06.

TESTES

Materiais disponíveis em formato editável em 20 AULA DIGITAL PROFESSOR

Cada teste inlcui:

- Matriz de conteúdos
- Enunciado
- Cotações
- Soluções

Índice de conteúdos

Probabilidades

- Espaços de probabilidade
- Probabilidade condicionada

Funções Reais de Variável Real

- Limites e continuidade
- Derivadas de segunda ordem, extremos, sentido das concavidades e pontos de inflexão
- Aplicações do cálculo diferencial à resolução de problemas

Trigonometria e Funções Trigonométricas

- Diferenciação de funções trigonométricas
- Aplicações aos osciladores harmónicos

Cálculo Combinatório

- Propriedades das operações sobre conjuntos
- Introdução ao cálculo combinatório
- Triângulo de Pascal e binómio de Newton

Probabilidades

- Espaços de probabilidade
- Probabilidade condicionada

Funções Reais de Variável Real

- Limites e continuidade
- Derivadas de segunda ordem, extremos, sentido das concavidades e pontos de inflexão
- Aplicações do cálculo diferencial à resolução de problemas

Trigonometria e Funções Trigonométricas

- Diferenciação de funções trigonométricas
- Aplicações aos osciladores harmónicos

Funções Exponenciais e Funções Logarítmicas

- Juros compostos e número de Neper
- Funções exponenciais
- Funções logarítmicas
- Limites notáveis envolvendo funções exponenciais e logarítmicas
- Modelos exponenciais

Funções Reais de Variável Real

- Limites e continuidade
- Derivadas de segunda ordem, extremos, sentido das concavidades e pontos de inflexão
- Aplicações do cálculo diferencial à resolução de problemas

Trigonometria e Funções Trigonométricas

- Diferenciação de funções trigonométricas
- Aplicações aos osciladores harmónicos

Funções Exponenciais e Funções Logarítmicas

- Juros compostos e número de Neper
- Funções exponenciais
- Funções logarítmicas
- Limites notáveis envolvendo funções exponenciais e logarítmicas
- Modelos exponenciais

Primitivas e Cálculo Integral

- Primitivas
- Cálculo integral

Números Complexos

- Introdução aos números complexos
- Complexo conjugado e módulo dos números complexos
- Quociente de números complexos
- Exponencial complexa e forma trigonométrica dos números complexos
- Raízes *n*-ésimas de números complexos

Teste Diagnóstico – Matriz

Tipologia de itens		Número de itens	Cotação por item (em pontos)
Itens de seleção	Escolha múltipla	5	8
Itens de construção	Resposta restrita	13	10 a 16

Itens	Domínios	Metas Curriculares
1.	FRVR10	Resolver equações e inequações envolvendo as funções polinomiais.
	LTC10	Relacionar condições e conjuntos.
2.	OTD9	Utilizar corretamente a linguagem de probabilidade.
3.	SUC11	Estudar propriedades elementares de sucessões.
4.	SUC11	Definir o limite de uma sucessão.
5.	ALG10	Efetuar operações com polinómios.
	FRVR11	Definir limite de uma função num ponto e estudar as respetivas propriedades fundamentais.
		Definir a noção de continuidade e as respetivas propriedades fundamentais.
		Definir assíntotas ao gráfico de uma função.
6.	FRVR11	Definir a noção de derivada.
		Operar com derivadas.
7.	TRI11	Definir as razões trigonométricas dos ângulos retos e obtusos e resolver triângulos.
8.	TRI11	Definir funções trigonométricas e deduzir propriedades.

Teste Diagnóstico

Matemática A

Duração do teste: 90 minutos

12.º ano de Escolaridade

Na resposta aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Escreva na folha de respostas o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

1. Sejam $A = \{x \in \mathbb{R}: x^2 + 3x < -2\}$ e $B = \{x \in \mathbb{R}: x^3 + 8 > 0\}$.

1.1. Defina, sob a forma de intervalo ou de união de intervalos disjuntos, os seguintes conjuntos.

1.1.1. $A \cup \overline{B}$

1.1.2. $B \setminus A$

1.2. Qual das seguintes proposições é verdadeira?

[A] $\forall x \in \mathbb{R}, x \in \overline{A} \Rightarrow x \in B$

[B] $\exists x \in \mathbb{R}: x \in A \wedge x \in \overline{B}$

[C] $\forall x \in \mathbb{R}, x \in A \vee x \in B$

[D] $\exists x \in \mathbb{R}: x \in \overline{A} \wedge x \in B$

2. Um saco contém dez bolas. Seis dessas bolas são amarelas e estão numeradas de 0 a 5. As restantes bolas são brancas e estão numeradas de 6 a 9.

2.1. Retirou-se uma bola, ao acaso, do saco. Determine a probabilidade de se tratar de uma bola com um número primo.

2.2. Retirou-se uma bola do saco e verificou-se que era branca. Determine a probabilidade de se tratar de uma bola com um número par.

2.3. Retiraram-se duas bolas do saco, sucessivamente e sem reposição. Qual é a probabilidade de as duas bolas serem da mesma cor?

[A] $\frac{2}{15}$

[B] $\frac{1}{15}$

[C] $\frac{7}{15}$

[D] $\frac{1}{2}$

3. Considere a sucessão (u_n) de termo geral:

$$u_n = \frac{-2n+4}{n+1}$$

Qual das afirmações seguintes é verdadeira?

[A] A sucessão (u_n) é crescente.

[B] A sucessão (u_n) é limitada.

[C] A sucessão (u_n) é divergente.

[D] A sucessão (u_n) é um infinitésimo.

4. Prove, por definição de limite, que $\lim \frac{n+1}{2n+3} = \frac{1}{2}$.

5. Considere a função f, de domínio $\mathbb{R}$, definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3-4x^2+5x-2}{x^2+2x-3} & \text{se } x > 1 \\[2ex] \dfrac{\sqrt{x^2+3}}{x-2} + 2 & \text{se } x \leq 1 \end{cases}$$

Usando métodos exclusivamente analíticos, resolva as três alíneas seguintes.

5.1. Resolva, em $]1, +\infty[$, a condição $f(x) < 0$.

5.2. Averigúe se a função f é contínua em $x = 1$.

5.3. O gráfico da restrição da função f ao intervalo $]-\infty, 1]$ tem uma assíntota horizontal. Determine uma equação dessa assíntota.

5.4. Sabendo que $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - x + 6] = 0$, qual das afirmações seguintes é verdadeira?

[A] $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = -1$

[B] $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - x] = 6$

[C] $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 6$

[D] $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x}{f(x)} = 1$

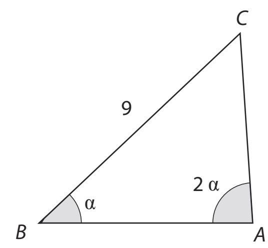
6. Seja g uma função, de domínio $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, tal que:

$$g(x) = x + \frac{1}{x}$$

6.1. Recorrendo a métodos exclusivamente analíticos, estude a função g quanto à existência de extremos relativos.

6.2. Determine a equação reduzida da reta r, tangente ao gráfico da função g no ponto de abcissa 2.

7. Na figura está representado um triângulo $[ABC]$.



Sabe-se que:

- α designa a amplitude do ângulo CBA, em graus;
- a amplitude do ângulo BAC é igual ao dobro da amplitude do ângulo CBA;
- $\overline{BC} = 9$.

Qual das expressões seguintes representa, em função de α, o perímetro do triângulo $[ABC]$?

