Novo Espaço – Matemática A, 11.º ano

Proposta de teste de avaliação global [maio de 2021]

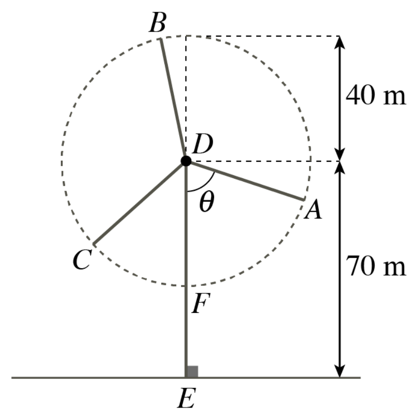
Nome: ____

Ano/Turma: _________ **N.º:** _____ **Data:** ___-____-___

- Não é permitido o uso de corretor. Deves riscar aquilo que pretendes que não seja classificado.
- As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado.

1. Nas regiões mais favoráveis à ocorrência de ventos constroem-se parques eólicos.

Na figura ao lado está representado um esquema de um tipo de aerogerador com as respetivas dimensões.



Em relação ao esquema apresentado, sabe-se que:

- $[ED]$ representa a torre do aerogerador, sendo $\overline{ED} = 70\,\text{m}$;
- os pontos A, B e C são as extremidades das pás, igualmente espaçadas, sendo $\overline{DA} = \overline{DB} = \overline{DC} = 40\,\text{m}$;
- a amplitude, em radianos, do ângulo orientado EDA, durante uma volta completa da pá $[DA]$, é representada por θ, com $\theta \in [0, 2\pi]$.

1.1. Qual é a amplitude, em radianos, do ângulo orientado BDF para $\theta = \frac{\pi}{4}$?

(A) $\frac{7\pi}{12}$ **(B)** $\frac{7\pi}{4}$ **(C)** $\frac{13\pi}{12}$ **(D)** $\frac{7\pi}{6}$

1.2. Seja h a função que a cada valor de θ faz corresponder a distância, em metros, do ponto A ao solo (à reta r), sendo definida por:

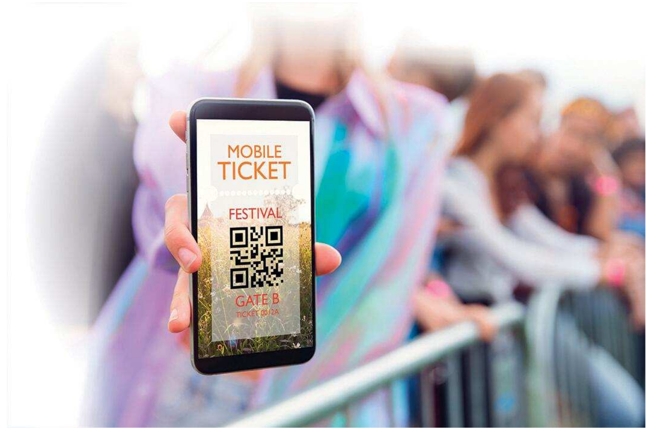
$$h(\theta) = 70 - 40\cos\theta \text{, com } \theta \in [0, 2\pi]$$

Para que valores de θ a distância do ponto A ao solo é $90\,\text{m}$?

2. Para comemorar a inauguração de um parque urbano, realizou-se um concerto musical, com início às 21 horas, tendo sido vendidos 1200 bilhetes.

As portas do recinto foram abertas às 18 horas, três horas antes do início do espetáculo.

Sabe-se que, t horas após a abertura das portas do recinto, o número de espectadores que faltavam entrar é dado pelo seguinte modelo matemático:



$$F(t)=\frac{3600-950t}{t+3}\text{, com } t \text{ em horas}$$

2.1. Calcula $F(2)$ e explica, no contexto, o significado do valor encontrado.

2.2. A que horas o número de espetadores, no recinto, atingiu 75% do número de pessoas que compraram bilhete?

Resolve este problema recorrendo às capacidades gráficas da calculadora.

