[\tilde{k}] [\tilde{n}] = [\tilde{u}] [\omega^2] \quad (4.162)$$

onde:

$$\begin{aligned} \tilde{k} &= \underline{m}^{-1/2} \cdot \underline{k} \cdot \underline{m}^{1/2} \\ \tilde{u} &= \underline{m}^{1/2} \cdot \underline{u} \end{aligned} \quad (4.163)$$

Esta expressão tem a mesma forma da que serviu de exemplificação do método de Jacobi desde que se substitua \underline{z} por \tilde{u} e \underline{k} por \tilde{k} . Assim, utilizando o procedimento descrito obtém-se as frequências naturais de vibração $\underline{\omega}^2$. A matriz modal que corresponde a estas frequências \underline{u} , obtém-se a partir de \tilde{n} multiplicando por $\tilde{m}^{-1/2}$.

O método de Jacobi pode ser utilizado para procurar os valores e vectores próprios, de uma matriz simétrica de grau elevado. É um método iterativo porque um elemento que se anule numa rotação pode tomar um valor diferente de zero na seguinte. Para que o processo possa convergir adequadamente, é necessário que os ângulos sejam determinados com elevada precisão.

Ao organizar um algoritmo que execute a transformação de Jacobi torna-se necessário decidir quais os elementos fora da diagonal que se vai anular. Uma possibilidade é escolher

sempre o elemento que tiver o valor mais elevado. No entanto este procedimento obriga em cada iteração à procura do maior elemento o que se torna pouco prático.

Outra opção será conduzir o procedimento de forma sistemática aplicando-o a todos os elementos linha a linha e coluna a coluna. O inconveniente deste sistema é que se estará a tentar reduzir a zero elementos que já sejam muito próximos de zero.

O procedimento mais eficaz talvez seja a aplicação sistemática do método sujeito a uma condição limite que estabelece o valor mínimo do elemento fora da diagonal para que possa servir de base da rotação. Um valor típico deste número na iteração será 10^{-2m} .

Quando os elementos fora da diagonal têm um valor elevado, a taxa de convergência é pequena. Neste caso podem utilizar-se outros métodos que em vez de transformar a matriz de rigidez numa matriz tridiagonal ou seja uma matriz em que os elementos da diagonal principal, da que se encontra acima e da que está abaixo não sejam nulos. É depois necessário recorrer a métodos de solução destas equações como por exemplo o de Householder.

Para resolver pelo método de Jacobi o exemplo que tem vindo a ser estudado, considere-se o problema de valores próprios

$$[\bar{k}][\theta] = [I_p][\theta][\omega^2], \quad (4.164)$$

onde a matriz de rigidez é dada por

$$[k] = \frac{GJ}{L} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}, \quad (4.165)$$

e a matriz de inércia é:

$$[I_p] = I_D \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad (4.166)$$

Dado que a matriz de inércia é diagonal, é fácil obter:

$$[I_p]^{-1/2} = I_D^{-1/2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}, \quad (4.167)$$

A matriz de rigidez pode assim ser transformada,

$$[\bar{k}] = [I_p]^{-1/2} [k] [I_p]^{-1/2} = \frac{GJ}{LI_D} \begin{bmatrix} 2.0000 & -1.0000 & 0 \\ -1.0000 & 2.0000 & -0.7071 \\ 0 & -0.7071 & 1.5000 \end{bmatrix} \quad (4.168)$$

Definindo-se as novas variáveis,

$$[\bar{\theta}] = [I_p]^{1/2} [\theta], \quad (4.169)$$

o problema de modos próprios reduz-se a:

$$[\bar{k}][\bar{\theta}] = [\bar{\theta}][\omega^2], \quad (4.170)$$

ou então

$$[\bar{\theta}]^T [\bar{k}][\bar{\theta}] = [\omega^2], \quad (4.171)$$

Para determinar a matriz de ω^2 é necessário diagonalizar a matriz de rigidez. Para determinar o ângulo φ de rotação da matriz, começa-se por eliminar o termo k_{12} , rodando a matriz um ângulo φ_1 :

$$\tan 2\varphi_1 = \frac{2\bar{k}_{12}}{\bar{k}_{11} - \bar{k}_{22}} = \frac{2(-1.0000)}{2.0000 - 2.0000} = \pm\infty \rightarrow \varphi_1 = \frac{3\pi}{4}, \quad (4.172)$$

A primeira matriz de rotação vem então:

$$[R]_1 = \begin{bmatrix} -0.7071 & -0.7071 & 0 \\ 0.7071 & 0.7071 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (4.173)$$

e aplicando-a à matriz de rigidez resulta em:

$$[\bar{k}]_1 = [R]_1^T [\bar{k}] [R]_1 = \frac{GJ}{LI_D} \begin{bmatrix} 3.000 & 0 & -0.5000 \\ 0 & 1.0000 & 0.5000 \\ -0.5000 & 0.5000 & 1.5000 \end{bmatrix}, \quad (4.174)$$

Para eliminar agora vem k_{13} obtém-se um ângulo de $\varphi_2 = 163^\circ 09'$ e a segunda matriz de rotação vem:

$$[R]_2 = \begin{bmatrix} -0.9571 & 0 & -0.2899 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0.2899 & 0 & -0.9571 \end{bmatrix}, \quad (4.175)$$

Aplicando esta rotação à última matriz de rigidez resulta em:

$$[\bar{k}]_2 = [R]_2^T [\bar{k}]_1 [R]_2 = \frac{GJ}{LI_D} \begin{bmatrix} 3.1516 & 0.1450 & 0 \\ 0.1450 & 1.0000 & -0.4786 \\ 0 & -0.4786 & 1.3485 \end{bmatrix}. \quad (4.176)$$

É necessário promover mais quatro rotações com as seguintes matrizes

$$[R]_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -0.5736 & -0.8192 \\ 0 & 0.8192 & -0.5736 \end{bmatrix}, \quad [R]_4 = \begin{bmatrix} -0.9989 & 0 & -0.0477 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0.0477 & 0.81920 & -0.9989 \end{bmatrix}, \quad (4.177)$$

$$[R]_5 = \begin{bmatrix} 0.9984 & -0.0561 & 0 \\ 0.0561 & 0.9984 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad [R]_6 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1.0000 & -0.0039 \\ 0 & 0.0039 & 1.0000 \end{bmatrix} \quad (4.178)$$

A última rotação produz uma matriz diagonal com as frequências próprias do sistema:

$$[\omega^2] \cong [R]_6^T [\bar{K}]_5 [R]_6 = \frac{GJ}{LI_d} \begin{bmatrix} 3.1619 & 0 & 0 \\ 0 & 1.6789 & 0 \\ 0 & 0 & 0.6594 \end{bmatrix} \quad (4.179)$$

O produto de todas as rotações dá a rotação global a aplicar às coordenadas.

$$[\bar{\theta}] = \prod_{i=1}^6 [R]_i = \begin{bmatrix} -0.6209 & 0.6074 & -0.4959 \\ 0.7215 & 0.1949 & -0.6646 \\ -0.3070 & -0.7702 & -0.5592 \end{bmatrix} \quad (4.180)$$

Normalizando agora por $I_p^{-1/2}$ conduz à matriz modal:

$$[\theta] = [I_p]^{-1/2} [\bar{\theta}] = I_D^{-1/2} \cdot \begin{bmatrix} -0.6209 & 0.6074 & -0.4959 \\ 0.7215 & 0.1949 & -0.6646 \\ -0.2171 & -0.5446 & -0.3954 \end{bmatrix} \quad (4.181)$$

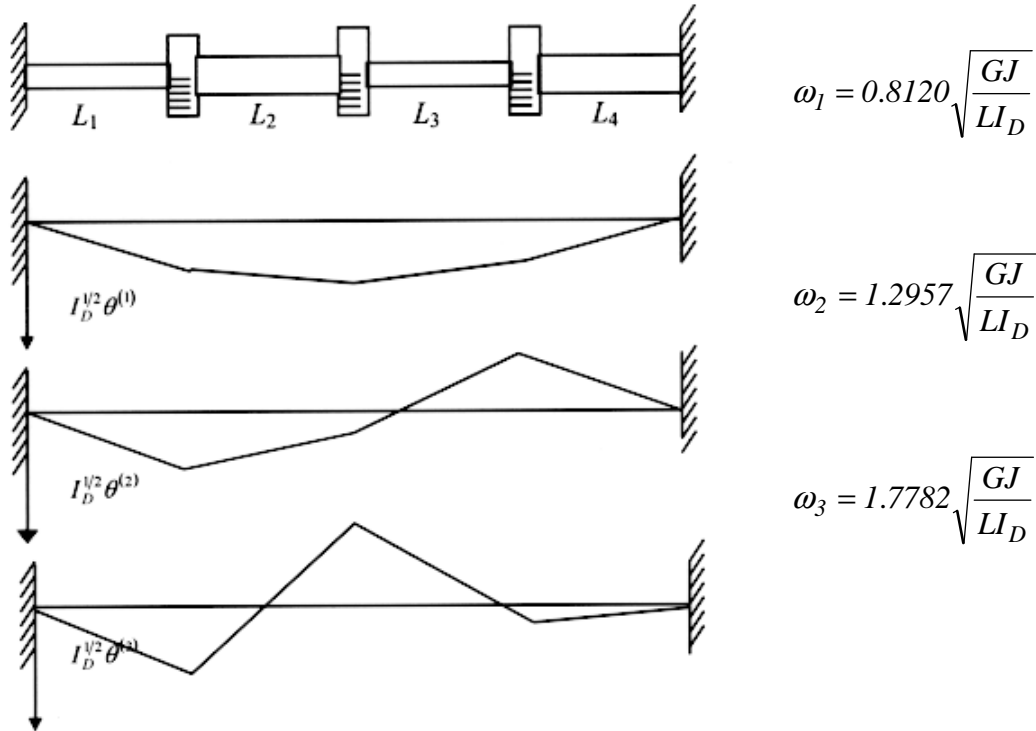
os três modos do sistema são então:

$$\{\theta^{(1)}\} = I_D^{-1/2} \cdot \begin{bmatrix} 0.4959 \\ 0.6646 \\ 0.3954 \end{bmatrix} \quad \omega_1 = 0.8120 \sqrt{\frac{GJ}{LI_D}}, \quad (4.182)$$

$$\{\theta^{(2)}\} = I_D^{-1/2} \cdot \begin{bmatrix} 0.6074 \\ 0.1949 \\ -0.5446 \end{bmatrix} \quad \omega_2 = 1.2957 \sqrt{\frac{GJ}{LI_D}}, \quad (4.183)$$

$$\{\theta^{(3)}\} = I_D^{-1/2} \cdot \begin{bmatrix} 0.6209 \\ 0.7215 \\ 0.2171 \end{bmatrix} \quad \omega_3 = 1.7782 \sqrt{\frac{GJ}{LI_D}}, \quad (4.184)$$

Note-se que a nível de frequências naturais estes valores só diferem do obtidos pelo método da iteração matricial na quarta casa decimal.



