Proposta de Teste [janeiro - 2018]

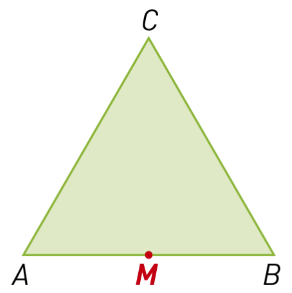
Nome: ____

Ano / Turma: _________ **N.º:** _____ **Data:** ___ / ____ / ___

- Não é permitido o uso de corretor. Deves riscar aquilo que pretendes que não seja classificado.
- A prova inclui um formulário.
- As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.

CADERNO 1
(É permitido o uso de calculadora gráfica)

1. Na figura está representado um triângulo equilátero [*ABC*], sendo *M* o ponto médio de [*AB*].



Sabe-se que $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{AM}=-72{,}25$.

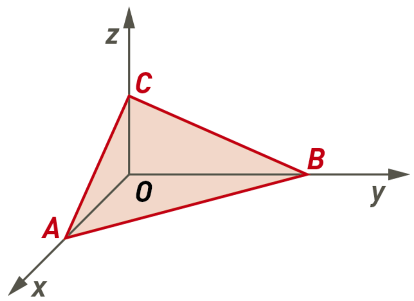
O perímetro do triângulo [*ABC*] é igual a:

(A) 51 **(B)** 39 **(C)** 289 **(D)** 25,5

2. No espaço, em relação a um referencial ortonormado *Oxyz*, sabe-se que o plano α definido pela equação $x-2y+z-3=0$ é tangente a uma esfera de centro $C(-1,\ 0,\ 1)$.

Determina o volume da esfera. Apresenta o resultado arredondado às centésimas.

3. Na figura está representado, em referencial ortonormado *Oxyz*, o triângulo [*ABC*].



Os vértices *A*, *B* e *C* são a interseção do plano α definido pela equação $x+\frac{4}{5}y+2z-4=0$, respetivamente, com os eixos *Ox*, *Oy* e *Oz*.

3.1. Escreve uma equação do plano β que passa no ponto $T(-1,\ 0,\ 3)$ e é paralelo ao plano α .

3.2. Determina a amplitude do ângulo formado pelos vetores $\overrightarrow{CA}$ e $\overrightarrow{CB}$. Apresenta o resultado em graus arredondado às décimas.

4. Seja (u_n) a sucessão definida por:

$$\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = 3 + 2u_n\ , \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

4.1. Sabe-se que $u_{15} = 65\,533$.

Podes concluir que u_{14} é igual a:

(A) 131 069 **(B)** $32\,765$ **(C)** 131 060 **(D)** $32\,768$

4.2. Sabe-se que a diferença entre dois termos consecutivos é igual a 2048 .

Determina a soma desses dois termos.

FIM (Caderno 1)

Cotações							Total
Questões - Caderno 1	**1.**	**2.**	**3.1.**	**3.2.**	**4.1.**	**4.2.**	
Pontos	10	15	15	20	10	10	**80**

CADERNO 2
(Não é permitido o uso de calculadora gráfica)

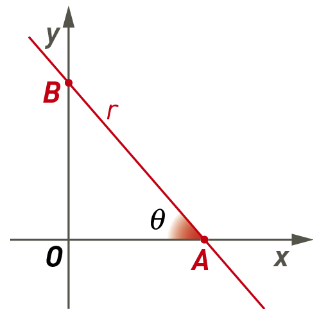
5. Em relação a um referencial ortonormado *xOy* considera a reta *r* definida pela equação vetorial $(x,y)=(-2,3)+k(1,-4)$, $k\in\mathbb{R}$.

Seja *P* o ponto da reta *r* de abcissa -3 .

Determina, na forma reduzida, a equação da reta *s* que é perpendicular à reta *r* no ponto *P*.

