

Teste N.º 3

Matemática A

12.º Ano de Escolaridade

Nome do aluno: _____ N.º: ____ Turma: ____

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta.

Não é permitido o uso de corretor. Risque aquilo que pretende que não seja classificado.

É permitido o uso de calculadora.

Apresente apenas uma resposta para cada item.

As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado.

Na resposta aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Escreva na folha de respostas o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Na resposta aos restantes itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias. Quando para um resultado não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

Formulário

Comprimento de um arco de circunferência

αr (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

Área de um polígono regular: Semiperímetro \times Apótema

Área de um setor circular:

$\frac{\alpha r^2}{2}$ (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

Área lateral de um cone: $\pi r g$ (r – raio da base;

g – geratriz)

Área de uma superfície esférica: $4 \pi r^2$ (r – raio)

Volume de uma pirâmide: $\frac{1}{3} \times$ Área da base \times Altura

Volume de um cone: $\frac{1}{3} \times$ Área da base \times Altura

Volume de uma esfera: $\frac{4}{3} \pi r^3$ (r – raio)

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma progressão (u_n)

Progressão aritmética: $\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$

Progressão geométrica: $u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$

Trigonometria

$\text{sen}(a + b) = \text{sen } a \cos b + \text{sen } b \cos a$

$\text{cos}(a + b) = \text{cos } a \cos b - \text{sen } a \text{sen } b$

Complexos

$(r e^{i\theta})^n = r^n e^{in\theta}$

$\sqrt[n]{r e^{i\theta}} = \sqrt[n]{r} e^{i(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n})}$ ($k \in \{0, \dots, n - 1\}$ e $n \in \mathbb{N}$)

Regras de derivação

$(u + v)' = u' + v'$

$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$

$(u^n)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u' (n \in \mathbb{R})$

$(\text{sen } u)' = u' \cdot \text{cos } u$

$(\text{cos } u)' = -u' \cdot \text{sen } u$

$(\text{tg } u)' = \frac{u'}{\text{cos}^2 u}$

$(e^u)' = u' \cdot e^u$

$(a^u)' = u' \cdot a^u \cdot \ln a$ ($a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$)

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \cdot \ln a}$ ($a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$)

Limites notáveis

$\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$ ($n \in \mathbb{N}$)

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } x}{x} = 1$

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty$ ($p \in \mathbb{R}$)

1. Um baralho de cartas completo é constituído por 52 cartas, repartidas em 4 naipes (Espadas, Copas, Ouros e Paus). Em cada naipe há 13 cartas: um Ás, três figuras (Rei, Dama e Valete) e mais 9 cartas (do Dois ao Dez).

Retiraram-se cinco cartas do baralho, que são colocadas lado a lado, em cima de uma mesa, segundo a ordem pela qual vão sendo retiradas.

- 1.1. Determine a probabilidade de, dessas cinco cartas retiradas, exatamente quatro serem do naipe de copas.

Apresente o resultado sob a forma de dízima com aproximação às centésimas.

- 1.2. Quantas sequências se podem formar com as cinco cartas retiradas, caso a primeira carta e a última carta sejam ases e as restantes sejam figuras?

(A) 158 400

(B) 158 840

(C) 13 200

(D) 1320

2. Dos alunos de uma turma de 12.^o ano, sabe-se que:

- um terço dos alunos é do sexo masculino;
- $\frac{1}{4}$ dos alunos é do sexo masculino e vai para uma estância de esqui nas férias de Natal;
- três em cada sete alunos que vão para uma estância de esqui nas férias de Natal são rapazes.

- 2.1. Escolheu-se, ao acaso, um aluno dessa turma.

Determine a probabilidade de o aluno escolhido ser uma rapariga e não ir para uma estância de esqui nas férias de Natal. Apresente o resultado na forma de fração irredutível.

- 2.2. A diretora de turma vai selecionar, ao acaso, dois alunos para representar a turma e discursar no jantar de Natal.

Sabe-se que a probabilidade de se escolher um rapaz e uma rapariga é $\frac{32}{69}$.

Determine o número de alunos do sexo feminino dessa turma.

Para resolver este problema, percorra as seguintes etapas:

- equacione o problema;
- resolva a equação, sem utilizar calculadora, a não ser para eventuais cálculos numéricos.