4.7 Cociente de Rayleigh

Considere-se um problema de valores próprios na forma:

$$[k]\{u\} = \lambda[m]\{u\} \tag{4.185}$$

onde \underline{k} e \underline{m} são matrizes simétricas. Esta equação é satisfeita por um valor próprio λ_r e um vector próprio $\underline{u}^{(r)}$. Prémultiplicando ambos os termos pelo transposto do vector próprio obtém-se:

$$\lambda_r = \frac{\{u^{(r)}\}^T [k] \{u^{(r)}\}}{\{u^{(r)}\}^T [m] \{u^{(r)}\}} \quad , = 1, 2, \dots, n \tag{4.186}$$

Este resultado que já tinha sido obtido anteriormente, é a base de um tratamento aproximado que consiste em utilizar um vector qualquer \underline{u} para se obter um valor aproximado do valor próprio:

$$\omega^2 = R(u) = \frac{\{u\}^T [k] \{u\}}{\{u\}^T [m] \{u\}} \tag{4.187}$$

onde o valor do cociente de Rayleigh $R(u)$ depende do vector \underline{u} que for utilizado.

Considere-se a representação de um vector arbitrário \underline{u} em termos dos modos próprios:

$$\{u\} = \sum_{r=1}^n C_r \{u^{(r)}\} = [u] \{C\} \quad (4.188)$$

Se os modos próprios estiverem normalizados, o cociente de Rayleigh vem:

$$R(u) = \frac{\{C\}^T [u]^T [k] [u] \{C\}}{\{C\}^T [u]^T [m] [u] \{C\}} = \frac{\{C\}^T [\lambda] \{C\}}{\{C\}^T [I] \{C\}} = \frac{\sum C_i^2 \lambda_i}{\sum C_i^2} \quad (4.189)$$

Quando o vector \underline{u} é semelhante ao vector próprio $\underline{u}^{(r)}$, o coeficiente C_r é muito superior aos restantes coeficientes, podendo indicar-se:

$$\left| \frac{C_i}{C_r} \right| = \varepsilon_i \ll 1 \quad i \neq r \quad (4.190)$$

onde ε_i é um número pequeno. Dividindo ambos os termos da fracção por C_r^2 vem:

$$R(u) = \frac{\lambda_r + \sum_{i \neq r} \varepsilon_i^1 \lambda_i}{1 + \sum_{i \neq r} \varepsilon_i^1} = \lambda_r \{1 + 0(\varepsilon^2)\} \quad (4.191)$$

onde $0(\varepsilon^2)$ representa um conjunto de termos de ordem igual ou superior a ε^2 . Esta expressão indica que quando o vector utilizado difere do vector próprio por uma pequena quantidade ε , a razão de Rayleigh difere do correspondente valor próprio de uma pequena grandeza de segunda ordem. Isto indica que a razão de Rayleigh tem um valor estacionário na vizinhança de um vector próprio. Este valor é mesmo um mínimo na vizinhança do modo principal.

Substituindo $r = 1$ na expressão anterior vem:

$$R(u) \frac{\lambda_1 + \sum_2^n \varepsilon_i^2 \lambda_i}{1 + \sum_2^n \varepsilon_i^2} \approx \lambda_1 + \sum_2^n \varepsilon_i^2 \lambda_i - \lambda_1 \sum_2^n \varepsilon_i^2 = \lambda_1 + \sum_2^n (\lambda_i - \lambda_1) \varepsilon_i^2 \quad (4.192)$$

como o primeiro valor próprio é o menor de todos, conclui-se que o cociente de Rayleigh nunca é inferior ao primeiro valor próprio:

$$R(u) \geq \lambda_1 \quad (4.193)$$

Por outro lado, aplicando o mesmo procedimento ao ultimo modo, $r = n$ demonstra-se que

$$R(n) \leq \lambda_n \quad (4.194)$$

ou seja, o cociente nunca é superior ao maior valor próprio. Estes resultados permitem concluir que o cociente de Rayleigh pode ser utilizado para determinar os limites superior e inferior dos valores próprios de um sistema.

4.8 Sistemas Sem Restrições

Há sistemas que não têm número suficiente de restrições ou de apoios, o que permite que a energia potencial seja zero, sem que o movimento seja nulo, e sem que esta condição corresponda a uma situação de equilíbrio.

Considere-se um problema de valores próprios:

$$\omega^2 [m] \{u\} = [k] \{u\} \quad (4.195)$$

e premultiplique-se ambos os termos pelo transposto de $\{u\}$:

$$\omega^2 \{u\}^T [m] \{u\} = \{u\}^T [k] \{u\} \quad (4.196)$$

Denominando por $\{u^{(0)}\}$ o vector que torna nula a energia potencial:

$$V = \frac{1}{2} \{u^{(0)}\}^T [k] \{u^{(0)}\} \quad (4.197)$$

a equação anterior resulta em:

$$\omega_0^2 \{u^{(0)}\}^T [m] \{u^{(0)}\} = 0 \quad (4.198)$$

o que implica que $\omega_0 = 0$, pois o produto dos deslocamentos pela massa, é sempre positivo. Este modo zero, ao qual corresponde uma frequência nula, corresponde a um movimento rígido do corpo. É por exemplo o caso dos movimentos de um navio provocados pela acção das ondas.

Considere-se como exemplo, as massas m_1 , m_2 e m_3 apoiadas em rolamentos e unidas pelas molas k_1 e k_2 . Não havendo mais restrições, se todas as massas se deslocarem horizontalmente a mesma distância, não se desenvolvem forças nas molas.

A energia cinética deste sistema é dada por:

$$T = \frac{1}{2} (m_1 \dot{x}_1^2 + m_2 \dot{x}_2^2 + m_3 \dot{x}_3^2) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix}^T \begin{vmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{vmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{Bmatrix} \quad (4.199)$$

e a energia potencial é:

$$V = \frac{1}{2} \{[k_1(x_2 - x_1)^2 + k_2(x_3 - x_2)^2]\} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}^T \begin{vmatrix} k_1 & -k_1 & 0 \\ -k_1 & k_1 + k_2 & -k_2 \\ 0 & -k_2 & k_2 \end{vmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} \quad (4.200)$$

Estas expressões indicam que a energia cinética é sempre positiva, mas que a energia potencial é nula quando:

$$x_1 = x_2 = x_3 = x_0 \quad (4.201)$$

o que representa um movimento de corpo rígido, ou seja, as distâncias entre as massas não se alteram.

Qualquer outro modo próprio do sistema tem de ser ortogonal ao modo de corpo rígido, ou seja,

$$\{u^{(0)}\}^T [m]\{x\} = 0 \quad (4.202)$$

o que implica que a condição de ortogonalidade é:

$$(m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3) = 0 \quad (4.203)$$

o que resulta de dividir todos os termos x_0 por o elemento único no vector $\underline{u}^{(0)}$. Esta equação restringe uma das coordenadas em função das outras duas:

$$x_3 = -\frac{m_1}{m_3} x_1 - \frac{m_2}{m_3} x_2 \quad (4.204)$$

Representando o efeito desta restrição por uma matriz:

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix}_r = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -\frac{m_1}{m_3} & -\frac{m_2}{m_3} \end{vmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} \quad (4.205)$$

Denominando a matriz de 3×2 como matriz de restrição, podem representar-se as coordenadas do sistema restringido em função das coordenadas independentes:

$$\{x\}_r = [r]\{x\} \text{ e } \{x\}_r^T = \{x\}^T [r]^T \quad (4.206)$$

A energia do sistema fica dada por:

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \{\dot{x}\}_r^T [m]\{\dot{x}\}_r = \frac{1}{2} \{\dot{x}\}^T [r]^T [m][r]\{x\} = \frac{1}{2} \{\dot{x}\}^T [\tilde{m}]\{\dot{x}\} \\ V &= \frac{1}{2} \{x\}_r^T [k]\{x\}_r = \frac{1}{2} \{x\}^T [r]^T [k][r]\{x\} = \frac{1}{2} \{x\}^T [\tilde{k}]\{x\} \end{aligned} \quad (4.207)$$

onde as matrizes \tilde{m} e \tilde{k} são matrizes simétricas que resultam da pré e pós multiplicação das matrizes de inércia e de rigidez pela matriz de restrição.

O problema de valores próprios passa então a ser:

$$\omega_2[\tilde{m}]\{x\} = [\tilde{k}]\{x\} \quad (4.208)$$

onde os movimentos de corpo rígido já foram retirados. Os vectores próprios $\underline{x}^{(1)}$ e $\underline{x}^{(2)}$ que resultam da resolução daquele problema só indicam o movimento das massas m_1 e m_2 . A descrição completa do movimento obtém-se pelo recurso à matriz de restrição:

$$\{x\}_r = [r]\{x\} \quad (4.209)$$

a qual irá multiplicar os vectores próprios.