Na tua resposta, deves:

- indicar uma equação que te permita resolver o problema;
- representar, num referencial, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões), visualizado(s) na calculadora, que te permite(m) resolver a equação, incluindo a janela de visualização;
- apresentar a resposta em horas e minutos, com os minutos arredondados às unidades.

3. Em relação a um referencial o.n. $Oxyz$, considera a superfície esférica definida pela equação $(x+1)^2+(y-1)^2+(z+2)^2=11$ e o plano α, tangente a essa superfície esférica no ponto P de coordenadas $(0,-2,-1)$.

3.1. Sabe-se que $[PT]$ é um diâmetro da superfície esférica.

Quais são as coordenadas do ponto T?

(A) $(-2,4,-3)$ **(B)** $(2,2,-1)$

(C) $(1,-3,-1)$ **(D)** $(-2,0,1)$

3.2. Representa o plano α por uma equação do tipo $ax+by+cz+d=0$, com $a,b,c,d\in\mathbb{R}$.

3.3. A reta r passa no ponto P e tem a direção do vetor $\vec{u}$ de coordenadas $(2,1,-2)$.

Determina as coordenadas do ponto de interseção da reta r com o plano xOz.

4. Considera as sucessões (u_n), (v_n), (w_n), (s_n) e (t_n), tais que:

$$u_n=\frac{3n+2}{2n-1} \quad ; \quad v_n=\frac{n^2-5}{2n+3} \quad ; \quad w_n=\begin{cases}2n & \text{se } n<500\\ 1-n^2 & \text{se } n\geq 500\end{cases} \quad ; \quad s_n=-\frac{1}{n^3} \quad ; \quad t_n=(-1)^n\times 3$$

Das sucessões dadas, indica uma que seja:

4.1. um infinitésimo;

4.2. um infinitamente grande positivo;

4.3. convergente para um número positivo;

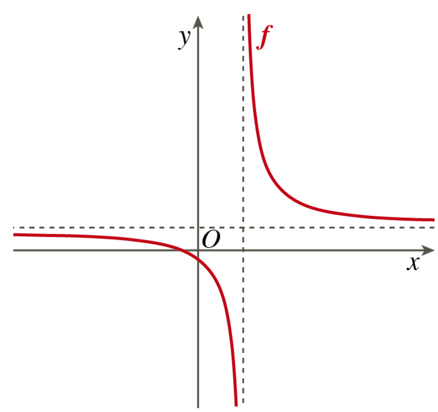
4.4. limitada não convergente;

4.5. um infinitamente grande negativo.

5. A soma dos 13 primeiros termos de uma progressão aritmética, (v_n), é 1027.

Determina a razão dessa progressão aritmética, sabendo que o primeiro termo é 25.

6. Na figura, em referencial o.n. Oxy, estão representadas a função f, de domínio $\mathbb{R}\setminus\{2\}$, definida por $f(x)=\dfrac{x+1}{x-2}$, e as assíntotas ao seu gráfico.



6.1. Seja S o ponto de interseção das assíntotas ao gráfico da função g, sendo $g(x)=2-f(x+1)$.

Quais são as coordenadas do ponto S?