3. De uma determinada linha do triângulo de Pascal, sabe-se que a soma de todos os elementos dessa linha é igual a 4096.

Escolheram-se, ao acaso, dois elementos dessa linha. A probabilidade de a diferença entre os números escolhidos ser igual a zero é:

(A) $\frac{1}{11}$

(B) $\frac{2}{11}$

(C) $\frac{1}{13}$

(D) $\frac{2}{13}$



4. Seja f a função, de domínio $]-\infty, 1[$, definida por $f(x) = \sqrt{1-x} - x$.

4.1. Recorrendo a processos exclusivamente analíticos, mostre que o gráfico da função f tem a concavidade voltada para baixo em todo o seu domínio.

4.2. Na figura encontra-se a representação gráfica da função g , de domínio $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. As retas de equação $x = 0$, $y = 0$ e $y = 1$ são assíntotas ao gráfico de g .

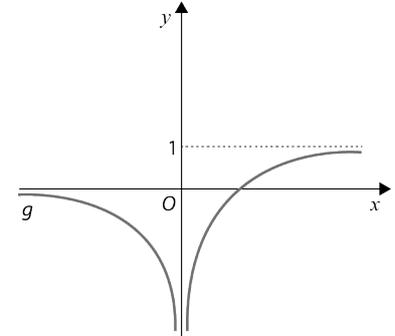
Qual das seguintes afirmações é falsa?

(A) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$

(B) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)}{f(x)} = -\infty$

(C) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$

(D) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{g(x)}{f(x)} = 0$



4.3. Considere agora a função h definida por $h(x) = \frac{f(x)}{x}$.

Sem recorrer à calculadora, estude a função h quanto à existência de assíntotas ao seu gráfico e, caso exista(m), escreva a(s) sua(s) equação(ões).

5. Seja f a função, de domínio \mathbb{R} , definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \cos^2 x - \sin x & \text{se } x \geq 0 \\ \frac{\cos^4 x - 1}{2x} + 2k & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

5.1. Em qual das opções seguintes se encontra um valor real de k para o qual a função f é contínua?

(A) 0

(B) $\frac{1}{2}$

(C) 1

(D) 2

5.2. Sem recorrer à calculadora, estude a função f quanto à monotonia, no intervalo $]0, \frac{3\pi}{2}]$, e determine, caso existam, os extremos relativos.

Na sua resposta, apresente o(s) intervalo(s) de monotonia.

5.3. Seja t a reta tangente ao gráfico de f no ponto de abscissa π .

Seja p a reta perpendicular à reta t e que interseja o eixo das abcissas no mesmo ponto que a reta t .

Qual é a equação reduzida da reta p ?

(A) $y = x + 1 - \pi$

(B) $y = x + \pi - 1$

(C) $y = -x + 1 - \pi$

(D) $y = -x + \pi - 1$

6. Seja f a função, de domínio $[-1, +\infty[$, definida por $f(x) = \sqrt{x+1} - 1$.

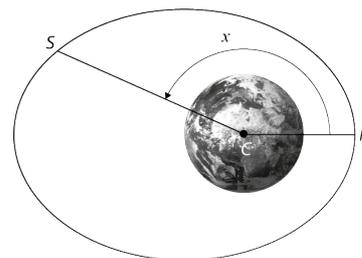
Para cada número real a , pertencente ao intervalo $]\frac{1}{4}, 1[$, sejam A e B os pontos do gráfico de f de abscissas a e $2a$, respetivamente.

Mostre que existe, pelo menos, um número real a pertencente ao intervalo $]\frac{1}{4}, 1[$ para o qual a reta AB é paralela à reta definida por $y = ax$. Se utilizar a calculadora, em eventuais cálculos numéricos, sempre que proceder a arredondamentos, use três casas decimais.

7. Um satélite S tem uma órbita elíptica em torno da Terra, tal como se ilustra na figura abaixo.

Relativamente a esta figura, tem-se que:

- o ponto S representa o satélite;
- o ponto C representa o centro da Terra;
- o ponto P representa o Perigeu, que é o ponto da órbita mais próximo do centro da Terra;
- x é a amplitude do ângulo PCS , compreendida entre 0 e 360 graus.