Modos Próprios em Sistemas com Amortecimento Viscoso

Num sistema com n graus de liberdade, as energias cinéticas e potencial são dadas por:

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \sum_i \sum_j m_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j \\ V &= \frac{1}{2} \sum_i \sum_j k_{ij} q_i q_j \end{aligned} \quad (4.210)$$

onde m_{ij} e k_{ij} são os coeficientes de inércia e de rigidez, os quais são simétricos. Havendo forças não-conservativas associadas com a fricção que se origina com o movimento pode definir-se uma função de dissipação:

$$F = \frac{1}{2} \sum_i \sum_j c_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j \quad (4.211)$$

a qual também é positiva definida.

Para este sistema, as equações de Lagrange tomam a forma:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_r} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_r} + \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_r} + \frac{\partial V}{\partial q_r} = Q_r \quad (4.212)$$

onde Q_r são as forças generalizadas que actuam no sistema. Substituído as três expressões Iniciais nas equações de Lagrange conduz a:

$$[m]\{\ddot{q}\} + [c]\{\dot{q}\} + [k]\{q\} = \{Q\} \quad (4.213)$$

onde as matrizes \underline{m} , \underline{c} e \underline{k} são simétricas e positivas.

Considere-se agora a transformação linear

$$\{q\} = [u]\{\eta\} \quad (4.214)$$

onde

$$[C] = [u]^T [c] [u] \quad (4.215)$$

é uma matriz simétrica, mas não é diagonal. A transformação modal elimina os produtos cruzados nas expressões das energias cinética e potencial, mas não faz o mesmo na função de dissipação. Só no caso especial em que a matriz de amortecimento \underline{c} é uma combinação linear das matrizes de inércia e de rigidez, é que a matriz \underline{C} é uma matriz diagonal e as equações do movimento são desacopladas.

O desacoplamento das equações também pode obter-se em condições mais gerais, embora na maioria dos casos, tal não seja possível. No entanto, quando os coeficientes de amortecimento são pequenos, pode obter-se uma aproximação razoável, utilizando a matriz modal para as transformações e ignorando os termos fora da diagonal, na matriz de amortecimento.

Considere-se então, a matriz \underline{C} dada por:

$$[u]^T [c] [u] = [C] \equiv [2\zeta\omega] \quad (4.216)$$

onde ζ_r são os factores de amortecimento.

As equações desacopladas exprimem-se então por:

$$\ddot{\eta}_r(t) + 2\zeta_r \omega_r \dot{\eta}_r(t) + \omega_r^2 \eta_r(t) = N_r(t), r = 1, 2, \dots, n \quad (4.217)$$

onde N_r são as forças generalizadas. A solução de cada coordenada será:

$$\begin{aligned} \eta_r(t) = & \frac{1}{\omega_{rd}} \int_0^t N_r(\tau) \exp\{-\zeta_r \omega_r(t - \tau)\} \text{sen} \omega_{rd}(t - \tau) d\tau + \\ & + \exp(\zeta_r \omega_{rd} t) \left\{ \cos \omega_{rd} t + \frac{\zeta_r}{(1 - \zeta_r^2)} \text{sen} \omega_{rd} t \right\} \eta_{rd}(0) + \\ & + \left\{ \frac{1}{\omega_{rd}} \exp(-\zeta_r \omega_r t) \text{sen} \omega_{rd} t \right\} \dot{\eta}_r(0) \end{aligned} \quad (4.218)$$

onde o primeiro termo representa a resposta forçada e os dois últimos, a resposta transiente resultante do deslocamento e velocidade iniciais $\eta(0)$ e $\dot{\eta}(0)$.

5. ANÁLISE DINÂMICA DE SISTEMAS CONTÍNUOS

A representação dos componentes estruturais por um conjunto de massas que não se deformam e de molas que não têm massa, consiste numa simplificação da realidade, a qual é, no entanto, adequada em muitos casos. A representação das estruturas por sistemas discretos permite uma resolução mais simples do que no caso de modelos contínuos. No entanto, estes últimos permitem soluções mais precisas, e quando a geometria do componente não é muito irregular, as soluções têm um grau de complexidade aceitável.

Seguidamente, estudar-se-á o comportamento de peças prismáticas, nomeadamente de barras, cabos, vigas e veios, ou seja, de peças sujeitas exclusivamente a forças axiais, a esforços de flexão e à torção.

5.1 Vibrações Transversais de Cabos

Quando uma peça prismática executa movimentos transversais, as suas forças de restituição podem resultar da tensão axial ou da rigidez de flexão. Na secção anterior estudou-se o caso em que a força axial era nula. Estuda-se, agora, o caso de um cabo no qual se pode desprezar a rigidez de flexão.

Considere-se um elemento de um cabo sujeito a uma tracção $T(x)$ e a uma força exterior transversal por unidade de comprimento $p(t,x)$, sendo $m(x)$ a massa por unidade de comprimento no ponto x ao longo do cabo. Assuma-se que o deslocamento transversal é pequeno, e estabeleça-se a equação do movimento, agora com o recurso às condições de equilíbrio e à segunda lei de Newton:

$$\left\{ T(x) + \frac{\partial T(x)}{\partial x} dx \right\} \left\{ \frac{\partial z(x,t)}{\partial x} + \frac{\partial^2 z(x,t)}{\partial x^2} \right\} + p(x,t)dx - T(x) \frac{\partial z(x,t)}{\partial x} = m(x) dx \frac{\partial^2 z(x,t)}{\partial t^2} \quad (5.1)$$

o que se reduz a:

$$p(x,t) + \frac{\partial}{\partial x} \left\{ T(x) \frac{\partial z(x,t)}{\partial x} \right\} = m(x) \frac{\partial^2 z(x,t)}{\partial t^2} \quad (5.2)$$

Se o cabo estiver fixo em $x = 0$ e livre em $x = L$, as condições de fronteira aplicáveis são:

$$z(0,t) = 0 \quad (5.3)$$

$$T(x) \frac{dZ(x)}{dx} \Big|_{x=L} = 0 \quad (5.4)$$

onde a última representa a anulação da componente transversal da força. Note-se que a primeira condição é do tipo geométrico e a segunda do tipo natural, conforme resultariam da aplicação do princípio de Hamilton.

Procede-se à procura da solução novamente por separação de variáveis:

$$z(x, t) = Z(x) f(t) \quad (5.5)$$

o que introduzindo na forma homogénea ($p=0$) da equação 5.1 conduz a:

$$\frac{\partial^2 z(x, t)}{\partial t^2} = -\omega^2 Z(x) f(t) \quad (5.6)$$

e

$$-\frac{d}{dx} \left\{ t(x) \frac{dZ(x)}{dx} \right\} = \omega^2 m(x) Z(x) \quad (5.7)$$

Esta ultima equação tem de ser satisfeita no domínio o a L e a solução tem de satisfazer as condições de fronteira que derivam de 5.3 e 5.4:

$$z(0) = 0 \quad (5.8)$$

$$T(x) \frac{dZ(x)}{dx} \Big|_{x=L} = 0 \quad (5.9)$$

Estude-se agora o caso particular de um cabo uniforme ($m = \text{constante}$), sujeito a uma tracção constante em ambos os extremos. Neste caso, a eqn. 5.7 reduz-se a

$$\frac{d^2 Z(x)}{dx^2} + \lambda^2 Z(x) = 0 \quad (5.10)$$

onde $\lambda^2 = \omega^2 m / T$. Considere-se agora a situação em que o cabo está fixo em ambos os extremos, ou seja, em que $Z(0) = Z(L) = 0$. A solução geral da equação tem a forma

$$Z(x) = C_1 \text{sen } \lambda x + C_2 \text{cos } \lambda x$$

Aplicação das condições de fronteira a esta solução implica que $C_2 = 0$ e que

$$\text{sen } \lambda L = 0 \quad (5.11)$$

o que representa a equação característica, o equivalente do determinante característico dos sistemas discretos.

A eqn. 5.40 tem um numero infinito de soluções do tipo $\lambda_r = r\pi / L$, às quais correspondem frequências naturais do tipo:

$$\omega_r = \lambda_r (T/mL^2)^{1/2} \quad , r = 1, 2, \dots \quad (5.12)$$

A frequência mais baixa é a fundamental e as outras são as harmónicas mais elevadas. As funções características que correspondem a estas frequências têm a forma:

$$Z_r(x) = A_r \operatorname{sen} r\pi \frac{x}{L} \quad (5.13)$$

Estas funções constituem uma família ortogonal. Se forem normalizadas de acordo com a condição:

$$\int_0^L m Z_r^2(x) dx = 1 \quad , r = 1, 2, \dots \quad (5.14)$$

obtém-se a expressão dos modos normalizados:

$$Z_r(x) = \left(\frac{2}{mL} \right)^{1/2} \operatorname{sen} r\pi \frac{x}{L} \quad , r = 1, 2, \dots \quad (5.44)$$

Os nodos destes modos, ou seja, os pontos em que o deslocamento transversal é nulo encontram-se em $x = n(L/r)$ onde $n = 1, 2, \dots, r-1$. Excluindo os pontos extremos de fixação do cabo, cada modo tem $r-1$ nodos.

Note-se que a forma dos modos normais é definida pela função seno na eqn. 5.15 e, portanto, é independente da tracção e da massa por unidade de comprimento. No entanto, a frequência natural (eqn. 5.12) aumenta com a tracção e diminui com o aumento da massa ou do comprimento do cabo.

