



Nome: \_\_\_\_\_

Ano / Turma: \_\_\_\_\_ N.º: \_\_\_\_\_

Data: \_\_\_\_ - \_\_\_\_ - \_\_\_\_

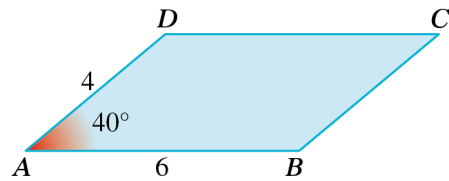
- Não é permitido o uso de corretor. Deves riscar aquilo que pretendes que não seja classificado.
- A prova inclui um formulário.
- As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado de cada caderno.

**CADERNO 1**  
**(É permitido o uso de calculadora gráfica.)**

1. Na figura está representado o paralelogramo  $[ABCD]$ .

Sabe-se que:

- $\widehat{BAD} = 40^\circ$
- $\overline{AB} = 6$
- $\overline{AD} = 4$

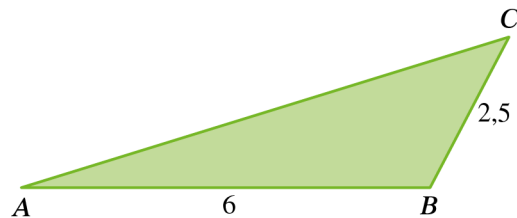


Determina o produto escalar  $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{CD}$ . Apresenta o resultado arredondado às centésimas.

2. Na figura está representado o triângulo  $[ABC]$ .

Sabe-se que:

- $\overline{BA} \cdot \overline{BC} = -7,5$
- $\overline{AB} = 6$
- $\overline{BC} = 2,5$

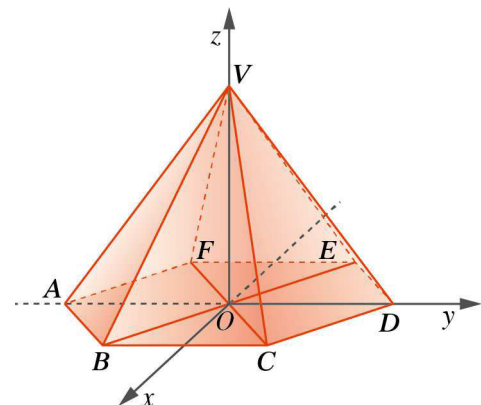


Determina  $\overline{AC} \cdot \overline{AC}$ .

3. Na figura, em referencial o.n.  $Oxyz$ , está representada uma pirâmide hexagonal regular.

Sabe-se que:

- a base  $[ABCDEF]$  está contida no plano  $xOy$ ;
- o vértice  $V$  tem coordenadas  $(0,0,6)$ ;
- o vértice  $C$  tem coordenadas  $\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2}, 0\right)$ .



Determina:

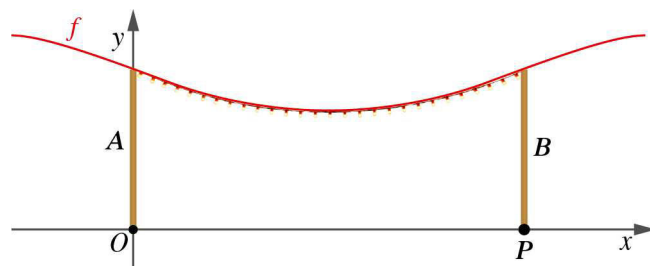
- o valor do produto escalar  $\overline{CV} \cdot \overline{OC}$ ;
- a medida do volume da pirâmide. Apresenta o resultado arredondado às décimas.

4. Considera a função  $f$ , de domínio  $\mathbb{R}$ , definida por  $f(x) = 4 - \sin(0,29x)$ .

A seguir está representado um fio com lâmpadas



O fio foi preso a duas colunas,  $A$  e  $B$ , com igual altura, e colocado um referencial o.n.  $Oxy$ , tal como é sugerido na figura seguinte, sendo o fio modelado pela função  $f$ .



Sabendo que a unidade do referencial corresponde a 1 m, determina, em metros:

- 4.1. a altura de cada coluna;
- 4.2. a distância, arredondada às unidades, entre as colunas  $A$  e  $B$ .