A distância d , em milhares de quilómetros, do satélite ao centro da Terra, em função da amplitude x do ângulo PCS , é dada por:

$$d(x) = \frac{8,63}{1 + 0,09 \cos x}$$

Seja α a amplitude do ângulo PCS , num certo instante (está compreendido entre 0 e 120 graus). Nesse instante, o satélite encontra-se a uma certa distância do centro da Terra. Passado algum tempo, a amplitude do ângulo PCS é três vezes maior e a distância do satélite ao centro da Terra diminuiu 10%

Determine, recorrendo às capacidades gráficas da calculadora, o valor de α , sabendo que esse valor existe e é único.

Na sua resposta:

- equacione o problema;
- reproduza, num referencial, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora que lhe permite(m) resolver a equação;
- apresente o valor de α em graus, arredondado às décimas.

FIM

COTAÇÕES

Item													
Cotação (em pontos)													
1.1.	1.2.	2.1.	2.2.	3.	4.1.	4.2.	4.3.	5.1.	5.2.	5.3.	6.	7.	Total
8	20	20	20	8	20	8	20	8	20	8	20	20	200

TESTE N.º 3 – Proposta de resolução

1.

1.1. O número de casos possíveis pode ser dado por: ${}^{52}A_5$

O número de casos favoráveis pode ser dado por: ${}^{13}C_4 \times {}^{39}C_1 \times 5!$

Logo, a probabilidade é igual a $\frac{{}^{13}C_4 \times {}^{39}C_1 \times 5!}{{}^{52}A_5} = \frac{3\,346\,200}{311\,875\,200} = \frac{143}{13\,328} \approx 0,01$.

1.2. Opção (B)

$$\begin{array}{c} \underline{A} \quad \underline{F} \quad \underline{F} \quad \underline{F} \quad \underline{A} \\ 4 \times 12 \times 11 \times 10 \times 3 = {}^4A_2 \times {}^{12}A_3 = 12 \times 1320 = 15\,840 \end{array}$$

2.

2.1. Consideremos os acontecimentos:

M : “ser do sexo masculino”

S : “ir para uma estância de esqui nas férias de Natal”

Sabemos que:

- $P(M) = \frac{1}{3}$
- $P(M \cap S) = \frac{1}{4}$
- $P(M|S) = \frac{3}{7}$

Pretendemos determinar $P(\overline{M} \cap \overline{S})$.

$$\begin{aligned} P(M|S) = \frac{3}{7} &\Leftrightarrow \frac{P(M \cap S)}{P(S)} = \frac{3}{7} \Leftrightarrow \frac{\frac{1}{4}}{P(S)} = \frac{3}{7} \\ &\Leftrightarrow \frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{7}} = P(S) \\ &\Leftrightarrow P(S) = \frac{7}{12} \end{aligned}$$

Organizando toda a informação numa tabela:

	M	\overline{M}	Total
S	$\frac{1}{4}$		$\frac{7}{12}$
\overline{S}			$\frac{5}{12}$
Total	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	1

$$\begin{aligned} P(\overline{M}) &= 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \\ P(\overline{S}) &= 1 - \frac{7}{12} = \frac{5}{12} \end{aligned}$$

$$P(\bar{S} \cap M) = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$$

	M	\bar{M}	Total
S	$\frac{1}{4}$		$\frac{7}{12}$
\bar{S}	$\frac{1}{12}$		$\frac{5}{12}$
Total	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	1

$$P(\bar{S} \cap \bar{M}) = \frac{5}{12} - \frac{1}{12} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

	M	\bar{M}	Total
S	$\frac{1}{4}$		$\frac{7}{12}$
\bar{S}	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{5}{12}$
Total	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	1

Logo, a probabilidade pedida é igual a $\frac{1}{3}$.

2.2. Uma vez que um terço dos alunos é do sexo masculino, se n for o número total de alunos da turma, então $\frac{1}{3}n$ é o número de rapazes da turma. Assim:

$$\frac{\frac{1}{3}n \times \frac{2}{3}n}{{}^nC_2} = \frac{32}{69} \Leftrightarrow \frac{\frac{2}{9}n^2}{\frac{n(n-1)}{2}} = \frac{32}{69} \Leftrightarrow \frac{4n^2}{9n(n-1)} = \frac{32}{69}$$

$$\Leftrightarrow \frac{4n}{9(n-1)} = \frac{32}{69}$$

$$\Leftrightarrow 276n = 288n - 288$$

$$\Leftrightarrow -12n = -288$$

$$\Leftrightarrow n = 24$$

Como o número total de alunos da turma é igual a 24, então $\frac{2}{3} \times 24 = 16$ é o número de raparigas da turma.