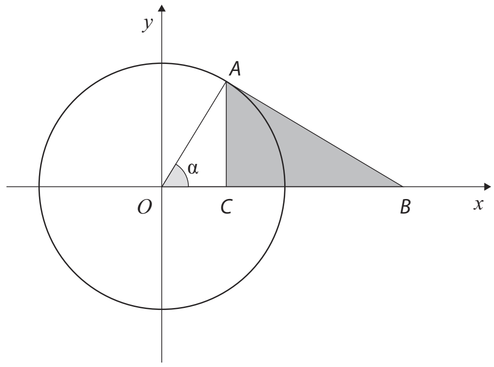
[A] $\dfrac{9(\text{sen } \alpha + \text{sen } (2\alpha) + \text{sen } (3\alpha))}{\text{sen } (2\alpha)}$

[B] $9 + \dfrac{2 \text{ sen } \alpha}{\text{sen } (2\alpha)}$

[C] $9 + \dfrac{\text{sen } (2\alpha)}{\text{sen } \alpha}$

[D] $9 + 9 \text{ sen } \alpha + 9 \text{ sen } (2\alpha)$

8. Na figura está representada, num referencial o.n. xOy, a circunferência trigonométrica.



Sabe-se que:

- o ponto A pertence à circunferência;
- os pontos A e C têm a mesma abcissa;
- o ponto C tem ordenada zero;
- o ponto B tem coordenadas $(2, 0)$;
- α é a amplitude, em radianos, do ângulo COA, com $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

8.1. Mostre que a área do triângulo $[ABC]$ é dada, em função de α, por:

$$A(\alpha) = \frac{2 \text{ sen } \alpha - \text{sen } \alpha \cos \alpha}{2}$$

8.2. Para um certo número real θ, com $\theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, tem-se que $\text{tg } \theta = \sqrt{2}$. Determine o valor exato, simplificado, de $A(\theta)$, recorrendo a métodos analíticos, sem utilizar a calculadora.

8.3. Resolva a condição:

$$A(\alpha) = \frac{3 \text{ sen } \alpha \cos \alpha}{2}, \ \alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$$

– FIM –

Cotações

1.				28 pontos
	1.1.		20 pontos	
		1.1.1. 10 pontos		
		1.1.2. 10 pontos		
	1.2.		8 pontos	
2.				28 pontos
	2.1.		10 pontos	
	2.2.		10 pontos	
	2.3.		8 pontos	
3.				8 pontos
4.				14 pontos
5.				48 pontos
	5.1.		16 pontos	
	5.2.		12 pontos	
	5.3.		12 pontos	
	5.4.		8 pontos	
6.				28 pontos
	6.1.		16 pontos	
	6.2.		12 pontos	
7.				8 pontos
8.				38 pontos
	8.1.		10 pontos	
	8.2.		14 pontos	
	8.3.		14 pontos	
TOTAL				**200 pontos**

Soluções

1.

1.1.

1.1.1. $]-\infty, -1[$

1.1.2. $[-1, +\infty[$

1.2. Opção (D)

2.

2.1. $\frac{2}{5}$

2.2. $\frac{1}{2}$

2.3. Opção (C)

3. Opção (B)

4. Ao cuidado do aluno.

5.

5.1. C.S. = $]1, 2[$

5.2. f é contínua em $x = 1$.

5.3. $y = 1$

5.4. Opção (D)

6.

6.1. g tem um máximo relativo para $x = -1$ e um mínimo relativo para $x = 1$.

6.2. $y = \frac{3}{4}x + 1$

7. Opção (A)

8.

8.1. Ao cuidado do aluno.

8.2. $\frac{2\sqrt{6} - \sqrt{2}}{6}$

8.3. $\alpha = \frac{\pi}{3}$

Teste n.º 1 – Matriz

Tipologia de itens		Número de itens	Cotação por item (em pontos)
Itens de seleção	Escolha múltipla	5	8
Itens de construção	Resposta restrita	10	14 a 20

Domínios	Metas Curriculares
CC12	Conhecer propriedades das operações sobre conjuntos. Conhecer factos elementares da combinatória. Conhecer o triângulo de Pascal e o binómio de Newton. Resolver problemas.
PRB12	Definir espaços de probabilidade. Definir probabilidade condicionada. Resolver problemas.

Teste n.º 1

Matemática A

12.º ano de Escolaridade

Na resposta aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Escreva na folha de respostas o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Caderno 1
(35 minutos)

É permitido o uso de calculadora.

1. A Alice, o Bruno e o Carlos são alunos do 10.º ano. A Daniela, a Elsa e o Filipe são alunos do 11.º ano. O Gustavo, a Helena e a Irene são alunos do 12.º ano.

1.1. Determine de quantas maneiras se podem colocar em fila estes alunos, de modo que os alunos do mesmo ano fiquem juntos.

1.2. Escolhendo três alunos deste grupo, ao acaso, qual é a probabilidade de esse grupo incluir a Alice e a Helena? Apresente o resultado na forma de fração irredutível.

2. Dados um conjunto finito, não vazio, E, uma probabilidade P em $\mathcal{P}(E)$ e dois acontecimentos $A, B \in \mathcal{P}(E)$ tais que:

- $P(A) = 0{,}44$
- $P(B) = 0{,}37$
- $P(\overline{A} \cap B) = \frac{11}{50}$

Qual é o valor de $P[(A \cup \overline{B}) \mid (A \cup B)]$?

[A] $\frac{3}{20}$ **[B]** $\frac{2}{3}$

[C] $\frac{33}{50}$ **[D]** $\frac{4}{5}$

3. A Alice e o Bruno resolveram um problema, independentemente um do outro. A probabilidade de ambos resolverem corretamente o problema é $\frac{2}{7}$ e a probabilidade de nenhum deles resolver corretamente o problema é $\frac{3}{14}$.

Sabe-se que a probabilidade de a Alice resolver corretamente o problema é maior que a probabilidade de o Bruno resolver corretamente o problema.
Determine a probabilidade de cada um deles resolver corretamente o problema. Apresente os resultados na forma de fração irredutível.

4. Foi feito um inquérito sobre a utilização da biblioteca escolar a 800 alunos. Concluiu-se que 620 alunos vão à biblioteca pelo menos uma vez por semana. Destes, 310 usam os computadores da biblioteca. Há 100 alunos que vão à biblioteca menos de uma vez por semana e usam os computadores da biblioteca.
Determine a probabilidade de um dos alunos inquiridos, escolhido ao acaso, ir à biblioteca menos de uma vez por semana, sabendo que não usa os computadores da biblioteca.
Apresente o resultado na forma de percentagem, arredondado às décimas.

5. A soma de todos os elementos de uma certa linha do triângulo de Pascal é 8192.
Qual é a soma dos sete primeiros elementos dessa linha?

[A] 1134 **[B]** 4096 **[C]** 2292 **[D]** 3391

Caderno 2
(55 minutos)

Não é permitido o uso de calculadora.

---

6. Lançaram-se dois dados tetraédricos, ambos com as faces numeradas de 1 a 4.
Considere os acontecimentos:

A: "A soma dos números saídos é um múltiplo de 3."

B: "Pelo menos uma das pontuações obtidas é 3."

Qual das afirmações seguintes é falsa?

[A] $\overline{A \cup B} = \{(1, 1), (1, 4), (2, 2), (4, 1), (4, 4)\}$

[B] $A \cap B = \{(3, 3)\}$

[C] $\overline{A} \cap B = \{(1, 3), (2, 3), (4, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 4)\}$

[D] $A \cap \overline{B} = \{(1, 2), (2, 1)\}$

7. Considere o seguinte problema:

Para decorar uma festa, estão disponíveis quatro bandeiras amarelas iguais, quatro bandeiras vermelhas iguais e quatro bandeiras brancas também iguais entre si. Dez dessas bandeiras serão colocadas em fila. Atendendo à cor, quantas sequências diferentes é possível formar?

Uma resposta correta a este problema é ${}^3C_2 \times {}^{10}C_4 \times {}^6C_4 + {}^3C_2 \times {}^{10}C_3 \times {}^7C_3$.
Numa pequena composição, explique o raciocínio que conduz a esta resposta.