5.2 Vibrações Longitudinais de Barras

Considere-se agora uma peça prismática encastrada em balanço. A equação do movimento longitudinal, que foi deduzida na secção 3.4.2 é:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left\{ E \cdot A(x) \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \right\} = m(x) \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} \quad (5.16)$$

onde u é o deslocamento segundo o eixo dos x , o qual tem de satisfazer a condição de fronteira:

$$\left(E \cdot A \frac{\partial u}{\partial x} \right) \delta u \Big|_0^L = 0 \quad (5.17)$$

No caso da barra encastrada em $x = 0$ e livre em $x = 1$, esta condição transforma-se em:

$$u(0,t) = 0 \quad (5.18)$$

$$E \cdot A(L) \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \Big|_{x=L} = 0 \quad (5.19)$$

Note-se que a forma desta equação e das condições de fronteira é a mesma do caso anterior. Estudando aqui o caso da viga em balanço, a equação dos valores próprios fica com a forma:

$$-\frac{d}{dx} \left\{ E \cdot A(x) \frac{dU(x)}{dx} \right\} = \omega^2 m(x) U(x) \quad (5.20)$$

No caso de uma barra uniforme a solução desta equação toma a forma:

$$U(x) = C_1 \text{sen} \lambda x + C_2 \text{cos} \lambda x \quad (5.21)$$

Aplicando a condição 5.18 resulta que $C_2 = 0$ e da condição 5.19 obtém-se a equação característica:

$$\text{cos} \lambda L = 0 \quad (5.22)$$

a qual tem valores próprios dados por

$$\lambda_r = (2r - 1) \frac{\pi}{2L}, \quad r = 1, 2, \dots, \quad (5.23)$$

aos quais correspondem as frequências naturais

$$\omega_r = \lambda_r (EA/m)^{1/2} = (2r - 1) \frac{\pi}{2} (EA/mL^2)^{1/2} \quad (5.24)$$

As correspondentes funções características são:

$$U_r(X) = A_r \text{sen} \left((2r - 1) \frac{\pi}{2} \frac{x}{L} \right), \quad r = 1, 2, \dots \quad (5.25)$$

as quais podem ser normalizadas com a condição:

$$\int_0^L m U_r^2(x) dx = 1, \quad r = 1, 2, \dots \quad (5.26)$$

donde se obtém a forma final:

$$U_r(x) = \left(\frac{2}{mL} \right)^{1/2} \text{sen} \left((2r - 1) \frac{\pi}{2} \frac{x}{L} \right) \quad (5.27)$$

Neste caso os $(r-1)$ nodos de cada modo encontram-se nos pontos definidos por

$$x = n \left\{ \frac{2L}{(2r - 1)} \right\} \quad (5.28)$$

Considere-se agora o caso particular de uma barra com as duas extremidades livres, onde se tem de satisfazer a seguinte condição de fronteira:

$$E.A(x) \frac{dU(x)}{dx} = 0 \quad \text{em } x = 0 \text{ e } L \quad (5.29)$$

Neste caso estamos em presença de um sistema sem restrições, o que permite a existência de uma solução de movimento de corpo rígido. Aplicando as condições de fronteira à solução geral (eqn. 5.21), obtém-se $C_1 = 0$ e a equação característica é

$$\text{sen } \lambda L = 0$$

a qual tem como valores próprios

$$\lambda_r = r \frac{\pi}{L}, \quad r = 1, 2, \dots \quad (5.30)$$

onde $\lambda_0 = 0$ também satisfaz a equação e corresponde ao movimento de corpo rígido.

Quando $\lambda = 0$ a (eqn. 5.20) transforma-se em

$$\frac{d^2U(x)}{dx^2} = 0 \quad (5.31)$$

o que tem como solução:

$$U_0(x) = A_0 + B_0x \quad (5.32)$$

Aplicação das condições de fronteira e esta solução, implica que $B_0 = 0$, resultando que o deslocamento da barra é constante e independente de x , ou seja, é um movimento de corpo rígido. A força longitudinal da barra é dada por:

$$F(t) = \int_0^L m(x) \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} dx = \ddot{f}(t) \int_0^L m(x) U(x) dx = 0 \quad (5.33)$$

e é nula pois não há forças a actuar na barra.

As funções características que correspondem aos valores próprios correspondentes a $r > 0$ na (eqn. 5.30) são:

$$U_r(x) = A_r \cos r\pi \frac{x}{L}, \quad r = 1, 2, \dots \quad (5.34)$$

5.2.1 Vibrações Torsionais de Barras

Considere-se agora uma barra não uniforme e defina-se o eixo dos x ao longo do seu eixo neutro. Assuma-se que a forma das secções transversais e a falta de uniformidade da barra são de molde a que o movimento possa ser considerado rotação, sem empeno. Quando a secção deixa de ser circular, as secções transversais ficam sujeitas a um empeno durante a rotação. Para além disso, desde que as secções transversais não sejam uniformes ao longo da barra, os deslocamentos deixam de ser proporcionais à distância ao eixo de rotação.

Num elemento de barra, de comprimento dx , o momento torsor M_T que corresponde à deformação angular θ é dado por:

$$M_T(x, t) = G \cdot J(x) \frac{\partial \theta(x, t)}{\partial x} \quad (5.35)$$

onde GJ é a rigidez torsional. Estabelecendo as condições de equilíbrio, a equação do movimento é:

$$\frac{M_T(x, t)}{\partial x} + m_T(x, t) = I(x) \frac{\partial^2 \theta(x, t)}{\partial t^2} \quad (5.36)$$

onde $I(x)$ é o momento polar de inércia da massa por unidade de comprimento e M_T o momento torsor externo por unidade de comprimento. Substituindo a expressão do momento torsor (5.63) obtém-se a equação do movimento:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left\{ G \cdot J(x) \frac{\partial \theta(x, t)}{\partial x} \right\} + m_T(x, t) = I(x) \frac{\partial^2 \theta(x, t)}{\partial t^2} \quad (5.37)$$

Estuda-se agora o caso de um veio encastrado num extremo e com um disco rígido no outro extremo. No extremo $x = 0$, a condição de fronteira aplicável é:

$$\theta(0, t) = 0 \quad (5.38)$$

e no outro extremo que está no balanço,

$$G \cdot J(x) \frac{\partial \theta(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=L} = -I_D \frac{\partial^2 \theta(x, t)}{\partial t^2} \Big|_{x=L} \quad (5.39)$$

onde I_D é o momento polar de inércia da massa concentrada no extremo.

Adoptando uma solução do tipo

$$\theta(x, t) = \theta(x) f(t) \quad (5.40)$$

transforma-se o problema de valores próprios na seguinte equação diferencial:

$$-\frac{d}{dx} \left\{ G \cdot J(x) \frac{d\theta(x)}{dx} \right\} = \omega^2 I(x) \theta(x) \quad (5.41)$$

No caso de uma barra uniforme a eqn. 5.65 reduz-se a:

$$\frac{d^2\theta(x)}{dx^2} + \lambda^2 \theta(x) = 0 \quad (5.42)$$

onde $\lambda^2 = \omega^2 I/GJ$. A solução tem a forma:

$$\theta(x) = C_1 \text{ sen } \lambda x + C_2 \text{ cos } \lambda x \quad (5.43)$$

Aplicando as condições de fronteira a esta solução obtém-se $C_2 = 0$ e:

$$\tan \lambda L = \frac{IL}{I_D} \frac{I}{\lambda L} \quad (5.44)$$

As soluções desta equação em λL têm de ser obtidas numericamente e a cada solução corresponde uma frequência natural:

$$\omega_r = \lambda_r L (GJ/I_D L^2)^{1/2}, r = 1, 2, \dots \quad (5.45)$$

Note-se que neste caso as frequências naturais ω_r já não são múltiplos da frequência fundamental ω_1 . Os modos naturais têm a forma:

$$\theta_r(x) = A_r \text{ sen } \lambda_r x, r = 1, 2, \dots \quad (5.46)$$

e a condição de ortogonalidade tem a forma de:

$$\int_0^L I_D \theta_r(x) \theta_s(x) dx + \theta_r(L) \theta_s(L) = 0, r, s = 1, 2, \dots, r \neq s \quad (5.47)$$

Note-se que no limite em que $\lambda L \rightarrow 0$, as soluções da equação da frequência tornam-se múltiplos de π , ou seja, $\lambda_r L \approx (r-1)\pi$ para $\lambda_r L \gg 1$. A partir das eqns. 5.44 e 5.46 pode demonstrar-se que os modos elevados têm nodos em $x = L$, pelo que nestes casos o disco está em repouso.

5.2.2 Vibrações Transversais de Vigas

Na secção 3.4.4., deduziu-se a forma da equação que governa o movimento de uma viga a vibrar sob o efeito de uma carga transversal. Os modos de vibração são determinados a partir da seguinte equação diferencial:

$$\frac{d^4 Z(x)}{dx^4} - \lambda^4 Z(x) = 0 \quad (5.48)$$

onde $\lambda^4 = \omega^2 \mu/EI$ e a equação é válida para vigas uniformes. A solução geral desta equação é:

$$Z(x) = C_1 \sin \lambda x + C_2 \cos \lambda x + C_3 \sinh \lambda x + C_4 \cosh \lambda x \quad (5.49)$$

Considere-se o caso de uma viga encastrada e em balanço. Neste caso, as condições de fronteira serão:

$$Z(0) = \frac{dZ(x)}{dx} \Big|_{x=0} = \frac{d^2Z(x)}{dx^2} \Big|_{x=L} = \frac{d^3Z(x)}{dx^3} \Big|_{x=L} = 0 \quad (5.50)$$

A aplicação destas condições conduz à equação característica:

$$\cos \lambda L \cos h \lambda L = -1 \quad (5.51)$$

a qual tem de ser resolvida numericamente para obter os valores λ_r , aos quais correspondem modos naturais com a seguinte expressão:

$$Z_r(x) = A_r \{ (\sin \lambda_r L - \sinh \lambda_r L)(\sin \lambda_r x - \sinh \lambda_r x) + (\cos \lambda_r L + \cosh \lambda_r L)(\cos \lambda_r x + \cosh \lambda_r x) \}, r = 1, 2, \dots \quad (5.52)$$

os quais constituem um conjunto completo de funções ortogonais.