6. Na figura, em referencial ortonormado *xOy*, está representada uma reta *r* que interseta o eixo *Ox* no ponto *A* e o eixo *Oy* no ponto *B*.
Sabe-se que:

- $B\hat{A}O=\theta \quad (0^\circ<\theta<90^\circ)$
- $\sin\theta=\frac{3}{4}$



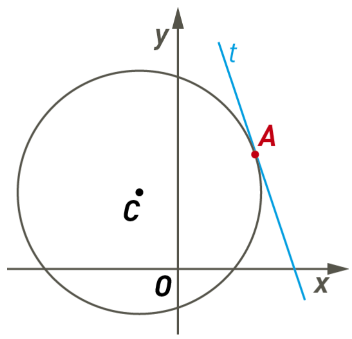
O declive da reta *r* é igual a:

(A) $\frac{3}{4}$ **(B)** $-\frac{\sqrt{7}}{3}$ **(C)** $-1{,}13$ **(D)** $-\frac{3\sqrt{7}}{7}$

7. Na figura, em referencial ortonormado *xOy*, estão representadas uma circunferência de centro *C* e que passa em *A* e uma reta *t* tangente à circunferência no ponto *A*.

Sabe-se que:

- as coordenadas de *A* são $(2,3)$;
- a circunferência é definida pela equação $x^2+2x+y^2-4y=5$;



Determina uma equação, na forma reduzida, da reta *t*.

8. Em relação a um referencial *Oxyz*, considera os vetores $\vec{u}(1,k,k+1)$ e $\vec{v}(2k,0,k)$, com $k\in\mathbb{R}$.

Os valores de k para os quais o ângulo formado pelos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é obtuso são:

(A) $]-3,0[$ **(B)** $]-\infty,0[$ **(C)** $]-\infty,3[$ **(D)** $\left]0,\frac{1}{3}\right[$

9. No espaço, em relação a um referencial ortonormado *Oxyz*, considera:

- o plano α definido pela equação $-2x+y+3z-2=0$;
- a reta *r* definida por $(x,y,z)=(1,-2,-1)+k(3,-1,2) \ , \ k\in\mathbb{R}$;
- os pontos $A(0,2,-3)$ e $B(1,-2,2)$.

9.1. Determina, na forma $ax+by+cz+d=0$, uma equação do plano mediador de [*AB*].

9.2. A reta *r* interseta o plano α num ponto *T*. Determina as coordenadas do ponto *T*.

9.3. O plano α é tangente à superfície esférica de diâmetro [*AB*], no ponto *B*? Justifica.

10. Considera a sucessão (u_n) de termo geral $u_n=\dfrac{2n-3}{n+1}$.

10.1. Justifica as seguintes afirmações:

a) “ 0 (zero) não é minorante do conjunto dos termos da sucessão.”

b) “ 2 é majorante do conjunto dos termos da sucessão”.

10.2. Mostra que a sucessão é monótona e limitada.

FIM (Caderno 2)

Cotações												
	Caderno 1 (com calculadora)											
Questões	**1.**	**2.**	**3.1.**	**3.2.**	**4.1.**	**4.2.**						
Pontos	10	15	15	20	10	10					**Total**	**80**
	Caderno 2 (sem calculadora)											
Questões	**5.**	**6.**	**7.**	**8.**	**9.1.**	**9.2.**	**9.3.**	**10.1.a)**	**10.1.b)**	**10.2.**		
Pontos	15	10	15	10	10	15	10	10	10	15	**Total**	**120**
Total												**200**

FORMULÁRIO

GEOMETRIA

Comprimento de um arco de circunferência: αr

(α *– amplitude, em radianos, do ângulo ao centro;* *r – raio)*

Áreas de figuras planas

Polígono regular: *Semiperímetro* $\times$ *Apótema*

Setor circular: $\frac{\alpha r^2}{2}$

(α *– amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio*)

Áreas de superfícies

Área lateral de um cone: $\pi r g$

(*r – raio da base; g – geratriz*)

Área de uma superfície esférica: $4\pi r^2$

(*r – raio*)