**FIM (Caderno 1)**

Cotações							Total
Questões – Caderno 1	1.	2.	3.1.	3.2.	4.1.	4.2.	
Pontos	12	15	12	15	12	14	80

**CADERNO 2**  
**(Não é permitido o uso de calculadora.)**

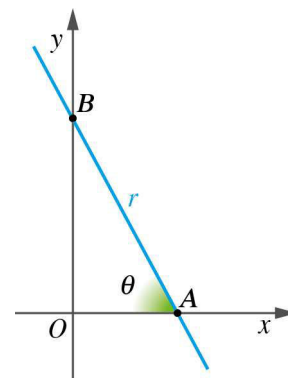
5. Na figura, em referencial o.n.  $Oxy$ , está representada uma reta  $r$  que intersesta os eixos coordenados  $Ox$  e  $Oy$ , respetivamente, nos pontos  $A$  e  $B$ .

A reta  $r$  é paralela à reta definida pela equação vetorial

$$(x, y) = (\sqrt{2}, -\sqrt{3}) + k(-3, 5), \quad k \in \mathbb{R}.$$

Sendo  $\widehat{BAO} = \theta$ , o valor de  $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$  é:

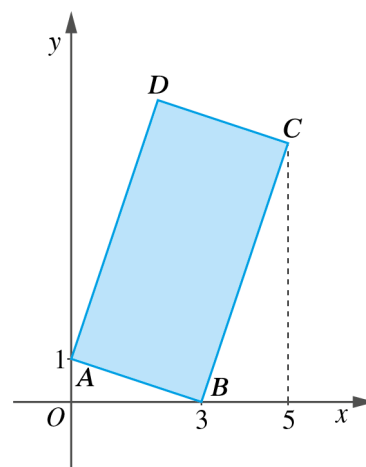
- (A)  $\frac{3\sqrt{34}}{34}$   
(B)  $\frac{\sqrt{15}}{5}$   
(C)  $\frac{\sqrt{5}}{3}$   
(D)  $-\frac{\sqrt{3}}{5}$



6. Na figura, em referencial o.n.  $Oxy$ , está representado o retângulo  $[ABCD]$ .

Sabe-se que:

- o vértice  $A$  tem coordenadas  $(0,1)$ ;
- o vértice  $B$  tem coordenadas  $(3,0)$ ;
- o vértice  $C$  tem abcissa 5.



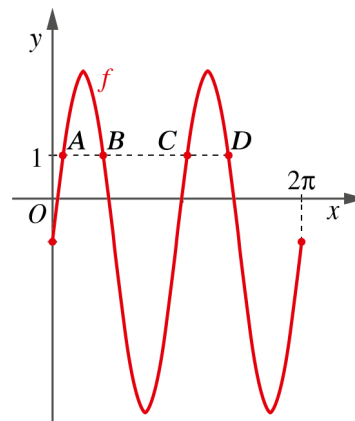
- 6.1. Representa a reta  $AD$  através de uma equação na forma reduzida.
- 6.2. Determina o perímetro do retângulo  $[ABCD]$ .
- 6.3. Considera a circunferência de centro em  $B$  e que passa em  $A$ . A interseção da circunferência com o eixo  $Ox$  é uma corda. Determina o comprimento dessa corda.

7. Na figura está representada a função  $f$ , de domínio  $[0, 2\pi]$ , definida por:

$$f(x) = 4\sin(2x) - 1$$

Os pontos  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $D$  são todos os pontos do gráfico de  $f$  que têm ordenada 1.

Determina as abcissas dos pontos  $A$  e  $D$ .



8. Em relação a um referencial o.n.  $Oxyz$ , considera:

- o plano  $\alpha$  definido pela equação  $-2x + y - z = 2$ ;
- o ponto  $A$  de coordenadas  $(-1, 3, 1)$ ;
- o ponto  $B$  a interseção do plano  $\alpha$  com  $Oz$ .

8.1. Qual dos seguintes pontos pertence ao plano  $\theta$  que passa em  $A$  e é paralelo ao plano  $\alpha$ ?

- (A)  $(2, 1, 1)$                       (B)  $(1, 2, 1)$   
 (C)  $(-2, -1, 0)$                   (D)  $(0, 1, -3)$

8.2. Representa por uma equação cartesiana o plano medidor de  $[AB]$ .

8.3. Seja  $S$  a superfície esférica definida pela equação  $(x-1)^2 + y^2 + (z+2)^2 = 22$ .

Mostra que o ponto  $A$  pertence a  $S$  e determina uma equação cartesiana do plano  $\beta$ , tangente à superfície esférica em  $A$ .