Considere-se agora o caso de uma viga uniforme livre nas duas extremidades. Neste caso, as condições de fronteira aplicáveis serão

$$\frac{d^2Z(x)}{dx^2} = \frac{d^3Z(x)}{dx^3} = 0 \quad \text{em } x = 0, L \quad (5.53)$$

A equação característica deste problema é

$$\cos \lambda L \cosh \lambda L = 1 \quad (5.54)$$

a qual também só pode ser resolvida numericamente. Esta equação tem uma raiz dupla, $\lambda_0 = \lambda_1 = 0$, caso em que a equação diferencial se reduz a:

$$\frac{d^4Z(x)}{dx^4} = 0 \quad (5.55)$$

com a solução geral:

$$Z(x) = D_1 + D_2 x + D_3 x^2 + D_4 x^3 \quad (5.56)$$

A aplicação das condições de fronteira implica que $D_3 = D_4 = 0$, pelo que os dois modos que correspondem aos movimentos de corpo rígido são:

$$Z_0(x) = A_0 \quad (5.57)$$

$$Z_1(x) = A_1 \left(x - \frac{L}{2} \right) \quad (5.58)$$

As outras soluções da equação característica determinam a forma das restantes funções próprias:

$$Z_r(x) = A_r \{ (\text{sen } \lambda_r L - \text{senh } \lambda_r L) (\text{sen } \lambda_r x - \text{senh } \lambda_r x) + (\text{sen } \lambda_r L + \text{senh } \lambda_r L) (\cos \lambda_r x + \cosh \lambda_r x) \}, r = 1, 2, \dots \quad (5.59)$$

Os modos naturais indicados nas expressões 5.57-59, não estão ainda normalizados. A condição de ortogonalidade com o primeiro modo:

$$\int_0^L m(x) Z_0(x) Z_r(x) dx = 0 \quad , r = 2, 3, \dots \quad (5.60)$$

reduz-se a:

$$\int_0^L m(x) Z_r(x) dx = 0 \quad , r = 2, 3, \dots \quad (5.61)$$

A condição de ortogonalidade com o modo seguinte é:

$$\int_0^L m(x) Z_1(x) Z_r(x) dx = 0 \quad , r = 2, 3, \dots \quad (5.62)$$

Estas duas últimas expressões exprimem a condição de que em vibrações livres não há forças transversais nem momentos, relativamente ao centro de massa, a actuarem na viga.

Com o aumento de λL , o $\cosh \lambda L$, aumenta muito, pelo que as raízes da equação característica podem aproximar-se por $\lambda_r L \approx (2r - 1)(\pi/2)$. Note-se que para modos elevados torna-se menos correcto desprezar o efeito da deformação de corte e da inércia de rotação, que está implícito nesta formulação.

6. MÉTODOS APROXIMADOS DE ANÁLISE DE SISTEMAS CONTÍNUOS

Nos dois capítulos anteriores, estudaram-se métodos exactos de análise de sistemas discretos e de sistemas contínuos. Agora, serão analisados alguns métodos aproximados da solução de problemas que envolvem sistemas contínuos.

O princípio básico dos métodos aproximados é a substituição de um sistema contínuo por um sistema com um número finito de graus de liberdade, onde o número adoptado está relacionado com a precisão pretendida. Um grupo de métodos considera uma solução com a forma de um somatório de funções com uma forma definida, multiplicadas por coeficientes de valor desconhecido. Outro grupo de métodos utiliza uma discretização especial do sistema, a qual se pode conseguir mediante a concentração da massa do sistema num conjunto de pontos ou mediante a utilização de coeficientes de influência.

No primeiro caso, a massa do sistema é concentrada num conjunto de pontos ou estações, enquanto que os segmentos entre dois pontos não têm massa mas têm uma rigidez uniforme, o que se representa adequadamente por molas. No método dos coeficientes de influência não se introduzem hipóteses relativamente à distribuição da rigidez do sistema, embora também se considerem as massas concentradas em certos pontos.

6.1 Método de Rayleigh

Este método, que já foi tratado na secção 4 para o caso de sistemas discretos, utiliza-se normalmente para a determinação da frequência fundamental de vibração sem o recurso à solução das equações do movimento. Baseia-se no princípio de Rayleigh, o qual diz que a frequência de vibração de um sistema conservativo que vibra em torno de uma posição de equilíbrio, tem um valor estacionário na vizinhança de um modo natural. Este valor é mesmo um mínimo na vizinhança do modo fundamental.

No caso de um sistema discreto, o deslocamento generalizado da massa m_i tem a forma:

$$q_i(t) = u_i f(t) \quad (6.1)$$

onde $f(t)$ é uma função harmónica no tempo. Com base nesta descrição, as energias cinética e potencial do sistema são dadas por:

$$T(t) = \frac{1}{2} \{u\}^T |m| \{u\} f^2(t) \quad (6.2)$$

$$V(t) = \frac{1}{2} \{u\}^T |k| \{u\} f^2(t) \quad (6.3)$$

Num sistema conservativo, a energia total E é constante:

$$E = T + V = T_{\max} = V_{\max} \quad (6.4)$$

e igual ao valor máximo da energia cinética ou da potencial. Quando o sistema passa pela posição de equilíbrio, a energia potencial é zero e a energia cinética é máxima. Quando o sistema chega ao deslocamento máximo, a energia cinética anula-se mas a energia potencial tem o valor máximo.

Quando o movimento é harmónico com frequência ω :

$$f(t) = \text{sen } \omega t \quad (6.5)$$

as energias cinética e potencial também são harmónicas com uma frequência 2ω :

$$T(t) = T_{\max} \cos^2 \omega t = \frac{T_{\max}}{2} (1 + \cos 2\omega t) \quad (6.6)$$

$$V(t) = V_{\max} \text{sen}^2 \omega t = \frac{V_{\max}}{2} (1 - \cos 2\omega t) \quad (6.7)$$

onde:

$$T_{\max}(t) = \frac{1}{2} \{u\}^T |m| \{u\} \omega^2 \equiv T^* \omega^2 \quad (6.8)$$

$$V_{\max}(t) = \frac{1}{2} \{u\}^T |k| \{u\} \quad (6.9)$$

Igualando os valores máximos das energias, de acordo com a eqn. 6.4 resulta:

$$\omega^2 = \frac{V_{\max}}{T^*} = \frac{\{u\}^T |k| \{u\}}{\{u\}^T |m| \{u\}} \equiv R(u) \quad (6.10)$$

o que não é mais do que a expressão do cociente de Rayleigh deduzida no capítulo 4.

Considere-se, agora, o caso de sistemas contínuos do tipo de uma viga. Considerando que o potencial da gravidade se pode desprezar, a energia potencial da viga é igual à sua energia de deformação. Numa viga sujeita à flexão, as energias cinética e de deformação são dadas por:

$$T = \frac{1}{2} \int_0^L m w^2 dx \quad (6.11)$$

$$V = \frac{1}{2} \int_0^L E.I w''^2 dx \quad (6.12)$$

Considerando que a deformação é harmónica no tempo, com frequência ω os valores máximos da energia são:

$$T_{\max} = \frac{1}{2} \omega^2 \int_0^L m(x) w^2(x) dx \quad (6.13)$$

$$V_{\max} = \frac{1}{2} \int_0^L E \cdot I(x) \{w''(x)\}^2 dx \quad (6.14)$$

donde se obtém a expressão da frequência:

$$\omega^2 = \frac{\int_0^L E \cdot I w''^2 dx}{\int_0^L m w' dx} \quad (6.15)$$

Considere-se o exemplo de uma viga em apoios simples, a suportar uma massa M colocada a meio do seu comprimento. No caso de uma viga sem a massa adicional, os modos próprios de vibração têm a forma:

$$Z_r(x) = \text{sen} \frac{r\pi x}{L} \quad (6.16)$$

Utilizando como deformada o primeiro modo ($r=1$), pode deduzir-se a frequência natural a partir da eqn. 6.15, onde se acrescentou o termo Mw $L/2$ ao denominador para representar a energia cinética da massa:

$$\omega^2 = \frac{\pi^4 EI}{2L^3} \frac{1}{\frac{mL}{2} + M} \quad (6.17)$$

No caso em que $M=0$, esta equação dá o valor correcto de frequência natural do primeiro modo:

$$\omega^2 = \frac{\pi^4 EI}{mL^3} \quad (6.18)$$

No caso limite em que a massa da viga se pudesse desprezar relativamente à massa que ela suportava ($m=0$), a frequência era:

$$\omega^2 = \frac{\pi^4 EI}{ML^3} \quad (6.19)$$

Considere-se, agora, outra aproximação possível, utilizando a deformada da viga resultante da hipótese de esta não ter massa distribuída, mas somente concentrada no seu centro de massa. A deformação estática provocada por uma carga pontual é dada por:

$$w(x) = \frac{x}{L} \left\{ 3 - 4 \left(\frac{x}{L} \right)^2 \right\} \quad 0 < X < \frac{1}{2} \quad (6.20)$$

$$w(x) = \left(1 - \frac{x}{L} \right) \left\{ 3 - 4 \left(1 - \frac{x}{L} \right)^2 \right\} \quad \frac{1}{2} < \frac{X}{L} < 1 \quad (6.21)$$

Introduzindo agora estas expressões na eqn. 6.15 resulta em:

$$\omega^2 = \frac{48 EI}{L^3} \frac{1}{\frac{17}{35} m L + M} \quad (6.22)$$

Os valores limites desta frequência nos casos $M=0$ e $m=0$ são respectivamente:

$$\omega^2 = \frac{98.8 EI}{ML^3} \quad (6.23)$$

$$\omega^2 = \frac{48 EI}{ML^3} \quad (6.24)$$

Comparando estes valores com as eqn. 6.18 e 6.19 que são mais correctas, pode concluir-se que estes valores aproximados são cerca de 1.5% superiores do que os anteriores.