8. Numa estante há seis livros distintos de Matemática e cinco de Física, também distintos. O Carlos escolhe três livros de Matemática e dois de Física e coloca-os numa prateleira.
Qual é a probabilidade de os livros de Física ficarem juntos?

[A] $\dfrac{{}^6A_3 \times {}^5A_2}{{}^6C_3 \times {}^5C_2 \times 5!}$ **[B]** $\dfrac{4! \times 2!}{5!}$

[C] $\dfrac{3! \times 2! \times 4}{{}^6C_3 \times {}^5C_2 \times 5!}$ **[D]** $\dfrac{{}^6A_3 \times {}^5A_2}{5!}$

9. Dados um conjunto finito, não vazio, E, uma probabilidade P em $\mathcal{P}(E)$ e dois acontecimentos $A, B \in \mathcal{P}(E)$, mostre que:

$$P\left((A \cup B) \mid \overline{B}\right) \times (P(B) - 1) + P(\overline{B}) = P(\overline{A} \cap \overline{B})$$

10. Sejam E um conjunto finito, P uma probabilidade no conjunto $\mathcal{P}(E)$ e A e B dois acontecimentos possíveis não certos ($A \subset E$ e $B \subset E$). Sabe-se que $A \subset B$.
Qual das seguintes afirmações é necessariamente verdadeira?

[A] $P(A \cup B) = 1$

[B] $P(A \mid B) = P(A)$

[C] $P(A \cap B) = P(B)$

[D] $P(B \mid A) = 1$

11. Considere:

- um saco com três bolas amarelas e uma bola azul;
- uma caixa com duas bolas amarelas e quatro bolas azuis;
- um baralho de cartas completo (um baralho de cartas completo é constituído por 52 cartas, repartidas por quatro naipes de treze cartas cada: espadas, copas, ouros e paus).

Retirou-se uma carta do baralho. Se a carta saída for de copas, retira-se uma bola do saco; caso contrário, retira-se uma bola da caixa.

11.1. Qual é a probabilidade de se retirar uma bola amarela?
Apresente o resultado na forma de fração irredutível.

11.2. Sabendo que a bola retirada é azul, qual é a probabilidade de a carta saída não ter sido de copas?
Apresente o resultado na forma de fração irredutível.

11.3. Considere agora a caixa, tendo em conta a sua constituição inicial. Retiraram-se, simultaneamente, duas bolas da caixa.
Determine a probabilidade de pelo menos uma das bolas ser amarela.
Apresente o resultado na forma de fração irredutível.

12. Considere o desenvolvimento pelo binómio de Newton da expressão $\left(\sqrt{x} + \dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)^n$, com $x > 0$, ordenado segundo as potências decrescentes da primeira parcela.
Sabe-se que a soma dos coeficientes dos dois primeiros termos com os coeficientes dos dois últimos é igual a 22.
Determine o coeficiente do termo em x^2.

– FIM –

Cotações

Caderno 1		**80 pontos**
1.		28 pontos
1.1.	14 pontos	
1.2.	14 pontos	
2.		8 pontos
3.		18 pontos
4.		18 pontos
5.		8 pontos
Caderno 2		**120 pontos**
6.		8 pontos
7.		20 pontos
8.		8 pontos
9.		16 pontos
10.		8 pontos
11.		44 pontos
11.1.	14 pontos	
11.2.	14 pontos	
11.3.	16 pontos	
12.		16 pontos
TOTAL		**200 pontos**

Soluções

1.

1.1. 1296

1.2. $\frac{1}{12}$

2. Opção (B)

3. P("Alice resolver o problema") $= \frac{4}{7}$

P("Bruno resolver o problema") $= \frac{1}{2}$

4. $\approx 20{,}5\%$

5. Opção (B)

6. Opção (D)

7. Ao cuidado do aluno.

8. Opção (B)

9. Ao cuidado do aluno.

10. Opção (D)

11.

11.1. $\frac{7}{16}$

11.2. $\frac{8}{9}$

11.3. $\frac{14}{15}$

12. 120

Teste n.º 2 – Matriz

Tipologia de itens		Número de itens	Cotação por item (em pontos)
Itens de seleção	Escolha múltipla	5	8
Itens de construção	Resposta restrita	11	12 a 18

Domínios	Metas Curriculares
CC12	Conhecer propriedades das operações sobre conjuntos. Conhecer factos elementares da combinatória. Conhecer o triângulo de Pascal e o binómio de Newton. Resolver problemas.
PRB12	Definir espaços de probabilidade. Definir probabilidade condicionada. Resolver problemas.
FRVR12	Utilizar os teoremas de comparação e os teoremas das sucessões e funções enquadradas. Conhecer propriedades elementares das funções contínuas. Relacionar a derivada de segunda ordem com o sentido da concavidade do gráfico de uma função e com a noção de aceleração. Resolver problemas.

Teste n.º 2

Matemática A

12.º ano de Escolaridade

Na resposta aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Escreva na folha de respostas o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Caderno 1
(35 minutos)

É permitido o uso de calculadora.

1. Um código de multibanco é constituído por uma sequência de quatro algarismos como, por exemplo, 0123. O código deve ser inserido usando um teclado, como o da figura ao lado.

Um ladrão, observando de longe, conseguiu perceber as seguintes características do código de multibanco de um cliente:

- os algarismos são todos diferentes;
- o primeiro e o último algarismos situam-se na mesma linha horizontal;
- o segundo e o terceiro algarismos encontram-se na linha horizontal imediatamente acima da anterior.

Quantos códigos de multibanco existem nas condições indicadas?

[A] 72 **[B]** 90 **[C]** 162 **[D]** 171

2. Nove amigos pretendem ir ao teatro.

2.1. Enquanto esperavam para comprar os bilhetes, os amigos formaram uma fila. Qual é a probabilidade de a Carla e o Vítor, dois desses amigos, ficarem separados nessa fila?
Apresente o resultado na forma de fração irredutível.

2.2. Quando foram recebidos na bilheteira, havia apenas seis bilhetes. Esses seis bilhetes foram distribuídos, ao acaso, entre os amigos. Qual é a probabilidade de a Carla o Vítor não terem bilhete? Apresente o resultado na forma de fração irredutível.

3. O terceiro elemento de uma linha do triângulo de Pascal é 210. Qual é o maior elemento da linha seguinte?

[A] 1 352 078

[B] 705 432

[C] 2 704 156

[D] 352 716

4. Numa determinada cidade existem apenas dois tipos de imóveis: apartamentos e moradias. Cada pessoa vive apenas num destes tipos de imóveis. Nessa cidade, a probabilidade de uma pessoa viver num apartamento é quádrupla da probabilidade de viver numa moradia. A probabilidade de uma pessoa que vive num apartamento ter pelo menos um cão é $\frac{1}{7}$ e a probabilidade de uma pessoa que vive numa moradia ter pelo menos um cão é $\frac{1}{4}$.

4.1. Escolhendo ao acaso uma pessoa que tenha pelo menos um cão, qual é a probabilidade de ela viver numa moradia? Apresente o resultado na forma de fração irredutível.

4.2. Sejam A e B os acontecimentos:

A: "Viver numa moradia."

B: " Ter um cão."

Averigúe se $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.

5. Considere a função f, de domínio $[-1, +\infty[$, definida por $f(x) = 2 - \sqrt{x+1}$. O gráfico de f contém um único ponto cuja ordenada é o quadrado da abcissa. Recorrendo à calculadora gráfica, determine as coordenadas desse ponto.

Na sua resposta, deve:

- equacionar o problema;
- reproduzir o gráfico da função ou os gráficos das funções que tiver necessidade de visualizar na calculadora, devidamente identificado(s), incluindo o referencial;
- assinalar esse ponto;
- indicar as coordenadas desse ponto com arredondamento às centésimas.

Caderno 2
(55 minutos)

Não é permitido o uso de calculadora.