9. Considera a sucessão  $(u_n)$  de termo geral  $u_n = \frac{2n-7}{n+1}$ .

9.1. Indica o número de termos da sucessão que são positivos e menores que  $\frac{7}{5}$ .

- (A) 15                      (B) 10                      (C) 8                      (D) 13

9.2. Mostra que a sucessão é monótona e que 2 é um majorante do conjunto dos seus termos.

**FIM (Caderno 2)**

Cotações										Total	
Questões – Caderno 2	5.	6.1.	6.2.	6.3.	7.	8.1.	8.2.	8.3.	9.1.		9.2.
Pontos	10	10	15	15	12	10	12	12	10	14	120

## FORMULÁRIO

### GEOMETRIA

**Comprimento de um arco de circunferência:**  $\alpha r$

( $\alpha$  : amplitude, em radianos, do ângulo ao centro;  
 $r$  : raio)

**Área de um polígono regular:** Semiperímetro  $\times$  Apótema

**Área de um setor circular:**  $\frac{\alpha r^2}{2}$

( $\alpha$  : amplitude, em radianos, do ângulo ao centro;  $r$  : raio)

**Área lateral de um cone:**  $\pi r g$

( $r$  : raio da base;  $g$  : geratriz)

**Área de uma superfície esférica:**  $4\pi r^2$

( $r$  : raio)

**Volume de uma pirâmide:**  $\frac{1}{3} \times$  Área da base  $\times$  Altura

**Volume de um cone:**  $\frac{1}{3} \times$  Área da base  $\times$  Altura

**Volume de uma esfera:**  $\frac{4}{3} \pi r^3$  ( $r$  : raio)

### PROGRESSÕES

Soma dos  $n$  primeiros termos de uma progressão ( $u_n$ ):

**Progressão aritmética:**  $\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$

**Progressão geométrica:**  $u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$

### TRIGONOMETRIA

$$\sin(a + b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$$

$$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

### COMPLEXOS

$$(\rho \operatorname{cis} \theta)^n = \rho^n \operatorname{cis}(n\theta) \quad \text{ou} \quad (\rho e^{i\theta})^n = \rho^n e^{in\theta}$$

$$\sqrt[n]{\rho \operatorname{cis} \theta} = \sqrt[n]{\rho} \operatorname{cis} \left( \frac{\theta + 2k\pi}{n} \right) \quad \text{ou} \quad \sqrt[n]{\rho e^{i\theta}} = \sqrt[n]{\rho} e^{\frac{\theta + 2k\pi}{n}}$$

$$(k \in \{0, \dots, n-1\} \text{ e } n \in \mathbb{N})$$

### PROBABILIDADES

$$\mu = p_1 x_1 + \dots + p_n x_n$$

$$\sigma = \sqrt{p_1 (x_1 - \mu)^2 + \dots + p_n (x_n - \mu)^2}$$

Se  $X$  é  $N(\mu, \sigma)$ , então:

$$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0,6827$$

$$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0,9545$$

$$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 0,9973$$

### REGRAS DE DERIVAÇÃO

$$(u + v)' = u' + v'$$

$$(u v)' = u' v + u v'$$

$$\left( \frac{u}{v} \right)' = \frac{u' v - u v'}{v^2}$$

$$(u^n)' = n u^{n-1} u' \quad (n \in \mathbb{R})$$

$$(\sin u)' = u' \cos u$$

$$(\cos u)' = -u' \sin u$$

$$(\tan u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$$

$$(e^u)' = u' e^u$$

$$(a^u)' = u' a^u \ln a \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$$

$$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$$

$$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a} \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$$

### LIMITES NOTÁVEIS

$$\lim \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^n = e \quad (n \in \mathbb{N})$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \quad (p \in \mathbb{R})$$

CADERNO 1

1.  $\overline{AD} \cdot \overline{CD} = \overline{AD} \times \overline{CD} \times \cos(\widehat{ADC}) = 4 \times 6 \times \cos(180^\circ - 40^\circ) \Leftrightarrow 24 \times \cos(140^\circ) \approx -18,39$

**Resposta:**  $\overline{AD} \cdot \overline{CD} \approx -18,39$

2. Sabe-se que  $\overline{AC} \cdot \overline{AC} = \overline{AC}^2$ .

Seja  $\alpha = \widehat{CBA}$ .