Outro exemplo de aplicação é a determinação da frequência fundamental de vibração de uma viga encastrada em balanço sujeita a vibrações longitudinais. A secção transversal da viga vai diminuindo da base para o extremo, sendo a distribuição de massa por unidade de comprimento dada por:

$$m(x) = 2m \left(1 - \frac{x}{L} \right) \quad (6.25)$$

e a distribuição da área é semelhante:

$$E \cdot A(x) = 2 EA \left(1 - \frac{x}{L} \right) \quad (6.26)$$

Escolha-se a forma da primeira função característica de uma viga encastrada em balanço:

$$u(x) = \text{sen} \frac{\pi x}{2L} \quad (6.27)$$

a qual, obviamente, satisfaz as condições de fronteira do problema.

Neste caso, o cociente de Rayleigh é dado por:

$$\omega^2 = R(u) = \frac{\int_0^L EA(x) \left\{ \frac{du(x)}{dx} \right\}^2 dx}{\int_0^L m(x) u^2(x) dx} \quad (6.28)$$

Aplicando os integrais:

$$\begin{aligned} \int_0^L EA(x) \left\{ \frac{du(x)}{dx} \right\}^2 dx &= 2 EA(x) \left(\frac{\pi}{2L} \right)^2 \int_0^L \left(1 - \frac{x}{L} \right) \cos^2 \frac{\pi x}{2L} dx = \frac{EA}{2L} \left(1 + \frac{\pi^2}{4} \right) \\ \int_0^L m(x) u^2(x) dx &= 2m \int_0^L \left(1 - \frac{x}{L} \right) \sin^2 \frac{\pi x}{2L} dx = \frac{mL}{2} \left(1 - \frac{4}{\pi^2} \right) \end{aligned} \quad (6.29)$$

e introduzindo-os na expressão anterior conduz a:

$$\omega^2 = \frac{1 + (\pi^2/4) EA}{1 - (4/\pi^2) mL^2} = 5.831 \frac{EA}{mL^2} \quad (6.30)$$

donde resulta que

$$\omega = 2.415 \left(\frac{EA}{mL^2} \right)^{1/2} \quad (6.31)$$

Este problema pode ser resolvido exactamente conduzido a uma frequência com um coeficiente igual a 2.405, pelo que a aproximação de Rayleigh conduz a um valor cerca de 0.4% superior.

6.2 Método de Holzer

Este método baseia-se em aproximar o sistema contínuo por um sistema discreto com n graus de liberdade. Enquanto o método de Rayleigh-Ritz considera várias funções que são contínuas, a aproximação de Holzer consiste em ter massas concentradas em vários pontos ao longo do sistema. Entre cada massa haverá uma mola que é considerada como não tendo massa e possuindo uma rigidez uniforme.

As equações diferenciais do sistema contínuo são aproximadas por equações às diferenças finitas que relacionam as forças com as deformações entre os dois extremos da massa e da mola, consoante o caso.

Para um sistema contínuo, a relação entre o ângulo de rotação $\theta(x, t)$ e o momento torsor $M_T(x, t)$ é:

$$\frac{\partial \theta(x, t)}{\partial x} = \frac{M_T(x, t)}{G J(x)} \quad (6.32)$$

onde $G J(x)$ é a rigidez torsional. No caso de oscilações livres, a equação do movimento é:

$$\frac{\partial M_T(x,t)}{\partial x} = I(x) \frac{\partial^2 \theta(x,t)}{\partial t^2} \quad (6.33)$$

onde $I(x)$ é a inércia das massas concentradas.

Considerando agora que M_T e θ são harmónicos no tempo com uma frequência ω , as equações transformam-se em:

$$\frac{d \theta}{d x} = \frac{M_T(x)}{G J(x)} \quad (6.34)$$

$$\frac{d M_T(x)}{d x} = -\omega^2 I(x) \theta(x) \quad (6.35)$$

onde agora $M_T(x)$ e $\theta(x)$ são as amplitudes das oscilações.

Considere-se um veio não uniforme com uma série de massas concentradas. Defina-se θ_i^E e M_i^E como a deformação angular e o momento tissor no extremo esquerdo do disco i e θ_i^D e M_i^D como os valores das variáveis no lado direito.

Como o disco é rígido tem-se:

$$\theta_i^E = \theta_i^D = \theta_i \quad (6.36)$$

O momento polar de inércia da massa será:

$$I_i = I(x_i) \Delta x_i \quad (6.37)$$

Aplicando agora a segunda equação à massa i , obtém-se:

$$M_i^D - M_i^E = \omega^2 I_i \theta_i \quad (6.38)$$

Considerando o segmento de veio entre as massas i e $i+1$, a primeira equação com as derivadas substituídas por diferenças fica:

$$\frac{\theta_{i+1}^E - \theta_i^D}{\Delta x_i} \approx \frac{1}{2} \frac{M_{i+1}^E - M_i^D}{G J_i} \quad (6.39)$$

onde o momento tissor foi substituído pelo seu valor médio. A segunda equação reduz-se a

$$\frac{M_{i+1}^E - M_i^D}{\Delta x_i} = 0 \quad (6.40)$$

pois a inércia do veio ou da mola que o representa é nula. Daqui se infere que

$$M_{i+1}^E = M_i^D \quad (6.41)$$

o que se substitui na equação anterior para conduzir a:

$$\theta_{i+1}^E = \theta_i^D + M_{i+1}^E \cdot \frac{\Delta x_i}{GJ_i} \quad (6.42)$$

Nesta expressão a fracção pode interpretar-se como a deflecção angular no ponto $i+1$ devido a um momento unitário $M_{i+1}^L = 1$ quando se impede a rotação do ponto i . Isto é a definição do coeficiente de influência de flexibilidade torsional C_i , o que transforma a equação em:

$$\theta_{i+1}^E = \theta_i^D + C_i M_i^D \quad (6.43)$$

Recordando que a rotação numa massa é igual dos dois lados e combinando com esta equação vem:

$$\begin{Bmatrix} \theta_i^D \\ M_i^D \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\omega^2 I_i & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_i^E \\ M_i^E \end{Bmatrix} \quad (6.44)$$

ou

$$\begin{Bmatrix} \theta \\ M \end{Bmatrix}_i^D = [T_n]_i \begin{Bmatrix} \theta \\ M \end{Bmatrix}_i^E \quad (6.45)$$

onde $[T_n]$, que se denomina matrix de transferência do nó relaciona as deformações angulares e os momentos em ambos os lados da massa.

Pode também construir-se matrizes equivalentes para os veios entre massas levando a:

$$\begin{Bmatrix} \theta_{i+1}^L \\ M_{i+1}^L \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & c_i \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_i^D \\ M_i^D \end{Bmatrix} \quad (6.46)$$

ou

$$\begin{Bmatrix} \theta \\ M \end{Bmatrix}_{i+1}^E = [T_m]_i \begin{Bmatrix} \theta \\ M \end{Bmatrix}_i^D \quad (6.47)$$

onde $[T_m]$ é a matriz de transferência da mola e relaciona as deformações angulares e os momentos nas duas extremidades da mola.

Considere-se agora um sistema com $n+1$ massas e n molas. É possível ir progredindo de um lado para o outro de uma massa e de um extremo para o outro de cada mola de forma sucessiva:

$$\begin{Bmatrix} \theta \\ M \end{Bmatrix}_1^D \equiv [T_n]_i \begin{Bmatrix} \theta \\ M \end{Bmatrix}_i^E \quad (6.48)$$

$$\begin{Bmatrix} \theta \\ M \end{Bmatrix}_2^E = [T_m]_i \begin{Bmatrix} \theta \\ M \end{Bmatrix}_1^D = [T_n]_1 [T_m]_1 \begin{Bmatrix} \theta \\ M \end{Bmatrix}_1^E \equiv [T_n]_1 \begin{Bmatrix} \theta \\ M \end{Bmatrix}_1^E \quad (6.49)$$

$$\begin{Bmatrix} \theta \\ M \end{Bmatrix}_{i+1}^E = [T_m]_i \begin{Bmatrix} \theta \\ M \end{Bmatrix}_i^D = [T_n]_i [T]_1 \begin{Bmatrix} \theta \\ M \end{Bmatrix}_i^E \quad (6.50)$$

$$\begin{Bmatrix} \theta \\ M \end{Bmatrix}_{n+1}^E = [T]_n \begin{Bmatrix} \theta \\ M \end{Bmatrix}_n^E = [T]_n [T]_{n-1} [T]_1 \begin{Bmatrix} \theta \\ M \end{Bmatrix}_1^E \quad (6.51)$$

$$\begin{Bmatrix} \theta \\ M \end{Bmatrix}_{n+1}^D = [T_n]_{n+1} \begin{Bmatrix} \theta \\ M \end{Bmatrix}_{n+1}^E \equiv [T] \begin{Bmatrix} \theta \\ M \end{Bmatrix}_1^E \quad (6.52)$$

onde:

$$[T]_i = [T_n]_i [T_m]_i \quad (6.53)$$

é a matriz de transferência que relaciona o deslocamento angular e o momento torsor no lado esquerdo dos nós i e $i+1$.

A matriz de transferência global é:

$$[T] = [T_n]_{n+1} \prod_i^n [T]_i \quad (6.54)$$

e relaciona o lado esquerdo do primeiro nó com o lado direito do último.