6. Dados um conjunto finito, não vazio, E, uma probabilidade P em $\mathcal{P}(E)$ e dois acontecimentos $A, B \in \mathcal{P}(E)$, considere as afirmações:

I. Se A e B são acontecimentos incompatíveis, então são independentes.

II. Se A e B são acontecimentos contrários, então são incompatíveis.

Qual das opções seguintes é correta?

[A] I e II são verdadeiras.

[B] I é verdadeira e II é falsa.

[C] I é falsa e II é verdadeira.

[D] I e II são falsas.

7. Dados um conjunto finito, não vazio, E, uma probabilidade P em $\mathcal{P}(E)$ e dois acontecimentos $A, B \in \mathcal{P}(E)$ tais que $P(A) = \frac{2}{3}$, $P(A \mid B) = \frac{1}{2}$ e $P(B \mid \overline{A}) = \frac{2}{5}$.

Determine $P(B)$. Apresente o resultado na forma de fração irredutível.

8. Considere os desenvolvimentos do binómio de Newton de $(a + 2x)^6$ e de $(2 + ax)^8$, com $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Determine o valor de a para o qual o coeficiente de x^3 no desenvolvimento de $(a + 2x)^6$ é igual ao coeficiente de x^4 no desenvolvimento de $(2 + ax)^8$

9. Considere a sucessão $u_n = \left(\frac{n+1}{2n+3}\right)^n$. Usando o teorema das sucessões enquadradas, determine $\lim u_n$.

10. Considere a função f, de domínio $\mathbb{R} \setminus \{2\}$, definida por:

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2+1}-x}{x-2}$$

Sabe-se que uma função g é tal que $\forall\, x \in \mathbb{R}^-$, $g(x) < f(x)$. Qual dos seguintes valores pode ser o valor de $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x)$?

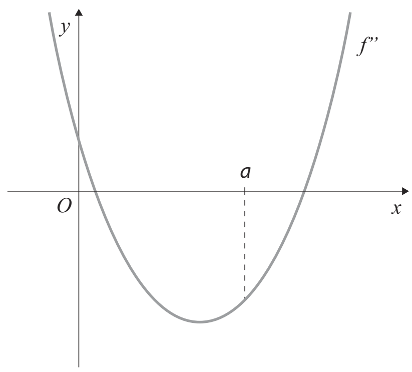
[A] 1 **[B]** 0 **[C]** –2 **[D]** –4

11. Considere, para um certo número real k, a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por:

$$f(x) = kx^3 - x + 1$$

O teorema de Bolzano-Cauchy garante que a função f tem, pelo menos, um zero no intervalo $]-1, 1[$. Determine os possíveis valores de k.

12. Na figura está representada parte do gráfico de uma função f'', segunda derivada de uma função f, de domínio $\mathbb{R}$. Sabe-se que $f'(a) = 0$.



Qual das afirmações seguintes é necessariamente verdadeira?

[A] a é um zero da função f.

[B] $f(a)$ é um mínimo da função f.

[C] $f(a)$ é um máximo da função f.

[D] $(a, f(a))$ é um ponto de inflexão do gráfico da função f.

13. Seja f a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x-1}{x^2+2} & \text{se } x \leq 0 \\[2ex] x^3 - 6x^2 + 5 & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

13.1. Mostre que a função f tem um máximo e um mínimo absolutos no intervalo $[-2, 0]$.

13.2. Estude a função f quanto ao sentido das concavidades do seu gráfico e quanto à existência de pontos de inflexão, em $\mathbb{R}^+$.

– FIM –

Cotações

Caderno 1			**80 pontos**
1.			8 pontos
2.			24 pontos
	2.1.	12 pontos	
	2.2.	12 pontos	
3.			8 pontos
4.			28 pontos
	4.1.	14 pontos	
	4.2.	14 pontos	
5.			12 pontos
Caderno 2			**120 pontos**
6.			8 pontos
7.			16 pontos
8.			18 pontos
9.			18 pontos
10.			8 pontos
11.			16 pontos
12.			8 pontos
13.			28 pontos
	13.1.	12 pontos	
	13.2.	16 pontos	
TOTAL			**200 pontos**

Soluções

1. Opção (A)

2.

2.1. $\frac{7}{9}$

2.2. $\frac{1}{12}$

3. Opção (B)

4.

4.1. $\frac{7}{23}$

4.2. $P(A \cap B) \neq P(A) \times P(B)$

5. (0,81; 0,65)

6. Opção (C)

7. $\frac{4}{15}$

8. $a = \frac{1}{7}$

9. 0

10. Opção (D)

11. $k \in \,]-\infty, 0[\, \cup \,]2, +\infty[$

12. Opção (C)

13.

13.1. Ao cuidado do aluno.

13.2. O gráfico de f tem a concavidade voltada para baixo em $]0, 2[$ e a concavidade voltada para cima em $]2, +\infty[$; tem um ponto de inflexão para $x = 2$.

Teste n.º 3 – Matriz

Tipologia de itens		Número de itens	Cotação por item (em pontos)
Itens de seleção	Escolha múltipla	5	8
Itens de construção	Resposta restrita	10	14 a 18

Domínios	Metas Curriculares
CC12	Conhecer propriedades das operações sobre conjuntos. Conhecer factos elementares da combinatória. Conhecer o triângulo de Pascal e o binómio de Newton. Resolver problemas.
PRB12	Definir espaços de probabilidade. Definir probabilidade condicionada. Resolver problemas.
FRVR12	Utilizar os teoremas de comparação e os teoremas das sucessões e funções enquadradas. Conhecer propriedades elementares das funções contínuas. Relacionar a derivada de segunda ordem com o sentido da concavidade do gráfico de uma função e com a noção de aceleração. Resolver problemas.
TRI12	Estabelecer fórmulas de trigonometria. Calcular a derivada de funções trigonométricas. Relacionar osciladores harmónicos e a segunda lei de Newton. Resolver problemas.

Teste n.º 3

Matemática A

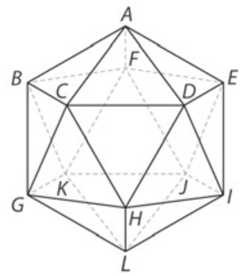
12.º ano de Escolaridade

Na resposta aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Escreva na folha de respostas o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

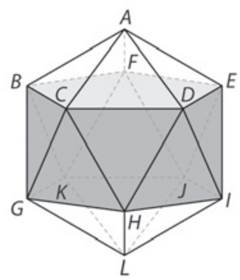
Caderno 1
(35 minutos)

É permitido o uso de calculadora.

1. Na figura está representado o icosaedro [*ABCDEFGHIJKL*].



1.1. Do conjunto das doze letras, utilizadas para designar os vértices do icosaedro, escolheram-se três vogais e três consoantes, ao acaso, para formar uma sequência.
Determine a probabilidade de, nessa sequência, as vogais e as consoantes ficarem colocadas alternadamente.
Apresente o resultado na forma fração irredutível.



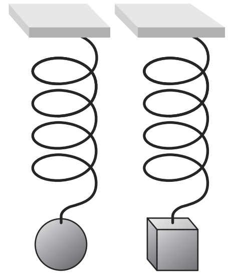
1.2. A Helena tem uma caixa de lápis de cor com dezoito cores diferentes, entre as quais a amarela. Ela pretende pintar todas as vinte faces do icosaedro, podendo qualquer cor colorir qualquer face.
A cor preferida da Helena é a amarela e ela já coloriu de amarelo as dez faces a sombreado na figura.
Determine a probabilidade de as restantes faces do icosaedro ficarem todas coloridas com cores distintas, sabendo que nenhuma delas é amarela.
Apresente o resultado na forma de dízima arredondado às milésimas.