$$\overline{BA} \cdot \overline{BC} = -7,5 \Leftrightarrow 6 \times 2,5 \times \cos \alpha = -7,5 \Leftrightarrow \cos \alpha = -\frac{7,5}{15} \Leftrightarrow \cos \alpha = -\frac{1}{2}$$

Pelo Teorema de Carnot,  $\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 - 2 \times \overline{AB} \times \overline{BC} \times \cos \alpha$ , ou seja:

$$\overline{AC}^2 = 6^2 + 2,5^2 - 2 \times 6 \times 2,5 \times \left(-\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow \overline{AC}^2 = 36 + 6,25 + 15 \Leftrightarrow \overline{AC}^2 = 57,25$$

**Resposta:**  $\overline{AC} \cdot \overline{AC} = 57,25$

3.

3.1.  $\overline{CV} = V - C = \left(-\frac{3\sqrt{3}}{2}, -\frac{3}{2}, 6\right)$  e  $\overline{OC} = C - O = \left(\frac{3\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2}, 0\right)$

$$\overline{CV} \cdot \overline{OC} = \left(-\frac{3\sqrt{3}}{2}, -\frac{3}{2}, 6\right) \cdot \left(\frac{3\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2}, 0\right) = -\frac{27}{4} - \frac{9}{4} + 0 = -\frac{36}{4} = -9$$

**Resposta:**  $\overline{CV} \cdot \overline{OC} = -9$

3.2. A base da pirâmide é um hexágono regular, logo o triângulo [BCO] é equilátero.

$$\overline{OC} = \sqrt{\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 + 0} = \sqrt{\frac{27}{4} + \frac{9}{4}} = 3$$

Seja  $h$  a altura do triângulo [BCO].

$$h = \sqrt{3^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

$$A_{\text{base}} = 6 \times \frac{3 \times \frac{3\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{27\sqrt{3}}{2}$$

$$V = A_{\text{base}} \times \overline{OV} = \frac{27\sqrt{3}}{2} \times 6 = 81\sqrt{3} \approx 140,3$$

**Resposta:** O volume da pirâmide é, aproximadamente, 140,3 unidades de volume.

4.

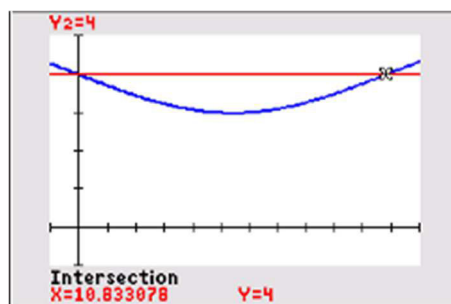
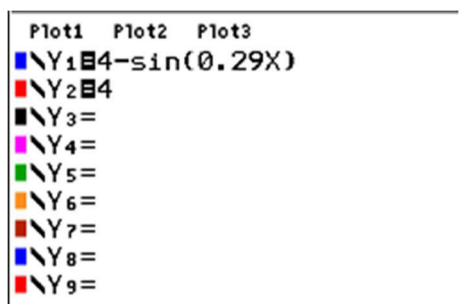
4.1.  $f(x) = 4 - \sin(0,29x)$

$$f(0) = 4 - \sin(0) = 4$$

**Resposta:** A altura de cada coluna é de 4 metros.

4.2.  $f(x) = f(0) \Leftrightarrow f(x) = f(0)$

Pode fazer-se uma resolução gráfica da equação, começando por inserir a expressão da função e o valor de  $f(0)$ .



A diferença entre as abcissas dos pontos de interseção das representações gráficas visualizadas representa a distância entre as colunas.

Os pontos têm coordenadas  $(0, 4)$  e, aproximadamente,  $(11, 4)$ .

Conclui-se que a distância é, aproximadamente, 11 metros.

**Resposta:** A distância entre as colunas  $A$  e  $B$  é, aproximadamente, 11 metros.

**FIM (Caderno 1)**

**CADERNO 2**

5. Declive da reta  $r$ :  $m = \tan(\pi - \theta) = -\frac{5}{3}$ , logo  $\tan(\theta) = \frac{5}{3}$ .

Sabe-se que  $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos \theta$  e  $1 + \tan^2(\theta) = \frac{1}{\cos^2(\theta)}$ .