(A) $(-1,\,-1)$ **(B)** $(-1,\,3)$

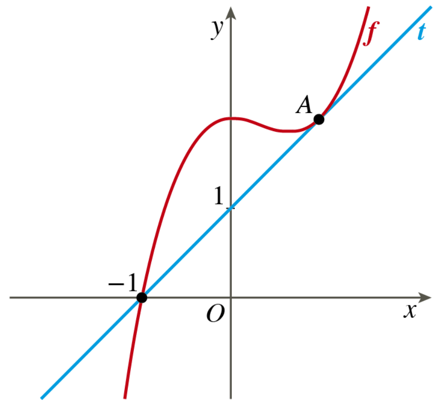
(C) $(2,\,-1)$ **(D)** $(1,\,1)$

6.2. Seja (u_n) a sucessão de termo geral $u_n=\dfrac{1+2n}{n}$. A que é igual $\lim f(u_n)$?

(A) 2 **(B)** $-\infty$ **(C)** 1 **(D)** $+\infty$

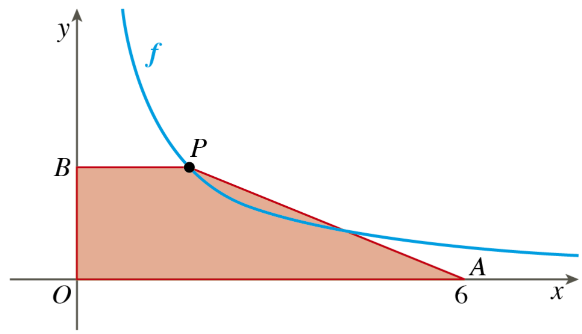
7. Na figura, num referencial o.n. Oxy, estão representados o gráfico de uma função f e uma reta t. Sabe-se que:

- a reta t é tangente ao gráfico de f no ponto A, de abcissa 1;
- a reta t interseta o eixo Oy no ponto de coordenadas $(0, 1)$ e o eixo Ox em $(-1, 0)$.



Determina o valor de $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{f(x) - f(1)}{x - 1}$, explicando os passos da resolução.

8. No referencial o.n. Oxy da figura estão representados o gráfico da função f, de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por $f(x) = \dfrac{3}{x}$, e o trapézio $[OAPB]$. Sabe-se que:



- o ponto A tem coordenadas $(6, 0)$;
- o ponto P pertence ao gráfico de f e tem abcissa $x \in \left]0, 6\right[$;
- o ponto B pertence ao eixo Oy e tem ordenada igual à ordenada do ponto P.

Seja g a função que à abcissa, x, de P faz corresponder a área do trapézio $[OAPB]$.

8.1. Mostra que $g(x) = \dfrac{18 + 3x}{2x}$, com $x \in \left]0, 6\right[$.

8.2. Utiliza o resultado apresentado em **8.1.** e calcula o valor da taxa média de variação da função g no intervalo $[2, 4]$.

9. Seja f a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por: $f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x}{x^2 - 2x} & \text{se } x < 0 \\ x^2 - 3x - 1 & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$

9.1. Calcula, caso exista, $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$.

9.2. Determina a equação reduzida da reta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa 2.

FIM

Questões	1.1.	1.2.	2.1.	2.2.	3.1.	3.2.	3.3.	4.	5.	6.1.	6.2.	7.	8.1.	8.2.	9.1.	9.2.	Total
Cotação (pontos)	10	14	10	14	10	14	14	14	14	10	10	14	12	12	14	14	200

1.1. Sabe-se que $C\hat{D}A = A\hat{D}B = B\hat{D}C = \frac{2\pi}{3}$.

Se $\theta = \frac{\pi}{4}$, então $C\hat{D}F = \frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{12}$.

Como $B\hat{D}F = B\hat{D}C + C\hat{D}F$, tem-se: $B\hat{D}F = \frac{2\pi}{3} + \frac{5\pi}{12} = \frac{13\pi}{12}$.

Resposta: Opção (C) $\frac{13\pi}{12}$

1.2. $h(\theta) = 90 \wedge \theta \in [0,\ 2\pi] \Leftrightarrow 70 - 40\cos\theta = 90 \wedge \theta \in [0,\ 2\pi] \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \cos\theta = -\frac{1}{2} \wedge \theta \in [0,\ 2\pi] \Leftrightarrow \theta = \frac{2\pi}{3} \vee \theta = \frac{4\pi}{3}$

Resposta: $\left\{\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right\}$

2.1. $F(2) = \frac{3600 - 950 \times 2}{2+3} = 340$. Significa que, duas horas após a abertura das portas do recinto, faltavam entrar 340 pessoas.