2. Para testar a eficácia de uma vacina no tratamento de uma determinada doença, 100 voluntários foram vacinados e outros 100 não foram vacinados. Dos que foram vacinados, 68 ficaram curados.
Houve 38 voluntários que não foram vacinados e que continuaram doentes.
Determine a probabilidade de um voluntário não ter sido vacinado, sabendo que ficou curado.
Apresente o resultado na forma de fração irredutível.

3. O quarto elemento de uma linha do triângulo de Pascal é 20 825. A soma dos quatro primeiros elementos dessa linha é 22 152.
Qual é o terceiro elemento da linha seguinte?

[A] 1326 **[B]** 1275 **[C]** 1225 **[D]** 1378

4. Um cubo e uma esfera suspensos por duas molas oscilam verticalmente.
Admita que a distância (em cm) do centro do cubo ao solo, t segundos após um certo instante inicial, é dada por $c(t) = 5 + 2\ \text{sen}\left(\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{5}\right)$ e que a distância (em cm) do centro da esfera ao solo, t segundos após o mesmo instante inicial é dada por $e(t) = 4 + 3\cos\left(\pi t + \frac{\pi}{7}\right)$, com $t \in [0, +\infty[$.



4.1. Em qual dos intervalos seguintes o teorema de Bolzano-Cauchy permite afirmar que a equação $c(t) = 5$ tem, pelo menos, uma solução?

[A] $]14, 15[$

[B] $]14, 16[$

[C] $]16, 17[$

[D] $]16, 20[$

4.2. Nos primeiros quatro segundos do movimento, o cubo e a esfera encontram-se a igual distância do solo em alguns instantes. Recorrendo à calculadora gráfica, determine quais os instantes em que isso aconteceu.

Na sua resposta deve:

- equacionar o problema;
- reproduzir o gráfico ou os gráficos das funções que tiver necessidade de visualizar na calculadora, devidamente identificado(s), incluindo o referencial;
- indicar os valores pedidos arredondados às centésimas.

Caderno 2
(55 minutos)

Não é permitido o uso de calculadora.

---

5. Dados um conjunto finito, não vazio, E, uma probabilidade P em $\mathcal{P}(E)$ e dois acontecimentos $A, B \in \mathcal{P}(E)$ tais que $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$, mostre que:

$$P(\overline{\overline{A} \cap \overline{B}}) + P(A \mid B) + P(\overline{B} \mid A) = P(\overline{A} \cap B)$$

6. Seja f a função definida, em $\mathbb{R}$, por:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x-1}{x^3+3x^2-4} & \text{se } x > 1 \\ x^2 - x + k & \text{se } x \leq 1 \end{cases}$$

O valor de k para o qual é possível aplicar o teorema de Weierstrass, à função f, no intervalo $[0, 2]$, é:

[A] 3

[B] 1

[C] $\frac{1}{9}$

[D] $\frac{1}{4}$

7. Seja g uma função, de domínio $]2, +\infty[$, cuja derivada, g', de domínio $]2, +\infty[$, é dada por:

$$g'(x) = \frac{x-1}{x-2} + 2x$$

Estude a função g quanto ao sentido das concavidades do seu gráfico e quanto à existência de pontos de inflexão.

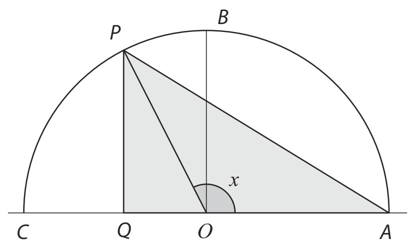
8. De uma função f, de domínio $\mathbb{R}$, sabe-se que a sua segunda derivada é dada por:

$$f''(x) = x^2(x+1)^2(2x-1)$$

Quantos pontos de inflexão tem o gráfico de f?

[A] 0 **[B]** 1 **[C]** 2 **[D]** 3

9. Na figura está representada uma semicircunferência de centro O e raio 4 e os pontos A, B e C.



Sabe-se que:

- os pontos A, B e C pertencem à semicircunferência;
- O é o ponto médio de $[AC]$;
- o segmento de reta $[OB]$ é perpendicular a $[AC]$.

Admita que um ponto P se desloca ao longo do arco BC, nunca coincidindo com B nem com C, e que um ponto Q se desloca ao longo do segmento de reta $[OC]$ de tal forma que $[PQ]$ é sempre perpendicular a $[AC]$.

Para cada posição do ponto P, seja x a amplitude, em radianos, do ângulo AOP e seja $A(x)$ a área do triângulo $[APQ]$.

9.1. Mostre que $A(x) = 8 \text{ sen } x - 4\text{sen } (2x)$ $\left(x \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[\right)$.

9.2. Determine o valor de x para o qual a área do triângulo $[APQ]$ é máxima.

10. Seja g a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $g(x) = \text{sen } (2x) \cos (2x)$.

Qual das expressões seguintes também define a função g?

[A] $\text{sen } (2x) - 4 \text{ sen}^3 x \cos x$ **[B]** $\text{sen } (2x) - 4 \text{ sen } x \cos^2 x$

[C] $\cos (2x) - 4 \text{ sen}^3 x \cos x$ **[D]** $\cos (2x) + 4 \text{ sen } x \cos^2 x$

11. Considere a função f, de domínio $\mathbb{R} \setminus \{\pi\}$, definida por $f(x) = \dfrac{\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)}{x - \pi}$.

11.1. Estude a função f quanto à existência de assíntotas verticais ao seu gráfico.

11.2. Determine a equação reduzida da reta tangente ao gráfico de f, no ponto de abcissa 0.

– FIM –

Cotações

Caderno 1			**80 pontos**
1.			28 pontos
	1.1.	14 pontos	
	1.2.	14 pontos	
2.			18 pontos
3.			8 pontos
4.			26 pontos
	4.1.	8 pontos	
	4.2.	18 pontos	
Caderno 2			**120 pontos**
5.			16 pontos
6.			8 pontos
7.			18 pontos
8.			8 pontos
9.			32 pontos
	9.1.	16 pontos	
	9.2.	16 pontos	
10.			8 pontos
11.			30 pontos
	11.1.	16 pontos	
	11.2.	14 pontos	
TOTAL			**200 pontos**

1.

1.1. $\frac{1}{10}$

1.2. $\approx 0{,}035$

2. $\frac{31}{65}$

3. Opção (A)

4.

4.1. Opção (B)

4.2. $t = 0{,}07 \ \vee \ t = 1{,}5 \ \vee \ t = 2{,}46 \ \vee \ t = 3{,}4$

5. Ao cuidado do aluno.

6. Opção (C)

7. O gráfico de g tem a concavidade voltada para baixo em $\left]2, 2 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right[$ e a concavidade voltada para cima em $\left]2 + \frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty\right[$; tem um ponto de inflexão de abcissa $2 + \frac{\sqrt{2}}{2}$.

8. Opção (B)

9.

9.1. Ao cuidado do aluno.

9.2. $x = \frac{2\pi}{3}$

10. Opção (A)

11.

11.1. O gráfico de f não tem assíntotas verticais.

11.2. $y = -\frac{1}{\pi}x$

Teste n.º 4 – Matriz

Tipologia de itens		Número de itens	Cotação por item (em pontos)
Itens de seleção	Escolha múltipla	5	8
Itens de construção	Resposta restrita	11	12 a 20

Domínios	Metas Curriculares
CC12	Conhecer propriedades das operações sobre conjuntos. Conhecer factos elementares da combinatória. Conhecer o triângulo de Pascal e o binómio de Newton. Resolver problemas.
PRB12	Definir espaços de probabilidade. Definir probabilidade condicionada. Resolver problemas.
FRVR12	Utilizar teoremas de comparação e os teoremas das sucessões e funções enquadradas. Conhecer propriedades elementares das funções contínuas. Relacionar a derivada de segunda ordem com o sentido da concavidade do gráfico de uma função e com a noção de aceleração. Resolver problemas.
TRI12	Estabelecer fórmulas de trigonometria. Calcular a derivada de funções trigonométricas. Relacionar osciladores harmónicos e a segunda lei de Newton. Resolver problemas.
FEL12	Operar com juros compostos e definir o número de Neper. Definir as funções exponenciais e estabelecer as respetivas propriedades principais. Definir as funções logarítmicas e estabelecer as respetivas propriedades principais. Conhecer alguns limites notáveis envolvendo funções exponenciais e logarítmicas. Estudar modelos de crescimento e decrescimento exponencial. Resolver problemas.