$1 + \tan^2(\theta) = 1 + \frac{25}{9} = \frac{34}{9}$ , logo  $\frac{1}{\cos^2(\theta)} = \frac{34}{9}$ . Daqui resulta que  $\cos \theta = \frac{3}{\sqrt{34}} = \frac{3\sqrt{34}}{34}$ .

**Resposta:** Opção correta (A)  $\frac{3\sqrt{34}}{34}$

6.

6.1.  $\overline{AB} = B - A = (3, -1)$

Declive da reta  $AB$ :  $m = -\frac{1}{3}$

Declive da reta  $AD$ :  $-\frac{1}{m} = 3$

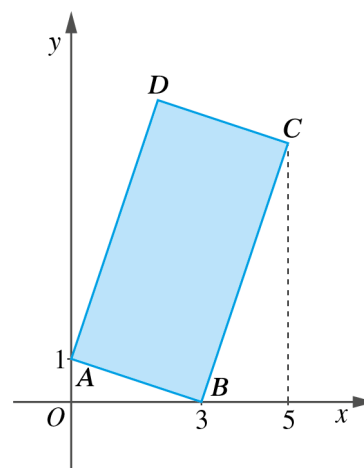
Equação da reta  $AD$ , na forma reduzida, é do tipo:

$$y = 3x + b$$

Como passa no ponto  $A(0, 1)$ , então  $b = 1$ .

Equação reduzida da reta  $AD$ :  $y = 3x + 1$

**Resposta:**  $y = 3x + 1$



6.2.  $\overline{AB} = \sqrt{(3-0)^2 + (0-1)^2} = \sqrt{10}$

Equação da reta  $BC$ :  $y = 3x + b$

$$0 = 3 \times 3 + b \Leftrightarrow b = -9$$

Assim, a equação da reta  $BC$  é  $y = 3x - 9$ .

O ponto  $C$  tem abcissa 5 e pertence à reta  $y = 3x - 9$ , logo a sua ordenada é:

$$y = 3 \times 5 - 9 = 6$$

Coordenadas do ponto  $C$ :  $(5, 6)$



$$\overline{BC} = \sqrt{(5-3)^2 + (6-0)^2} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$$

Perímetro do retângulo  $[ABCD]$ :  $2(\overline{AB} + \overline{BC}) = 2(\sqrt{10} + 2\sqrt{10}) = 6\sqrt{10}$

**Resposta:**  $6\sqrt{10}$

6.3. Raio da circunferência:  $\overline{AB} = \sqrt{(3-0)^2 + (0-1)^2} = \sqrt{10}$

Equação da circunferência:  $(x-3)^2 + y^2 = 10$

O ponto de interseção da circunferência com o eixo  $Ox$  são do tipo  $(x, 0)$ .

$$(x-3)^2 + 0^2 = 10 \Leftrightarrow x-3 = \sqrt{10} \vee x-3 = -\sqrt{10} \Leftrightarrow x = 3 + \sqrt{10} \vee x = 3 - \sqrt{10}$$

O comprimento da corda é dado por  $|3 + \sqrt{10} - (3 - \sqrt{10})|$ .

$$|3 + \sqrt{10} - (3 - \sqrt{10})| = 2\sqrt{10}$$

**Resposta:** O comprimento da corda é  $2\sqrt{10}$ .

7.  $f(x) = 4 \sin(2x) - 1$

$$f(x) = 1 \wedge x \in [0, 2\pi]$$

$$f(x) = 1 \Leftrightarrow 4 \sin(2x) - 1 = 1 \Leftrightarrow \sin(2x) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin(2x) = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$$

$$2x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee 2x = \pi - \frac{\pi}{6} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{12} + k\pi \vee x = \frac{5\pi}{12} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi + 12k\pi}{12} \vee x = \frac{5\pi + 12k\pi}{12}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

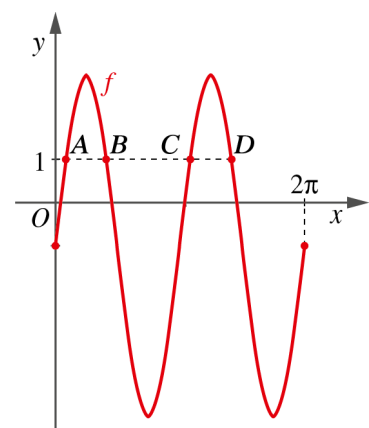
Como  $x \in [0, 2\pi]$ , tem-se:

Se  $k = 0$ :  $x = \frac{\pi}{12}$  e  $\frac{5\pi}{12}$

Se  $k = 1$ :  $x = \frac{13\pi}{12}$  e  $\frac{17\pi}{12}$

A abcissa de  $A$  é  $\frac{\pi}{12}$  e a abcissa de  $D$  é  $\frac{17\pi}{12}$ .