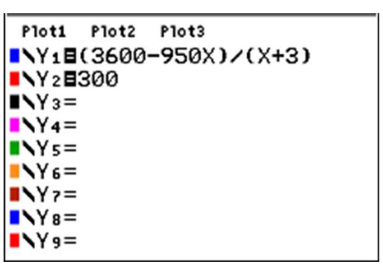
2.2. $F(t) = \frac{3600 - 950t}{t+3}$

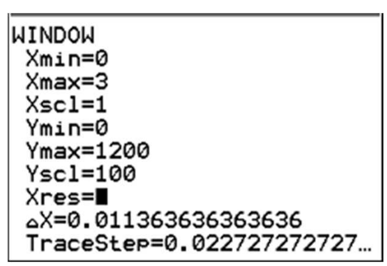
Quando estavam 75% das pessoas no recinto, faltavam entrar 25%.

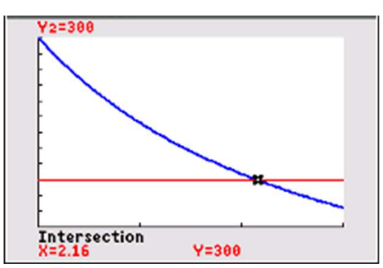
$F(t) = 0{,}25 \times 1200 \Leftrightarrow F(t) = 300$

Visualizam-se, na calculadora gráfica, as representações gráficas das funções definidas por:

$y_1 = \frac{3600 - 950x}{x+3}$ e $y_2 = 300$, com $0 \le x \le 3$ e $0 \le y \le 1200$







$F(t)=300 \Leftrightarrow t=2{,}16$

O ponto de interseção dos gráficos das funções tem coordenadas $(2{,}16;\ 300)$.

$0{,}16\times 60=9{,}6\approx 10$

Ao fim de, aproximadamente, 2 h 10 min após a abertura das portas, faltavam entrar 300 pessoas no recinto.
Assim, o número de espectadores atingiu 75% do número de pessoas que compraram bilhete às 22:10.

3.1. Centro da superfície esférica: $C(-1,1,-2)$

Sejam (a,b,c) as coordenadas do ponto *T*.

O ponto *C* é o ponto médio de [*TP*], sendo $P(0,-2,-1)$.

$$\left(\frac{a+0}{2},\frac{b-2}{2},\frac{c-1}{2}\right)=(-1,1,-2)$$

Daqui resulta que:

$$\begin{cases}\frac{a}{2}=-1\\ \frac{b-2}{2}=1\\ \frac{c-1}{2}=-2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=-2\\ b=4\\ c=-3\end{cases}$$

Resposta: Opção (A) $(-2,4,-3)$

3.2. O plano α é o lugar geométrico dos pontos $Q(x,y,z)$, tais que $\overrightarrow{CP}\cdot\overrightarrow{PQ}=0$.

$\overrightarrow{CP}=P-C=(1,-3,1)$

$\overrightarrow{PQ}=Q-P=(x-0,\ y+2,\ z+1)$

$\overrightarrow{CP}\cdot\overrightarrow{PQ}=0 \Leftrightarrow (1,-3,1)\cdot(x,\ y+2,\ z+1)=0$

$\Leftrightarrow x-3y-6+z+1=0 \Leftrightarrow x-3y+z-5=0$

Resposta: O plano α é definido pela equação $x-3y+z-5=0$.

3.3. A reta *r* pode ser definida pela seguinte equação vetorial:

$(x,y,z)=(0,-2,-1)+k(2,1,-2)\ ,\ k\in\mathbb{R}$

Seja *A* o ponto de interseção da reta *r* com o plano *xOz*.

As coordenadas do ponto *A* são do tipo $(x,0,z)$.

Como o ponto A pertence à reta r, então $(x,0,z)=(0,-2,-1)+k(2,1,-2)$, $k\in\mathbb{R}$.

$$\begin{cases} x=0+2k \\ 0=-2+k \\ z=-1-2k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2k \\ k=2 \\ z=-5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4 \\ k=2 \\ z=-5 \end{cases}.$$

O ponto A tem coordenadas $(4,0,-5)$.

Resposta: A reta r interseta o plano xOz no ponto de coordenadas $(4,0,-5)$.