Teste n.º 4

Matemática A

12.º ano de Escolaridade

Na resposta aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Escreva na folha de respostas o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Caderno 1
(35 minutos)

É permitido o uso de calculadora.

1. Considere o conjunto $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Quantos números de quatro algarismos diferentes é possível formar que sejam inferiores a 5840?

[A] 1614 **[B]** 1600 **[C]** 1344 **[D]** 1596

Adaptado de *Caderno de Apoio às Metas Curriculares*, 12.º ano

2. Considere duas retas r e s estritamente paralelas e treze pontos distintos: cinco sobre a reta r e oito sobre a reta s. Determine a probabilidade de, escolhendo quatro desses pontos ao acaso, estes formarem um quadrilátero. Apresente o resultado na forma de fração irredutível.

3. Numa determinada região, o número de gaivotas, em milhares, é dado, aproximadamente, por $G(t) = \frac{30}{1 + 2e^{-0,12t}}$, onde t é medido em anos, sendo o instante $t = 0$ o início do ano 2010.

3.1. Determine $G(0)$ e $\lim\limits_{x \to +\infty} G(t)$. Interprete os valores obtidos no contexto do problema.

3.2. Sem recorrer à calculadora (a não ser para efetuar eventuais cálculos numéricos), determine em que ano a população de gaivotas atingiu os 19 000 elementos. Sempre que, nos cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, três casas decimais.

3.3. Mostre que existe um único instante, entre o início do ano 2017 e o início do ano 2022, em que o número de gaivotas será 17 300. Utilizando a calculadora gráfica, determine esse instante, arredondado às centésimas.

Na sua resposta:

- estude a monotonia da função G num intervalo adequado;
- recorra ao teorema de Bolzano-Cauchy para provar que existe o instante referido;
- reproduza, num referencial, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) que visualizar na calculadora, devidamente identificado(s);
- apresente a solução pedida.

Sempre que nos cálculos intermédios proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, três casas decimais.

4. Sejam α e β as amplitudes de dois ângulos agudos. Sabe-se que sen $\alpha = \frac{8}{17}$ e que tg $\beta = \frac{5}{12}$.

Qual dos seguintes é o valor exato de $\cos(\alpha + \beta)$?

[A] $\frac{21}{221}$ **[B]** $\frac{140}{221}$ **[C]** $\frac{220}{221}$ **[D]** $\frac{171}{221}$

Caderno 2
(55 minutos)

Não é permitido o uso de calculadora.

---

5. Considere um conjunto finito, não vazio, E, uma probabilidade P em $\mathcal{P}(E)$ e três acontecimentos A, B e $C \in \mathcal{P}(E)$.

5.1. Mostre que se A e B são acontecimentos incompatíveis, então:

$$P(A \cup B \cup C) = P(A \cup C) + P(B \cup C) - P(C)$$

5.2. Sabe-se que:

- A e B são acontecimentos incompatíveis;
- A e C são acontecimentos independentes;
- $P(A \cup C) = \frac{2}{3}$;
- $P(A \cup B \cup C) = \frac{11}{12}$.

Determine $P(A)$ e $P(C)$. Apresente os resultados na forma de fração irredutível.

Sugestão: Utilize a igualdade da alínea anterior.

6. Considere as funções f e g, definidas, em $\mathbb{R}^+$, por $f(x) = \frac{e^{4x} - e^x}{x}$ e $g(x) = \frac{x^3 + 6x^2 + 3x}{x^2 + x}$.

Sabe-que uma função h é tal que $\forall\, x \in \mathbb{R}^+, g(x) < h(x) < f(x)$.

Qual é o valor de $\lim\limits_{x \to 0} h(x)$?

[A] 0 **[B]** 1 **[C]** 2 **[D]** 3

7. Considere a função f, de domínio $\mathbb{R}$, definida por:

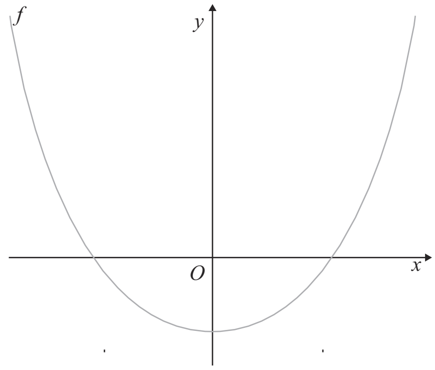
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2+1}{x-1} & \text{se } x \leq 0 \\ \dfrac{kx - \text{sen}\,(2x)}{x} & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

7.1. Determine k de modo que a função f seja contínua em $x = 0$.

7.2. Considere, agora, $k = 0$.

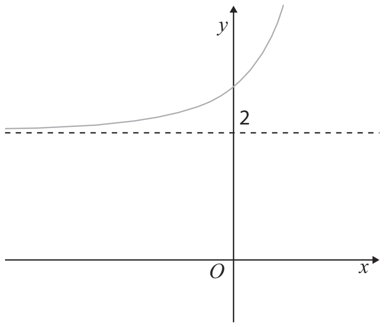
Seja g uma função, de domínio $]0, 2\pi[$, definida por $g(x) = xf(x) + 2\cos x$. Estude a monotonia da função g, indicando o valor dos extremos relativos, caso existam, e os intervalos de monotonia.

8. Na figura está representada, num referencial o.n. xOy, o gráfico de uma função quadrática f, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = x^2 - a$, com $a \in \mathbb{R}^+$. Seja g a função definida por $g(x) = f(x) - e^x$.

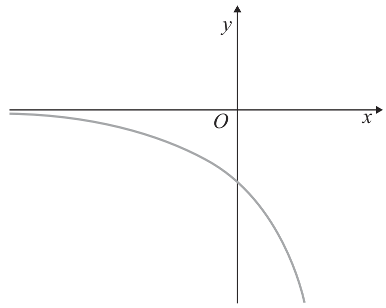


Em qual das seguintes opções poderá estar representada graficamente a função g'', segunda derivada de g?

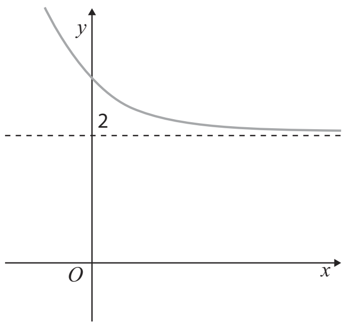
[A]



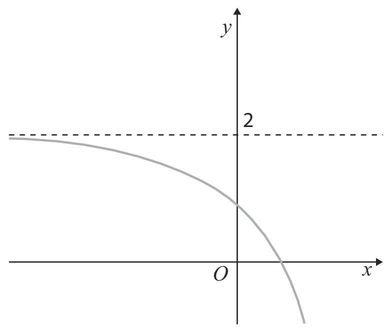
[B]



[C]



[D]



9. Seja g uma função, de domínio $]e^2, +\infty[$, definida por $g(x) = \ln(x - e^2)$. Considere a sucessão estritamente decrescente de termo geral $u_n = \left(\frac{n+3}{n+1}\right)^{n+2}$. Qual é o valor de $\lim g(u_n)$?