Volumes

Pirâmide: $\frac{1}{3} \times$ *Área da base* $\times$ *Altura*

Cone: $\frac{1}{3} \times$ *Área da base* $\times$ *Altura*

Esfera: $\frac{4}{3}\pi r^3$ *(r – raio)*

PROGRESSÕES

Soma dos n primeiros termos de uma progressão (u_n):

Progressão aritmética: $\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$

Progressão geométrica: $u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$

TRIGONOMETRIA

$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$

$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$

$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$

COMPLEXOS

$(\rho \operatorname{cis} \theta)^n = \rho^n \operatorname{cis}(n\theta)$ ou $(\rho e^{i\theta})^n = \rho^n e^{in\theta}$

$\sqrt[n]{\rho \operatorname{cis} \theta} = \sqrt[n]{\rho} \operatorname{cis}\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)$ ou $\sqrt[n]{\rho e^{i\theta}} = \sqrt[n]{\rho}\, e^{\frac{\theta + 2k\pi}{n}}$

$(k \in \{0, \ldots, n-1\}$ e $n \in \mathbb{N})$

PROBABILIDADES

$\mu = p_1 x_1 + \ldots + p_n x_n$

$\sigma = \sqrt{p_1 (x_1 - \mu)^2 + \ldots + p_n (x_n - \mu)^2}$

Se X é $N(\mu, \sigma)$, então:

$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0{,}6827$

$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0{,}9545$

$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 0{,}9973$

REGRAS DE DERIVAÇÃO

$(u+v)' = u' + v'$

$(u\,v)' = u'\,v + u\,v'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'\,v - u\,v'}{v^2}$

$(u^n)' = n\,u^{n-1}\,u' \quad (n \in \mathbb{R})$

$(\sin u)' = u' \cos u$

$(\cos u)' = -u' \sin u$

$(\tan u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u'\,e^u$

$(a^u)' = u'\,a^u \ln a \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a} \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

LIMITES NOTÁVEIS

$\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \quad (n \in \mathbb{N})$

$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \quad (p \in \mathbb{R})$

CADERNO 1
(É permitido o uso de calculadora gráfica)

1. Seja $\left\|\overrightarrow{CA}\right\| = a$.

$\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{AM} = -72,25 \Leftrightarrow \left\|\overrightarrow{CA}\right\| \times \left\|\overrightarrow{AM}\right\| \times \cos\left(120^\circ\right) = -72,25$

$\Leftrightarrow a \times \frac{a}{2} \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -72,25 \Leftrightarrow a^2 = 289$

Como $a > 0$, tem-se: $a = \sqrt{289} = 17$

O perímetro do triângulo [ABC] é igual a $3 \times 17 = 51$.

Resposta: Opção **(A)** 51

2. No espaço, em relação a um referencial ortonormado *Oxyz*, sabe-se que o plano α definido pela equação $x - 2y + z - 3 = 0$ é tangente a uma esfera de centro $C(-1,\ 0,\ 1)$.

Seja r a reta perpendicular a α que passa em $C(-1,0,1)$.

Uma equação vetorial da reta r: $(x, y, z) = (-1,0,1) + k(1,-2,1)$, $k \in \mathbb{R}$

O ponto de interseção da reta r com o plano α é do tipo $(-1+k, -2k, 1+k)$, $k \in \mathbb{R}$.

O ponto pertence ao plano α.

$-1 + k + 4k + 1 + k - 3 = 0 \Leftrightarrow 6k = 3 \Leftrightarrow k = \frac{1}{2}$

Seja T o ponto de interseção da reta r com o plano α.

$T\left(-1+\frac{1}{2}, -1, 1+\frac{1}{2}\right)$, ou seja, $T\left(-\frac{1}{2}, -1, \frac{3}{2}\right)$

O raio da esfera é igual a $\overline{CT} = \sqrt{\left(-1+\frac{1}{2}\right)^2 + (0+1)^2 + \left(1-\frac{3}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + 1 + \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{3}{2}}$.

Seja V o volume da esfera.