3. Opção (C)

$$2^n = 4096 \Leftrightarrow 2^n = 2^{12} \Leftrightarrow n = 12$$

Sabemos tratar-se da linha de ordem $n = 12$, logo existem 13 elementos.

O número de casos possíveis é dado por ${}^{13}C_2$.

O número de casos favoráveis é dado por 6×1 , pois, dos 13 elementos, existem 6 conjuntos de dois elementos iguais (${}^{12}C_0 = {}^{12}C_{12}$, ${}^{12}C_1 = {}^{12}C_{11}$, ${}^{12}C_2 = {}^{12}C_{10}, \dots, {}^{12}C_5 = {}^{12}C_7$).

Assim, a probabilidade pedida é igual a $\frac{6}{{}^{13}C_2} = \frac{6}{78} = \frac{1}{13}$.



4.

4.1. $f(x) = \sqrt{1-x} - x$

No domínio considerado, tem-se que:

$$\begin{aligned} f'(x) &= (\sqrt{1-x} - x)' = \left((1-x)^{\frac{1}{2}} \right)' - x' = \frac{1}{2}(1-x)^{\frac{1}{2}-1} \times (1-x)' - 1 = \\ &= -\frac{1}{2}(1-x)^{-\frac{1}{2}} - 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f''(x) &= \left(-\frac{1}{2}(1-x)^{-\frac{1}{2}} - 1 \right)' = -\frac{1}{2} \times \left(-\frac{1}{2} \right) \times (1-x)^{-\frac{1}{2}-1} \times (1-x)' - 0 = \\ &= \frac{1}{4} \times (1-x)^{-\frac{3}{2}} \times (-1) = \\ &= -\frac{1}{4} \times (1-x)^{-\frac{3}{2}} = \\ &= -\frac{1}{4\sqrt{(1-x)^3}} \end{aligned}$$

Como $f''(x) < 0, \forall x \in]-\infty, 1[$, conclui-se que o gráfico de f tem a concavidade voltada para baixo em todo o seu domínio.

4.2. Opção (C)

Temos que $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \sqrt{1-0} - 0 = 1$ e $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = -\infty$.

Assim:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1}{-\infty} = 0 \quad (\text{a opção (A) é verdadeira.})$$

e:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)}{f(x)} = \frac{-\infty}{1} = -\infty \quad (\text{a opção (B) é verdadeira.})$$

Também sabemos que:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \sqrt{1 - (-\infty)} - (-\infty) = +\infty + (+\infty) = +\infty$$

e:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = 0^-$$

Assim, $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{+\infty}{0^-} = -\infty$ e não $+\infty$, como é apresentado na opção (C) que é, por isso,

falsa.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{g(x)}{f(x)} = \frac{0^-}{+\infty} = 0 \quad (\text{a opção (D) é verdadeira.})$$

4.3. $h(x) = \frac{f(x)}{x} = \frac{\sqrt{1-x}-x}{x} \quad D_h =]-\infty, 1[\setminus\{0\}$

- **Assíntotas verticais**

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} h(x) = \frac{\sqrt{1-1}-1}{1} = -1$$



$$\lim_{x \rightarrow 0} h(x) = \frac{\sqrt{1-0} - 0}{0} = \frac{1}{0}$$

Se $x \rightarrow 0^+$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = +\infty$.

Se $x \rightarrow 0^-$, $\lim_{x \rightarrow 0^-} h(x) = -\infty$.

A reta de equação $x = 0$ é assíntota vertical ao gráfico de h e é a única assíntota vertical, visto a função h ser contínua em todos os pontos do seu domínio, já que se trata do quociente de funções contínuas.

• Assíntotas não verticais

Como o domínio de h é limitado superiormente, só faz sentido procurar assíntota não vertical quando $x \rightarrow -\infty$:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{1-x} - x}{x} \stackrel{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{\sqrt{1-x}}{x} - \frac{x}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} \right)}}{x} - 1 = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x| \sqrt{\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x}}}{x} - 1 = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x \sqrt{\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x}}}{x} - 1 = \\ &= -\sqrt{\frac{1}{+\infty} - \frac{1}{-\infty}} - 1 = \\ &= -\sqrt{0} - 1 = \\ &= -1 \end{aligned}$$

A reta de equação $y = -1$ é assíntota horizontal ao gráfico de h quando $x \rightarrow -\infty$.