[A] 0 **[B]** $-\infty$ **[C]** e^2 **[D]** $+\infty$

10. Sejam f e g as funções, de domínios $]2, +\infty[$ e $]3, +\infty[$, definidas, respetivamente, por:

$$f(x) = \log(x^2 - 3x + 2) + \log(x - 2) - \frac{\ln(x-1)}{\ln(10)} \quad \text{e} \quad g(x) = \log(x + 1) + \log(x - 3)$$

10.1. Mostre que $f(x) = 2\log(x - 2)$.

10.2. Determine o conjunto-solução da condição $f(x) \geq g(x)$.

10.3. Determine a equação reduzida da reta tangente ao gráfico da função f no ponto de interseção deste com o eixo Ox.

– FIM –

Cotações

Caderno 1		**80 pontos**
1.		8 pontos
2.		12 pontos
3.		52 pontos
3.1.	14 pontos	
3.2.	18 pontos	
3.3.	20 pontos	
4.		8 pontos
Caderno 2		**120 pontos**
5.		24 pontos
5.1.	12 pontos	
5.2.	12 pontos	
6.		8 pontos
7.		32 pontos
7.1.	12 pontos	
7.2.	20 pontos	
8.		8 pontos
9.		8 pontos
10.		40 pontos
10.1.	12 pontos	
10.2.	14 pontos	
10.3.	14 pontos	
TOTAL		**200 pontos**

1. Opção (A)

2. $\frac{56}{143}$

3.

3.1. $G(0) = 10$

No início do ano 2010 havia 10 000 gaivotas.

$\lim_{x \to +\infty} G(t) = 30$

Com o passar dos anos, o número de gaivotas aproxima-se de 30 000.

3.2. 2020

3.3. $t \approx 8{,}35$ anos após o início de 2010.

4. Opção (B)

5.

5.1. Ao cuidado do aluno.

5.2. $P(A) = \frac{1}{3}$; $P(C) = \frac{1}{2}$

6. Opção (D)

7.

7.1. $k = 1$

7.2. g é estritamente decrescente em $\left]0, \frac{7\pi}{6}\right]$ e em $\left[\frac{11\pi}{6}, 2\pi\right[$ e é estritamente crescente em $\left[\frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}\right]$, tem um mínimo relativo $-\frac{3\sqrt{3}}{2}$ em $x = \frac{7\pi}{6}$ e um máximo relativo $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ em $x = \frac{11\pi}{6}$.

8. Opção (D)

9. Opção (B)

10.

10.1. Ao cuidado do aluno.

10.2. C.S. $= \left]3, \frac{7}{2}\right]$

10.3. $y = \frac{2}{\ln(10)}x - \frac{6}{\ln(10)}$

Teste n.º 5 – Matriz

Tipologia de itens		Número de itens	Cotação por item (em pontos)
Itens de seleção	Escolha múltipla	5	8
Itens de construção	Resposta restrita	10	14 a 18

Domínios	Metas Curriculares
CC12	Conhecer propriedades das operações sobre conjuntos. Conhecer factos elementares da combinatória. Conhecer o triângulo de Pascal e o binómio de Newton. Resolver problemas.
PRB12	Definir espaços de probabilidade. Definir probabilidade condicionada. Resolver problemas.
FRVR12	Utilizar teoremas de comparação e os teoremas das sucessões e funções enquadradas. Conhecer propriedades elementares das funções contínuas. Relacionar a derivada de segunda ordem com o sentido da concavidade do gráfico de uma função e com a noção de aceleração. Resolver problemas.
TRI12	Estabelecer fórmulas de trigonometria. Calcular a derivada de funções trigonométricas. Relacionar osciladores harmónicos e a segunda lei de Newton. Resolver problemas.
FEL12	Operar com juros compostos e definir o número de Neper. Definir as funções exponenciais e estabelecer as respetivas propriedades principais. Definir as funções logarítmicas e estabelecer as respetivas propriedades principais. Conhecer alguns limites notáveis envolvendo funções exponenciais e logarítmicas. Estudar modelos de crescimento e decrescimento exponencial. Resolver problemas.
PCI12	Definir a noção de primitiva. Abordar intuitivamente a noção de integral definido. Resolver problemas.

Teste n.º 5

Matemática A

12.º ano de Escolaridade

Na resposta aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Escreva na folha de respostas o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Caderno 1
(35 minutos)

É permitido o uso de calculadora.

1. Um dos termos do desenvolvimento de $\left(\frac{\sqrt{y}}{2x} - \frac{2y}{\sqrt{x}}\right)^8$ é da forma $2^k x^{-4} y^8$, sendo k um número natural.
Qual é o valor de k?

[A] 5 **[B]** 6 **[C]** 7 **[D]** 8

2. Num certo restaurante, num determinado dia, estão a almoçar vinte e seis homens, vinte mulheres e quatro crianças. Desses, quinze homens, oito mulheres e uma criança escolheram o menu do dia e os restantes escolheram do menu regular as suas refeições.
Selecionando, ao acaso, um dos clientes que escolheu a refeição do menu regular, qual é a probabilidade de se tratar de um homem?
Apresente o resultado na forma de percentagem, arredondado às unidades.

3. Foi efetuado um depósito de 4600 euros num banco, em regime de juro composto à taxa semestral de 1,3%.

3.1. Qual é o capital acumulado ao fim de um ano?

[A] 5217,44 euros

[B] 4629,90 euros

[C] 4659,99 euros

[D] 4720,38 euros

3.2. Obtenha uma expressão que permita obter o capital acumulado ao fim de t anos e determine ao fim de quantos anos é possível obter um capital acumulado superior a 6000 euros.
Sempre que, nos cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, três casas decimais.

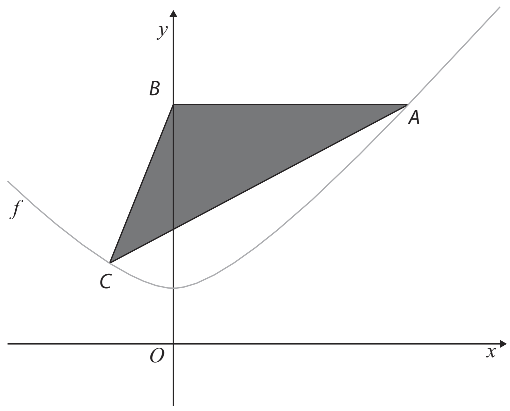
4. Considere a função f, de domínio $\mathbb{R}$, definida por:

$$f(x) = \ln\left(e^x + e^{-x}\right)$$

4.1. Prove, recorrendo a métodos exclusivamente analíticos, que a equação $f(x) = 3\ln(x)$ tem, pelo menos, uma solução no intervalo $]1, 3[$.

Nota: A calculadora pode ser utilizada em eventuais cálculos numéricos.
Sempre que, nos cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, três casas decimais.

4.2. Na figura estão representados, num referencial o.n. xOy, parte do gráfico da função f e o triângulo $[ABC]$.



Sabe-se que:

- o ponto A tem coordenadas $(3, 3)$;
- o ponto B pertence ao eixo Oy e tem ordenada igual à do ponto A;
- o ponto C pertence ao gráfico da função f e tem abcissa negativa;
- a área do triângulo $[ABC]$ é igual a 3.

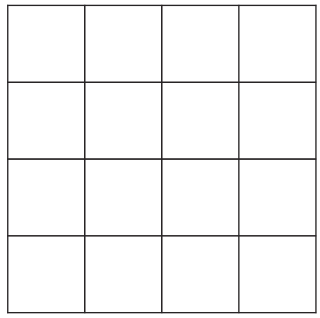
Determine as coordenadas do ponto C, recorrendo à calculadora gráfica.
Na sua resposta, deve:

- equacionar o problema;
- reproduzir num referencial o gráfico ou os gráficos das funções visualizado(s), devidamente identificado(s);
- indicar as coordenadas do ponto C com arredondamento às centésimas.

Caderno 2
(55 minutos)

Não é permitido o uso de calculadora.