Da última matriz de recorrência, denominando T_{ij} os elementos da matriz T , pode escrever-se as condições no lado direito da última massa:

$$\theta_{n+1}^D = T_{11} \theta_1^E + T_{12} M_1^E \quad (6.55)$$

$$M_{n+1}^D = T_{21} \theta_1^E + T_{22} M_1^E \quad (6.56)$$

A estes valores bem como as iniciais, do lado esquerdo do primeiro nó é necessário aplicar as condições de fronteira.

No caso de um veio livre nos dois extremos as condições de fronteira serão:

$$M_1^E = M_{n+1}^D = 0 \quad (6.57)$$

donde se conclui que é necessário ter $T_{21} = 0$, o que representa uma equação algébrica de ordem $n + 1$ em ω^2 , denomina-se a equação da frequência. Neste caso obtém-se uma raiz nula.

No caso de um extremo e livre e outro encastrado as condições de fronteira serão:

$$M_1^E = \theta_{n+1}^D = \theta_{n+1}^E = 0 \quad (6.58)$$

o que tem como equação de frequência $T_{11} = 0$, que é de ordem n em ω^2

No caso de encastramento no primeiro extremo e livre no ultimo a condição será:

$$\theta_1^E = \theta_1^D = M_{n+1}^E = 0 \quad (6.59)$$

resultando na equação $T_{22} = 0$, também de ordem n em ω^2

Finalmente, o encastramento nos dois extremos leva a:

$$\theta_i^E = \theta_i^D = \theta_{n+1}^D = \theta_{n+1}^E = 0 \quad (6.60)$$

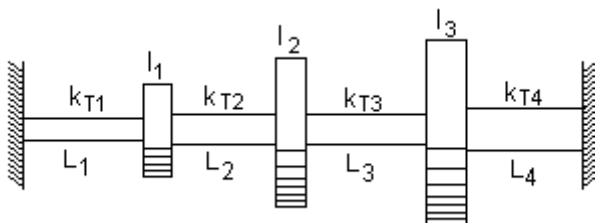
com aq equação de frequência $T_{12} = 0$, de ordem $n - 1$ em ω^2

As equações da frequência podem ser resolvidas por qualquer método. Depois de obter os valores de ω_r pode substituir-se nas matrizes T e reconstituir a equação de recorrência, calculando os modos próprios de vibração e o diagrama de momentos torsores correspondentes a cada frequência.

6.2.1 EXEMPLO DA APLICAÇÃO DO MÉTODO DE HOLZER ÀS VIBRAÇÕES TORSIONAIS

$$I_1 = I_D, I_2 = 2I_D, I_3 = 3I_D,$$

$$k_1 = \frac{GJ}{L}, k_2 = k_3 = 2 \frac{GJ}{L}, k_4 = 3 \frac{GJ}{L}$$



A matriz de inércia é dada por:

$$[I_p] = \begin{bmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{bmatrix} = I_D \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix},$$

e a matriz de rigidez por:

$$[k] = \frac{GJ}{L} \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{bmatrix}$$

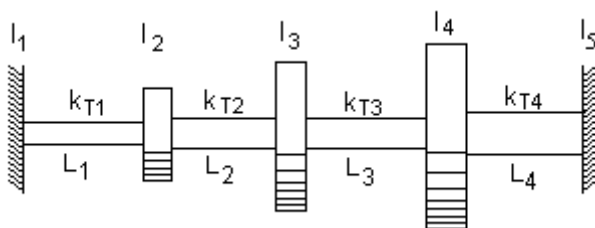
Resolvendo o problema de valores próprios tem-se as seguintes frequências naturais:

$$\omega_1 = 0.7546 \sqrt{\frac{GJ}{LI_D}},$$

$$\omega_2 = 1.4142 \sqrt{\frac{GJ}{LI_D}},$$

$$\omega_3 = 2.0241 \sqrt{\frac{GJ}{LI_D}}.$$

Procede-se agora a uma nova numeração para a aplicação do método de Holzer



Para o encastramento nos dois extremos leva a:

$$\theta_1^E = \theta_5^D = 0$$

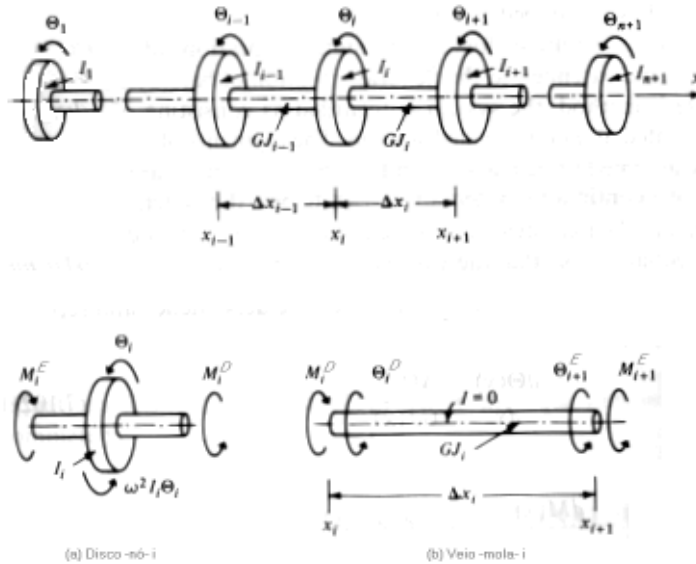
com equação de frequência $T_{12} = 0$, de ordem $n - 1$ em ω^2 .

$$\Delta x_i = L_1 = L_2 = L_3 = L$$

$$c_1 = \frac{\Delta x_1}{G \cdot J_1}$$

Assim tem-se que $c_1=1(L/GJ)$, $c_2=1/2(L/GJ)$, $c_3=1/2(L/GJ)$ e $c_4=1/3(L/GJ)$.

A numeração matricial respeita a seguinte nomenclatura:



Para o primeiro nó:

$$\begin{Bmatrix} \theta \\ M \end{Bmatrix}_1^D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\omega^2 \cdot I_1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \theta \\ M \end{Bmatrix}_1^E \quad \text{com} \quad [T_n]_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\omega^2 \cdot I_1 & 1 \end{bmatrix}$$

sabe-se então que

$$\theta_1^D = \theta_1^E = \theta_1$$

e

$$M_1^D = -\omega^2 \cdot I_1 \cdot \theta_1^E + M_1^E$$

Para a primeira mola:

$$\begin{Bmatrix} \theta \\ M \end{Bmatrix}_2^E = \begin{bmatrix} 1 & c_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \theta \\ M \end{Bmatrix}_1^D \quad \text{com} \quad [T_m]_1 = \begin{bmatrix} 1 & c_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

A matriz de transferência do nó 1 para o nó 2 terá a seguinte forma:

$$[T]_1 = \begin{bmatrix} (1 - c_1 \cdot \omega^2 \cdot I_1) & c_1 \\ (-\omega^2 \cdot I_1) & 1 \end{bmatrix}$$

Sendo as seguintes matrizes de transferência dadas por:

$$[T]_i = \begin{bmatrix} (1 - c_i \cdot \omega^2 \cdot I_i) & c_i \\ (-\omega^2 \cdot I_i) & 1 \end{bmatrix} \text{ com } i=2,3,4$$

Para o nosso sistema a matriz de transferência global será:

$$[T] = [T_n]_5 \cdot [T]_4 \cdot [T]_3 \cdot [T]_2 \cdot [T]_1$$

com

$$[T]_1 = \begin{bmatrix} (1 - \omega^2 \cdot I_1) & 1 \\ (-\omega^2 \cdot I_1) & 1 \end{bmatrix}$$

$$[T]_2 = \begin{bmatrix} \left(1 - \frac{1}{2} \omega^2\right) & \frac{1}{2} \\ (-\omega^2) & 1 \end{bmatrix}$$

$$[T]_3 = \begin{bmatrix} (1 - \omega^2) & \frac{1}{2} \\ (-2\omega^2) & 1 \end{bmatrix}$$

$$[T]_4 = \begin{bmatrix} (1 - \omega^2) & \frac{1}{3} \\ (-3\omega^2) & 1 \end{bmatrix}$$

$$[T_n]_5 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ (-\omega^2 \cdot I_5) & 1 \end{bmatrix}$$

depois de se obter [T]

O equação polinomial possui a seguinte forma:

$$T_{12} = (-c_1 \cdot c_2 \cdot c_3 \cdot c_4 \cdot I_2 \cdot I_3 \cdot I_4) \cdot \omega^6 + [(-c_3 \cdot I_3 - c_4 \cdot I_4 - c_4 \cdot I_3) \cdot c_2 \cdot I_2 + c_3 \cdot c_4 \cdot I_3 \cdot I_4 + c_3 \cdot c_4 \cdot I_2 \cdot I_4] \cdot c_1 + c_2 \cdot c_3 \cdot c_4 \cdot I_3 \cdot I_4 \cdot \omega^4 + [(-c_2 \cdot I_2 - c_3 \cdot I_3 - c_4 \cdot I_4 - c_4 \cdot I_3 - (c_3 + c_4) \cdot I_2) \cdot c_1 - c_3 \cdot c_4 \cdot I_4 + (-c_3 \cdot I_3 - c_4 \cdot I_4 - c_4 \cdot I_3) \cdot c_2] \cdot \omega^2 + c_1 + c_2 + c_3 + c_4 = 0$$

Para este polinómio as soluções reais são dadas por:

$$\omega_1 = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{21 - 6\sqrt{7}} \sqrt{\frac{GJ}{LI_D}} = 0.7546 \sqrt{\frac{GJ}{LI_D}},$$

$$\omega_2 = \sqrt{2} \cdot \sqrt{\frac{GJ}{LI_D}} = 1.4142 \sqrt{\frac{GJ}{LI_D}},$$

$$\omega_3 = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{21 + 6\sqrt{7}} \sqrt{\frac{GJ}{LI_D}} = 2.0241 \sqrt{\frac{GJ}{LI_D}}.$$

que confirma a solução de valores próprios.