5.

5.1. Opção (B)

f é contínua em $x = 0$ se existir $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$, isto é, se $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0)$.

- $f(0) = \cos^2 0 - \sin 0 = 1 - 0 = 1$

- $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\cos^2 x - \sin x) = 1$

- $\lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{\cos^4 x - 1}{2x} + 2k \right) \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{(\cos^2 x + 1)(\cos^2 x - 1)}{2x} + 2k =$
 $= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\cos^2 x + 1}{2} \times \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\cos^2 x - 1}{x} + 2k =$
 $= \frac{1+1}{2} \times \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-\sin^2 x}{x} + 2k =$

$$\begin{aligned}
&= -1 \times \underbrace{\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\text{sen}x}{x}}_{\text{limite notável}} \times \lim_{x \rightarrow 0^-} \text{sen}x + 2k = \\
&= -1 \times 1 \times \text{sen}0 + 2k = \\
&= 2k
\end{aligned}$$

Para que $2k = 1$, tem-se que $k = \frac{1}{2}$.

5.2. Em $]0, \frac{3\pi}{2}]$, tem-se que:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= (\cos^2 x - \text{sen}x)' = 2\cos x \times (\cos x)' - (\text{sen}x)' = \\
&= 2\cos x \times (-\text{sen}x) - \cos x = \\
&= -2\text{sen}x \times \cos x - \cos x
\end{aligned}$$

$$f'(x) = 0$$

$$-2\text{sen}x \cos x - \cos x = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos x(-2\text{sen}x - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos x = 0 \vee -2\text{sen}x - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos x = 0 \vee \text{sen}x = -\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi \vee x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Em $]0, \frac{3\pi}{2}]$, os zeros de f' são $\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$ e $\frac{7\pi}{6}$.

x	0		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{7\pi}{6}$		$\frac{3\pi}{2}$
Sinal de f'		-	0	+	0	-	0
Variação de f		↘	mín.	↗	Máx.	↘	mín.

Cálculos auxiliares

$$f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = -2\text{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = -2\frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} < 0$$

$$f'(\pi) = -2\text{sen}(\pi)\cos(\pi) - \cos(\pi) = 0 - (-1) = 1 > 0$$

$$f'\left(\frac{5\pi}{4}\right) = -2\text{sen}\left(\frac{5\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) - \cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) = -2 \times \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \times \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -1 + \frac{\sqrt{2}}{2} < 0$$

$$f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \cos^2\left(\frac{3\pi}{2}\right) - \text{sen}\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0 - (-1) = 1$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \cos^2\left(\frac{\pi}{2}\right) - \text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 - 1 = -1$$

$$f\left(\frac{7\pi}{6}\right) = \cos^2\left(\frac{7\pi}{6}\right) - \text{sen}\left(\frac{7\pi}{6}\right) = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4} + \frac{1}{2} = \frac{5}{4}$$

f é decrescente em $]0, \frac{\pi}{2}]$ e em $[\frac{7\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}]$. f é crescente em $[\frac{\pi}{2}, \frac{7\pi}{6}]$.

-1 e 1 são mínimos de f e $\frac{5}{4}$ é máximo.

5.3. Opção (D)

A equação reduzida da reta t é da forma $y = mx + b$, onde $m = f'(\pi)$.

Como, para $x > 0$, se tem $f'(x) = -2\operatorname{sen}x\cos x - \cos x$ (determinado na alínea anterior), então $m = f'(\pi) = -2\operatorname{sen}\pi\cos\pi - \cos\pi = 0 - (-1) = 1$.

Assim, $y = x + b$.

Como o ponto de coordenadas $(\pi, f(\pi)) = (\pi, 1)$

pertence à reta t , então:

$$1 = \pi + b \Leftrightarrow b = 1 - \pi$$

Assim, $y = x + 1 - \pi$ é a equação reduzida da reta t .