4.1. (s_n)

4.2. (v_n)

4.3. (u_n)

4.4. (t_n)

4.5. (w_n)

5. $S_{13}=1017$

$$S_{13}=1027 \Leftrightarrow \frac{v_1+v_{13}}{2}\times 13=1027 \Leftrightarrow v_1+v_{13}=158 \Leftrightarrow v_1+v_1+12r=158 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 25+25+12r=158 \Leftrightarrow 12r=108 \Leftrightarrow r=9$$

Resposta: A razão da progressão aritmética é 9.

6.1. $f(x)=\dfrac{x+1}{x-2}=1+\dfrac{3}{x-2}$

Equações das assíntotas ao gráfico de *f*:

assíntota vertical: $x=2$; assíntota horizontal: $y=1$

Equações das assíntotas ao gráfico da função definida por:

- $y=f(x+1)$:

  assíntota vertical: $x=1$; assíntota horizontal: $y=1$

- $y=-f(x+1)$:

  assíntota vertical: $x=1$; assíntota horizontal: $y=-1$

- $g(x)=2-f(x+1)$:

  assíntota vertical: $x=1$; assíntota horizontal: $y=1$

O ponto S tem coordenadas $(1,\ 1)$.

Resposta: Opção (D) $(1,\ 1)$

6.2. $u_n = \frac{1+2n}{n} = 2 + \frac{1}{n}$

$\lim u_n = \lim\left(2 + \frac{1}{n}\right) = 2^+$

$\lim f(u_n) = \lim \frac{u_n + 1}{u_n - 2} = \frac{3}{0^+} = +\infty$

Resposta: Opção (D) $+\infty$

7. A reta *t* é definida por uma equação do tipo $y = mx + 1$.

O ponto de coordenadas $(-1,\ 0)$ pertence à reta *t*. Então, $0 = m \times (-1) + 1$. Daqui resulta que $m = 1$.

$\lim\limits_{x \to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$ representa a derivada da função *f* no ponto de abcissa 1, que é igual ao declive da reta tangente ao gráfico de *f* nesse ponto.

Assim, conclui-se que $\lim\limits_{x \to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = 1$.

8.1. A área do trapézio é dada por $\frac{\overline{OA} + \overline{BP}}{2} \times \overline{OB}$.

$\overline{OA} = 6$; $\overline{BP} = x$ (abcissa de *P*); $\overline{OB} = f(x) = \frac{3}{x}$ (ordenada de *P*)

Então, $g(x) = \frac{6+x}{2} \times \frac{3}{x} = \frac{18+3x}{2x}$.

8.2. A taxa média de variação da função *g* no intervalo $[2,\ 4]$ é dada por:

$$\frac{g(4) - g(2)}{4 - 2} = \frac{\frac{15}{4} - \frac{24}{4}}{2} = -\frac{9}{8}$$

Resposta: A taxa média de variação da função *g* no intervalo $[2,\ 4]$ é igual a $-\frac{9}{8}$.

9.1. $0 \in D_f$

Existe limite da função *f* quando $x \to 0$ se $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = f(0)$.

- $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{2x}{x^2-2x} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{2x}{x(x-2)} = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{2}{x-2} = -1$
- $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} (x^2-3x-1) = 0-0-1 = -1$
- $f(0) = -1$

Resposta: $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -1$

9.2. Seja *P* o ponto de abcissa 2 pertencente ao gráfico de *f*.

As coordenadas do ponto *P* são $(2, f(2))$, ou seja, $(2, -3)$.

O declive da reta tangente ao gráfico de *f* no ponto *P* é igual a $f'(2)$.

$$f'(2) = \lim_{x\to 2} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{x^2-3x+2}{x-2} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x-1)}{x-2} = \lim_{x\to 2}(x-1) = 1$$

A equação da reta tangente em $P(2,-3)$ é do tipo $y = x + b$.

O ponto *P* pertence à reta, então:

$-3 = 2 + b \Leftrightarrow b = -5$

Resposta: $y = x - 5$