6.3 Método de Myklestad para Vibrações Flexurais

O método de Myklestad aplica-se às vibrações flexurais de vigas, baseando-se em princípios semelhantes ao método de Hozer.

Parte-se das equações que descrevem as vibrações livre de uma viga:

$$Q(x,t) = -\frac{\partial M(x,t)}{\partial x} \quad (6.61)$$

$$\frac{\partial Q(x,t)}{\partial x} = m(x) \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} \quad (6.62)$$

onde $w(x,t)$, é o deslocamento transversal, $Q(x,t)$ é o esforço transversal, $M(x,t)$ o momento flector e $m(x)$ a massa por unidade de comprimento.

Considerando que as forças e deslocamentos são harmónicas no tempo, aquelas equações tornam-se em:

$$Q(x) = -\frac{dM(x)}{dx} \quad (6.63)$$

$$\frac{dQ(x)}{dx} = -\omega^2 m(x) w(x) \quad (6.64)$$

onde $w(x)$, $Q(x)$ e $M(x)$ são as amplitudes e ω é a frequência de vibração.

Considere-se uma viga não uniforme e aproxime-se por um conjunto de massas concentradas ligadas por segmentos sem massa mas com um rigidez de flexão constante (molas).

Determinando a derivada da 1.^a equação por diferenças finitas aplicadas ao segmento mola-massa de i a $i+1$ e denominando D e E o extremo direito e esquerdo do segmento vem:

$$\frac{M_{i+1}^D - M_i^D}{\Delta x} = -Q_i^D \quad (6.65)$$

O momento dos dois lados da massa é igual, desde que se despreze o efeito da inércia de rotação:

$$M_i^D = M_i^E \quad (6.66)$$

Assim, a equação transforma-se em:

$$M_{i+1}^E = M_i^D - Q_i^D \Delta x_i \quad (6.67)$$

a qual se aplica ao segmento de mola.

Reformulando a segunda equação com diferenças finitas vem:

$$\frac{Q_i^D - Q_i^E}{\Delta x} = -\omega^2 m(x_i) w(x_i) \quad (6.68)$$

ou atendendo a que $m_i = m(x_i)\Delta x$:

$$Q_i^D = Q_i^E - \omega^2 m_i w_i \quad (6.69)$$

As condições de continuidade na massa vão exigir que deslocamentos e rotações de ambos os lados sejam iguais:

$$w_i^D = w_i^E = w_i \quad (6.70)$$

$$\psi_i = \left. \frac{dw(x)}{dx} \right|_{x_i} = \psi_i^D = \psi_i^E \quad (6.71)$$

Considere-se agora os coeficientes de influência:

- C_i^{wQ} - deslocamento em $i+l$ devido a $Q_{i+1}^E = 1$
- C_i^{wM} - deslocamento em $I+l$ devido a $M_{i+1}^E = 1$
- $C_i^{\psi Q}$ - rotação em $I+l$ devido a $Q_{i+1}^E = 1$
- C_i^{wM} - deslocamento em $i+l$ devido a $M_{i+1}^E = 1$

Em todas estas situações considera-se que o nó I está fixo. Os deslocamentos em $i+l$ podem relacionar-se com os que se dão em i por:

$$w_{i+1}^E = w_i^D + \psi_i^D \Delta x_i + C_i^{wM} M_{i+1}^E + C_i^{wQ} Q_i^E \quad (6.72)$$

$$\psi_{i+1}^E = \psi_i^D + C_i^{wM} M_{i+1}^E + C_i^{\psi Q} Q_{i+1}^D \quad (6.73)$$

Como não há forças de inércia na mola,

$$Q_{i+1}^E = Q_i^D \quad \text{e} \quad M_{i+1}^E = M_i^D - Q_i^D \Delta x_i \quad (6.74)$$

O que substituindo na equação anterior leva a:

$$w_{i+1}^E = w_i^D + \psi_i^D \Delta x_i + C_i^{wM} M_i^D + (C_i^{wQ} - \Delta x_i C_i^{wM}) Q_i^D \quad (6.75)$$

$$\psi_{i+1}^E = \psi_i^D + C_i^{wM} M_i^D + (C_i^{wQ} - \Delta x_i C_i^{wM}) Q_i^D \quad (6.76)$$

Relaciona-se as grandezas do lado direito e esquerdo da massa, de forma matricial.

$$\begin{Bmatrix} w \\ \psi \\ M \\ Q \end{Bmatrix}_i^D = [T_n] \begin{Bmatrix} w \\ \psi \\ M \\ Q \end{Bmatrix}_i^E \quad (6.77)$$

Onde a matriz de transferência do nó é:

$$[T_n] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\omega^2 m_i & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (6.78)$$

De modo análogo se relaciona o lado direito de uma massa com o lado esquerdo da massa seguinte:

$$\begin{Bmatrix} w \\ \psi \\ M \\ Q \end{Bmatrix}_{i+1}^E = [T_m]_i \begin{Bmatrix} w \\ \psi \\ M \\ Q \end{Bmatrix}_i^D \quad (6.79)$$

através da matriz de transferência da mola dada por:

$$[T_m] = \begin{bmatrix} 1 & \Delta x_i & C_i^{wM} & (C_i^{wQ} - \Delta x_i C_i^{wM}) \\ 0 & 1 & C_i^{\psi M} & (C_i^{\psi Q} - \Delta x_i C_i^{\psi M}) \\ 0 & 0 & 1 & -\Delta x_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (6.80)$$

Desprezando o efeito da deformação de corte e representando $C_i = \Delta x_i / EI_i$, os coeficientes de influência vêm:

$$\begin{aligned} C_i^{wQ} &= C_i (\Delta x_i)^2 / 3 & C_i^{\psi Q} &= C_i \Delta x_i / 2 \\ C_i^{wM} &= C_i \Delta x_i / 2 & C_i^{\psi M} &= C_i \end{aligned}$$

A matriz de transferência de mola vem então:

$$[T_m]_i = \begin{bmatrix} 1 & \Delta x_i & C_i \Delta x_i / 2 & -C_i (\Delta x_i)^2 / 6 \\ 0 & 1 & C_i & -C_i \Delta x_i / 2 \\ 0 & 0 & 1 & -\Delta x_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (6.81)$$

A matriz de transferência relativa ao conjunto massa-mola é o produto das outras:

$$[T]_i = [T_n]_i [T_m]_i \quad (6.82)$$

Aplicando o método sucessivamente à $n+1$ massas e às molas que as ligam obtém-se a matriz de transferência global:

$$[T]_i = [T_n]_{n+i} \prod_{i=1}^n [T]_i \quad (6.83)$$

que relaciona o lado esquerdo do primeiro nó com o lado direito do último:

$$\begin{Bmatrix} w \\ \psi \\ M \\ Q \end{Bmatrix} = [T] \begin{Bmatrix} w \\ \psi \\ M \\ Q \end{Bmatrix} \quad (6.84)$$

A resolução deste sistema de quatro equações a quatro incógnitas necessita da especificação das condições de fronteira.

Por exemplo se não há deslocamento de suportes, as matrizes $[T_n]$ e $[T_n]_{n+1}$ reduzem-se à identidade.

Considere-se o exemplo de uma viga encastrada em $x = 0 (i = 1)$ e livre em $x = L (i = n + 1)$.

As condições de fronteira no encastramento são:

$$w_1^E = w_i^D = w_1 = 0 \quad (6.85)$$

$$\psi_1^E = \psi_i^D = \psi_1 = 0 \quad (6.86)$$

e no extremo livre são:

$$M_{n+1}^D = 0 \quad (6.87)$$

$$Q_{n+1}^D = 0 \quad (6.88)$$

Aplicando estas condições às duas últimas equações do sistema resulta em:

$$0 = T_{33} M_1^E + T_{34} Q_1^E \quad (6.89)$$

$$0 = T_{43} M_1^E + T_{44} Q_1^E \quad (6.90)$$

o que conduz à equação de frequência correspondente a anular o determinante:

$$\begin{bmatrix} T_{33} & T_{34} \\ T_{43} & T_{44} \end{bmatrix} = 0 \quad (6.91)$$

onde T_{ij} é o termo da linha i e coluna j da matriz $[T]$.

As frequências naturais obtém-se desta matriz por qualquer dos métodos apresentados anteriormente. Os modos próprios obtém-se substituindo o valor da correspondente frequência natural na matriz de transferência e calculando os valores das grandezas nos vários pontos ao longo da viga, variando k de 1 a n :

$$\begin{Bmatrix} w^{(r)} \\ \psi^{(r)} \\ M^{(r)} \\ Q^{(r)} \end{Bmatrix}_k^E = \prod_{i=k-1}^1 [T^{(r)}] \begin{Bmatrix} w^{(r)} \\ \psi^{(r)} \\ M^{(r)} \\ Q^{(r)} \end{Bmatrix}_1^E \quad (6.92)$$

Neste caso específico, no extremo encastrado $w_1^{(r)} = \psi_1^E = 0$.

Além disso considerando a normalização $\{M^{(r)}\}_1^E = 1$ obtém-se:

$$\{Q_1^{(r)}\}_1^E = -T_{33}^{(r)} / T_{34}^{(r)} \quad (6.93)$$

donde

$$\begin{Bmatrix} w^{(r)} \\ \psi^{(r)} \\ M^{(r)} \\ Q^{(r)} \end{Bmatrix}_k^E = \prod_{i=k-1}^1 [T^{(r)}] \begin{Bmatrix} w^{(r)} \\ \psi^{(r)} \\ M^{(r)} \\ -T_{33}^{(r)} / T_{34}^{(r)} \end{Bmatrix} \quad (6.94)$$

o que permite calcular o vector de estado ao longo da viga fazendo variar k de 1 a n .