A interseção da reta t com o eixo das abcissas é o ponto de coordenadas $(\pi - 1, 0)$, já que:

$$0 = x + 1 - \pi \Leftrightarrow x = \pi - 1$$

Assim, a equação reduzida da reta p é da forma $y = mx + b$, onde $m = -\frac{1}{m_t} = -1$.

Logo, $y = -x + b$.

Como o ponto $(\pi - 1, 0)$ pertence à reta p , então:

$$0 = -(\pi - 1) + b \Leftrightarrow b = \pi - 1$$

A equação reduzida da reta p é $y = -x + \pi - 1$.

Cálculo auxiliar

$$f(\pi) = \cos^2\pi - \operatorname{sen}\pi = 1 - 0 = 1$$

6. Começemos por determinar o declive da reta AB : $A(a, \sqrt{a+1} - 1)$ e $B(2a, \sqrt{2a+1} - 1)$

$$m_{AB} = \frac{\sqrt{2a+1} - 1 - \sqrt{a+1} + 1}{2a - a} = \frac{\sqrt{2a+1} - \sqrt{a+1}}{a}$$

A reta AB será paralela à reta definida por $y = ax$ se e só se $\frac{\sqrt{2a+1} - \sqrt{a+1}}{a} = a$, o que é equivalente a $\frac{\sqrt{2a+1} - \sqrt{a+1}}{a} - a = 0$.

Consideremos a função g , de domínio $\left[\frac{1}{4}, 1\right]$, definida por $g(x) = \frac{\sqrt{2x+1} - \sqrt{x+1}}{x} - x$.

• g é contínua em $\left[\frac{1}{4}, 1\right]$, por se tratar da diferença entre duas funções contínuas.

$$\bullet g\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{\sqrt{\frac{1}{2}+1} - \sqrt{\frac{1}{4}+1}}{\frac{1}{4}} - \frac{1}{4} = 4\left(\sqrt{\frac{3}{2}} - \sqrt{\frac{5}{4}}\right) - \frac{1}{4} \approx 0,177$$

$$g(1) = \frac{\sqrt{2+1} - \sqrt{1+1}}{1} - 1 = \sqrt{3} - \sqrt{2} - 1 \approx -0,682$$

$$g(1) < 0 < g\left(\frac{1}{4}\right)$$

Logo, pelo teorema de Bolzano-Cauchy, concluímos que:

$$\exists a \in \left[\frac{1}{4}, 1\right] : g(a) = 0$$



isto é:

$$\begin{aligned} \exists a \in \left] \frac{1}{4}, 1 \right[: \frac{\sqrt{2a+1} - \sqrt{a+1}}{a} - a = 0 \\ \Leftrightarrow \exists a \in \left] \frac{1}{4}, 1 \right[: \frac{\sqrt{2a+1} - \sqrt{a+1}}{a} = a \end{aligned}$$

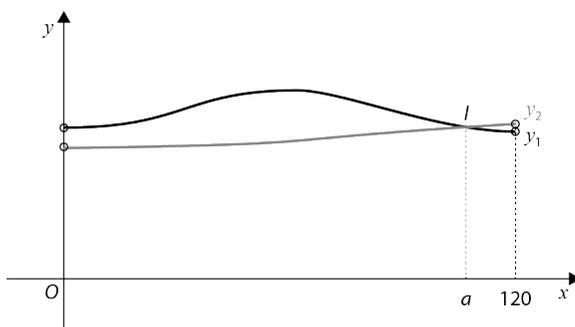
7. Sabemos que:

$$\begin{aligned} d(3\alpha) &= d(\alpha) - 0,1d(\alpha), \quad 0^\circ < \alpha < 120^\circ \\ \Leftrightarrow d(3\alpha) &= 0,9d(\alpha), \quad 0^\circ < \alpha < 120^\circ \\ \Leftrightarrow \frac{8,63}{1+0,09\cos(3\alpha)} &= 0,9 \times \frac{8,63}{1+0,09\cos(\alpha)} \end{aligned}$$

Recorrendo às capacidades gráficas da calculadora, e usando x como variável independente, tem-se:

$$y_1 = \frac{8,63}{1 + 0,09\cos(3x)}$$

$$y_2 = \frac{0,9 \times 8,63}{1 + 0,09\cos(x)}$$



$$\begin{aligned} I(a, b) \\ a \approx 109,7 \end{aligned}$$

O valor de α é, aproximadamente, $109,7^\circ$.