$V = \frac{4}{3} \times \pi \times \left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^3$, ou seja, $V \approx 7,695$

Resposta: O volume da esfera, arredondado às centésimas, é 7,70.

3.

3.1. $\beta: \ x+\frac{4}{5}y+2z+d=0 \ , \ d\in\mathbb{R}$

O ponto *T* pertence ao plano *β*, então $-1+0+6+d=0$, ou seja, $d=-5$.

$\beta: \ x+\frac{4}{5}y+2z-5=0$

Resposta: O plano *β* é definido pela equação $x+\frac{4}{5}y+2z-5=0$.

3.2.

Coordenadas do vértice *A*: $(x,0,0)$ tal que $x+0+0-4=0$, ou seja, $x=4$. Assim, $A(4,0,0)$.

Coordenadas do vértice *B*: $(0,y,0)$ tal que $0+\frac{4}{5}y+0-4=0$, ou seja, $y=5$. Assim, $B(0,5,0)$.

Coordenadas do vértice *C*: $(0,0,z)$ tal que $0+0+2z-4=0$, ou seja, $z=2$. Assim, $C(0,0,2)$.

$\overrightarrow{CA}=A-C=(4,0,-2)$

$\overrightarrow{CB}=B-C=(0,5,-2)$

Seja *θ* a amplitude do ângulo formado pelos vetores $\overrightarrow{CA}$ e $\overrightarrow{CB}$.

$$\cos\theta=\frac{\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}}{\left\|\overrightarrow{CA}\right\|\left\|\overrightarrow{CB}\right\|}=\frac{0+0+4}{\sqrt{16+0+4}\sqrt{0+25+4}}=\frac{4}{\sqrt{580}}.$$

$\theta=\arccos\left(\frac{4}{\sqrt{580}}\right)$. Recorrendo à calculadora, obtém-se: $\theta\approx 80,4^\circ$

Resposta: A amplitude do ângulo formado pelos vetores $\overrightarrow{CA}$ e $\overrightarrow{CB}$ é $80,4^\circ$.

4.

4.1. Sabe-se que $u_{15}=65533$.

Como $u_{15}=3+2u_{14}$, tem-se:

$65533=3+2u_{14} \Leftrightarrow u_{14}=32765$

Resposta: Opção (**B**) 32765.

4.2. Sabe-se que a diferença entre dois termos consecutivos é igual a 2048.

$u_{n+1} - u_n = 2048$

$u_{n+1} - u_n = 2048 \Leftrightarrow 3 + 2u_n - u_n = 2048 \Leftrightarrow u_n = 2045$

Sendo $u_n = 2045$, então $u_{n+1} = 3 + 2 \times 2045 = 4093$.

Assim, a soma desses dois termos consecutivos é dada por $2045 + 4093$, ou seja, 6138.

Resposta: A soma dos dois termos consecutivos é 6138.

FIM (Caderno 1)

Cotações							Total
Questões - Caderno 1	**1.**	**2.**	**3.1**	**3.2**	**4.1**	**4.2**	
Pontos	10	15	15	20	10	10	**80**

CADERNO 2
(Não é permitido o uso de calculadora gráfica)

5. Seja P o ponto da reta r de abcissa -3 .

Determina, na forma reduzida, a equação da reta s que é perpendicular à reta r no ponto P.

$P(-3, y)$

$(-3, y)=(-2,3)+k(1,-4)$, $k\in\mathbb{R}$

Daqui resulta:

$$\begin{cases} -3=-2+k \\ y=3-4k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k=-1 \\ y=7 \end{cases}$$

O ponto P tem coordenadas $(-3,7)$.

Um vetor diretor da reta r é, por exemplo, $\vec{r}(1,-4)$.

Declive da reta r: $m_r=\frac{-4}{1}=-4$

Declive da resta s: $m_s=-\frac{1}{m_r}=-\frac{1}{-4}=\frac{1}{4}$

Equação reduzida da reta s: $y=\frac{1}{4}x+b$, $b\in\mathbb{R}$.