**Resposta:**  $\frac{\pi}{12}$  e  $\frac{17\pi}{12}$



8.

8.1. O plano  $\theta$  é definido por uma equação do tipo  $-2x + y - z + d = 0$ .

Como passa no ponto  $A(-1, 3, 1)$ , tem-se  $2 + 3 - 1 + d = 0$ , ou seja,  $d = -4$ .

Equação do plano  $\theta$ :  $-2x + y - z - 4 = 0$

As coordenadas  $(0, 1, -3)$  são solução da equação.

**Resposta:** Opção correta (D)  $(0, 1, -3)$

8.2. O ponto  $B$  pertence ao eixo  $Oz$  e ao plano  $\alpha$ .

$B(0, 0, z)$

$\alpha$ :  $-2x + y - z = 2$

$0 + 0 - z = 2 \Leftrightarrow z = -2$

$B(0, 0, -2)$  e  $A(-1, 3, 1)$

Seja  $M$  o ponto médio de  $[AB]$  e  $P(x, y, z)$  um ponto genérico do plano mediador de  $[AB]$ .

$$M\left(\frac{0-1}{2}, \frac{0+3}{2}, \frac{-2+1}{2}\right) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right)$$

$$\overline{AB} = B - A = (1, -3, -3)$$

$$\overline{MP} = P - M = \left(x + \frac{1}{2}, y - \frac{3}{2}, z + \frac{1}{2}\right)$$

$$\overline{AB} \cdot \overline{MP} = 0 \Leftrightarrow (1, -3, -3) \cdot \left(x + \frac{1}{2}, y - \frac{3}{2}, z + \frac{1}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x + \frac{1}{2} - 3y + \frac{9}{2} - 3z - \frac{3}{2} = 0 \Leftrightarrow x - 3y - 3z + \frac{7}{2} = 0$$

**Resposta:**  $x - 3y - 3z + \frac{7}{2} = 0$

8.3.  $A(-1, 3, 1)$

As coordenadas do ponto  $A$  são solução da equação  $(x-1)^2 + y^2 + (z+2)^2 = 22$ .

$$(-1-1)^2 + 3^2 + (1+2)^2 = 4 + 9 + 9 = 22$$

Seja  $C$  o centro da superfície esférica e  $P(x, y, z)$  um ponto genérico do plano tangente à superfície esférica no ponto  $A$ .

$C(1, 0, -2)$

$$\overline{CA} \cdot \overline{AP} = 0 \Leftrightarrow (-2, 3, 3) \cdot (x+1, y-3, z-1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -2x - 2 + 3y - 9 + 3z - 3 = 0 \Leftrightarrow -2x + 3y + 3z = 14$$

Plano tangente à superfície esférica no ponto A:  $-2x + 3y + 3z = 14$

**Resposta:**  $-2x + 3y + 3z = 14$

9.

9.1.  $u_n > 0 \wedge u_n < \frac{7}{5} \Leftrightarrow \frac{2n-7}{n+1} > 0 \wedge \frac{2n-7}{n+1} < \frac{7}{5}$

$$2n-7 > 0 \wedge 10n-35 < 7n+7 \Leftrightarrow n > \frac{7}{2} \wedge n < 14$$

Há 10 termos que satisfazem a condição pedida: são os termos consecutivos a começar no de ordem 4 e a acabar no de ordem 13.

**Resposta:** Opção correta (B)      10

9.2.  $u_{n+1} - u_n = \frac{2(n+1)-7}{(n+1)+1} - \frac{2n-7}{n+1} = \frac{2n-5}{n+2} - \frac{2n-7}{n+1} = \frac{9}{(n+2)(n+1)}$

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n > 0$$

Conclui-se que a sucessão é monótona crescente (estritamente).

Como  $\frac{2n-7}{n+1} = 2 - \frac{9}{n+1}$ , conclui-se que todos os termos são menores que 2.

Então, 2 é majorante do conjunto dos termos da sucessão.

**FIM (Caderno 2)**