A reta s passa pelo ponto $P(-3,7)$. Então, $7=\frac{-3}{4}+b$. Daqui resulta que $b=\frac{31}{4}$.

Equação reduzida da reta s: $y=\frac{1}{4}x+\frac{31}{4}$

Resposta: $y=\frac{1}{4}x+\frac{31}{4}$

6. O declive da reta r é igual a $\tan\left(180^{\circ}-\theta\right)$, ou seja, $-\tan\left(\theta\right)$.

$\cos^2\left(\theta\right)=1-\sin^2\left(\theta\right)=1-\frac{9}{16}=\frac{7}{16}$

Como $0^{\circ}<\theta<90^{\circ}$ e $\cos^2\left(\theta\right)=\frac{7}{16}$, tem-se $\cos\theta=\frac{\sqrt{7}}{4}$.

O declive da reta r é dado por $-\tan\left(\theta\right)=-\frac{\sin\left(\theta\right)}{\cos\left(\theta\right)}=-\frac{3}{4}\times\frac{4}{\sqrt{7}}=-\frac{3\sqrt{7}}{7}$.

Resposta: Opção **(D)** $-\frac{3\sqrt{7}}{7}$

7. Equação da circunferência: $x^2+2x+y^2-4y=5$

$x^2+2x+y^2-4y=5\Leftrightarrow x^2+2x+1+y^2-4y+4=5+1+4\Leftrightarrow\left(x+1\right)^2+\left(y-2\right)^2=10$

Centro da circunferência $C\left(-1,2\right)$.

A reta t é o conjunto de pontos $P\left(x,y\right)$ tais que: $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{AP}=0$

$\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{AP}=0\Leftrightarrow\left(3,1\right).\left(x-2\,,\,y-3\right)=0\Leftrightarrow 3x-6+y-3=0\Leftrightarrow y=-3x+9$

Resposta: A equação da reta t é $y=-3x+9$.

8. O ângulo formado pelos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é obtuso se e só se $\vec{u}.\vec{v}<0$.

$\vec{u}.\vec{v}<0\Leftrightarrow\left(1,k,k+1\right).\left(2k,0,k\right)<0\Leftrightarrow 2k+k^2+k<0\Leftrightarrow k^2+3k<0$

Cálculo auxiliar:

$k^2+3k=0\Leftrightarrow k\left(k+3\right)=0\Leftrightarrow k=0\vee k=-3$

Assim, $k^2+3k<0\Leftrightarrow k\in\left]-3,0\right[$.

Resposta: Opção **(A)** $\left]-3,0\right[$

9.

9.1.

Seja M o ponto médio [*AB*].

$$M\left(\frac{0+1}{2},\frac{2-2}{2},\frac{-3+2}{2}\right)=\left(\frac{1}{2},0,-\frac{1}{2}\right)$$

O plano mediador de [*AB*] é o conjunto dos pontos $P(x,y,z)$, tais que:

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{MP}=0$$

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{MP}=0\Leftrightarrow(1,-4,5).\left(x-\frac{1}{2},y,z+\frac{1}{2}\right)=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x-\frac{1}{2}-4y+5z+\frac{5}{2}=0\Leftrightarrow x-4y+5z+2=0$$

Resposta: O plano mediador de [*AB*] é $x-4y+5z+2=0$.

9.2. Qualquer ponto da reta *r* é do tipo $(1+3k,-2-k,-1+2k)$,$k\in\mathbb{R}$.

Pretende-se o ponto da reta *r* que também pertence ao plano α .

$$-2(1+3k)-2-k+3(-1+2k)-2=0\Leftrightarrow-2-6k-2-k-3+6k-2=0\Leftrightarrow k=-9$$

$$T(1-27,-2+9,-1-18)=(-26,7,-19)$$

Resposta: O ponto *T* tem coordenadas $(-26,7,-19)$.

9.3. Para que o plano α seja tangente à superfície esférica no ponto *B* é necessário que:

$B\in\alpha$ e $\overrightarrow{AB}$ seja normal ao plano α .

$\overrightarrow{AB}$ é normal ao plano α , se e só se, $\overrightarrow{AB}$ e $\vec{u}_\alpha$ são colineares, sendo $\vec{u}_\alpha=(-2,1,3)$.

$\exists k\in\mathbb{R}:\ \overrightarrow{AB}=k\vec{u}_\alpha$?

$(1,-4,5)=k(-2,1,3),\ k\in\mathbb{R}$

Daqui resulta que:

$$\begin{cases} -2k = 1 \\ k = -4 \\ 3k = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = -\dfrac{1}{2} \\ k = -4 \\ k = \dfrac{5}{3} \end{cases}$$. Sistema impossível.

Conclui-se que os vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\vec{u}_\alpha$ não são colineares.

Assim, o plano α não pode ser tangente à superfície esférica no ponto *B*.

Resposta: O plano α não é tangente à superfície esférica no ponto *B*.

10.

10.1.

a) " 0 (zero) não é minorante do conjunto dos termos da sucessão."

O primeiro termo da sucessão é negativo, pois $u_1 = -\frac{1}{2}$, donde se conclui que 0 não é minorante do conjunto dos termos da sucessão.

b) " 2 é majorante do conjunto dos termos da sucessão".

Repara que:

$$\begin{array}{r|l} 2n-3 & n+1 \\ \cline{2-2} -2n-2 & 2 \\ \hline -5 & \end{array}$$

$$\frac{2n-3}{n+1} = 2 - \frac{5}{n+1}$$, em que $\forall n \in \mathbb{N},\ \frac{5}{n+1} > 0$

Então, $\forall n \in \mathbb{N},\ \frac{2n-3}{n+1} < 2$. Conclui-se que 2 é majorante do conjunto dos termos da sucessão.

10.2. $$u_{n+1} - u_n = \frac{2(n+1)-3}{n+2} - \frac{2n-3}{n+1} = \frac{(2n-1)(n+1)-(2n-3)(n+2)}{(n+2)(n+1)} = \frac{5}{(n+2)(n+1)}$$

$\forall n \in \mathbb{N},\ \frac{5}{(n+2)(n+1)} > 0$

$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} - u_n > 0$. A sucessão (u_n) é estritamente crescente.

Sendo crescente, tem-se $\forall n \in \mathbb{N},\ u_1 \le u_n$.

Assim, $u_1 = -\frac{1}{2}$ é minorante do conjunto dos termos da sucessão.

Sendo 2 é majorante e $-\frac{1}{2}$ minorante, conclui-se que a sucessão (u_n) é limitada.

FIM (Caderno 2)

<table>
<tr><th colspan="13">Cotações</th></tr>
<tr><td></td><th colspan="7">Caderno 1 (com calculadora)</th><td colspan="5"></td></tr>
<tr><th>Questões</th><th>1.</th><th colspan="2">2.</th><th>3.1.</th><th>3.2.</th><th>4.1.</th><th>4.2.</th><td colspan="5"></td></tr>
<tr><th>Pontos</th><td>10</td><td colspan="2">15</td><td>15</td><td>20</td><td>10</td><td>10</td><th colspan="4">Total</th><th>80</th></tr>
<tr><td></td><th colspan="10">Caderno 2 (sem calculadora)</th><td colspan="2"></td></tr>
<tr><th>Questões</th><th>5.</th><th>6.</th><th>7.</th><th>8.</th><th>9.1.</th><th>9.2.</th><th>9.3.</th><th>10.1.a)</th><th>10.1.b)</th><th>10.2.</th><td colspan="2"></td></tr>
<tr><th>Pontos</th><td>15</td><td>10</td><td>15</td><td>10</td><td>10</td><td>15</td><td>10</td><td>10</td><td>10</td><td>15</td><th>Total</th><th>120</th></tr>
<tr><th colspan="12">Total</th><th>200</th></tr>
</table>