5. Pretende-se colocar sobre um tabuleiro, como o representado na figura, doze peças de igual tamanho e feitio, das quais nove são amarelas e três são vermelhas.



Cada casa do tabuleiro é ocupada por uma só peça.
Qual é a probabilidade de pelo menos uma das diagonais ficar ocupada com peças amarelas?

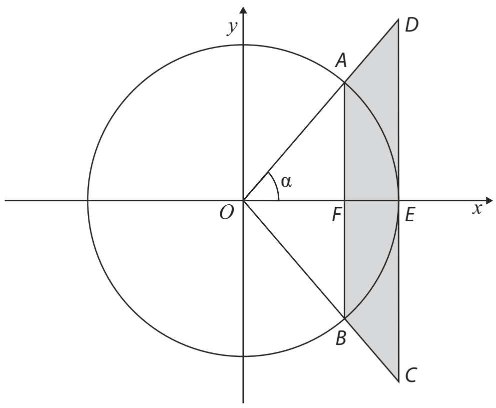
[A] $\frac{2 \times {}^{12}C_5}{{}^{16}C_9}$

[B] $\frac{{}^{12}C_5}{{}^{16}C_9}$

[C] $\frac{2 \times {}^{12}C_5 - 8}{{}^{16}C_9}$

[D] $\frac{2 \times {}^{12}C_5 + 8}{{}^{16}C_9}$

6. Na figura está representada a circunferência trigonométrica.



Sabe-se que:

- o ponto A pertence ao primeiro quadrante e à circunferência;
- o ponto D pertence à semirreta $\dot{O}A$;
- o ponto B é simétrico do ponto A relativamente a Ox;
- o ponto C é simétrico do ponto D relativamente a Ox;
- o ponto E pertence ao eixo Ox e à circunferência;
- o ponto F pertence ao eixo Ox e à reta AB;
- os segmentos de reta $[AB]$ e $[CD]$ são paralelos ao eixo Oy;
- o segmento de reta $[CD]$ é tangente à circunferência.

Seja α a amplitude do ângulo EOA $\left(\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\right)$.

6.1. Mostre que a área do quadrilátero $[ABCD]$, representado a sombreado, é dada, em função de α, por $A(\alpha) = \operatorname{tg} \alpha - \frac{\operatorname{sen}(2\alpha)}{2}$.

6.2. Para um certo número real θ, tem-se que $\operatorname{tg} \theta = \sqrt{5}$, com $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$.

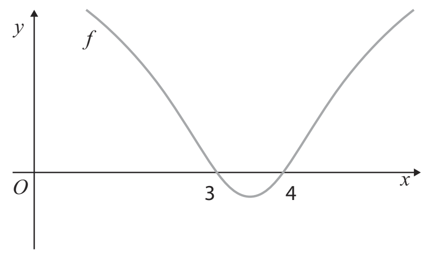
Determine o valor exato de $A'(\theta)$.

7. Para certos valores $a, b \in \mathbb{R}$, considere a função f, definida em $\mathbb{R}$, por:

$$f(x) = \log(x^2 + ax + b)$$

Na figura está representada graficamente a função f.

Tal como a figura sugere, o gráfico de f interseta o eixo Ox nos pontos de abcissas 3 e 4.



Quais são os valores de a e b?

[A] $a = -7$ e $b = 13$

[B] $a = -7$ e $b = -13$

[C] $a = 7$ e $b = -13$

[D] $a = 7$ e $b = 13$

8. De uma função f, de domínio $\mathbb{R}$, sabe-se que a sua derivada f' está definida, também em $\mathbb{R}$, por:

$$f'(x) = (x+1)^2\, e^{2x+1}$$

8.1. Determine o valor de $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{f(x) - f(1)}{x^2 - 1}$.

8.2. Estude a função f quanto ao sentido das concavidades do seu gráfico e determine as abcissas dos pontos de inflexão, caso existam.

9. Para um certo número real a, considere a família de funções f, de domínio $\mathbb{R}$, definidas por $f(x) = ax^n$, com $n \in \mathbb{R}$.

Qual das seguintes igualdades é verdadeira?

[A] $\int f(x)dx = \dfrac{ax^{n+1}}{n} + c,\ c \in \mathbb{R}$

[B] $\int f(x)dx = \dfrac{ax^{n+1}}{n+1} + c,\ c \in \mathbb{R}$

[C] $\int f(x)dx = \dfrac{ax^{n-1}}{n-1} + c,\ c \in \mathbb{R}$

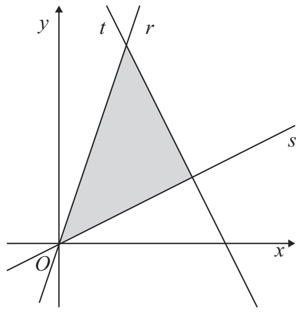
[D] $\int f(x)dx = \dfrac{ax^{n+1}}{n+1}$

10. Na figura estão representadas as retas *r*, *s* e *t*, definidas por:

r: $y = 3x$

s: $y = \frac{1}{2}x$

t: $y = -2x + 5$



Calcule a medida da área da região do plano limitada pelas três retas.

11. Considere a função *f*, de domínio $\mathbb{R}$, tal que:

$$f'(x) = \text{sen}\,(2x)$$

O gráfico da função *f* e a reta de equação $y = -2x - 1$ intersetam o eixo Oy no mesmo ponto.
Determine a expressão analítica da função *f*.

– FIM –

Cotações

Caderno 1		**80 pontos**
1.		8 pontos
2.		14 pontos
3.		24 pontos
3.1.	8 pontos	
3.2.	16 pontos	
4.		34 pontos
4.1.	18 pontos	
4.2.	16 pontos	
Caderno 2		**120 pontos**
5.		8 pontos
6.		32 pontos
6.1.	16 pontos	
6.2.	16 pontos	
7.		8 pontos
8.		32 pontos
8.1.	14 pontos	
8.2.	18 pontos	
9.		8 pontos
10.		18 pontos
11.		14 pontos
TOTAL		**200 pontos**

1. Opção (D)

2. $\approx 42\%$

3.

3.1. Opção (D)

3.2. $C(t) = 4600\,(1 + 0{,}013)^{2t}$

É possível obter um capital acumulado superior a 6000 euros ao fim de 11 anos.

4.

4.1. Ao cuidado do aluno.

4.2. $(-0{,}82;\, 1)$

5. Opção (C)

6.

6.1. Ao cuidado do aluno.

6.2. $\frac{20}{3}$

7. Opção (A)

8.

8.1. $2e^3$

8.2. O gráfico de f tem a concavidade voltada para cima em $]-\infty, -2[$ e em $]-1, +\infty[$ e tem a concavidade voltada para baixo em $]-2, -1[$; tem dois pontos de inflexão de abcissas -2 e -1.

9. Opção (B)

10. $\frac{5}{2}$

11. $f(x) = -\frac{1 + \cos(2x)}{2}$

Teste n.º 6 – Matriz

Tipologia de itens		Número de itens	Cotação por item (em pontos)
Itens de seleção	Escolha múltipla	5	8
Itens de construção	Resposta restrita	11	8 a 18

Domínios	Metas Curriculares
CC12	Conhecer propriedades das operações sobre conjuntos. Conhecer factos elementares da combinatória. Conhecer o triângulo de Pascal e o binómio de Newton. Resolver problemas.
PRB12	Definir espaços de probabilidade. Definir probabilidade condicionada. Resolver problemas.
FRVR12	Utilizar teoremas de comparação e os teoremas das sucessões e funções enquadradas. Conhecer propriedades elementares das funções contínuas. Relacionar a derivada de segunda ordem com o sentido da concavidade do gráfico de uma função e com a noção de aceleração. Resolver problemas.
TRI12	Estabelecer fórmulas de trigonometria. Calcular a derivada de funções trigonométricas. Relacionar osciladores harmónicos e a segunda lei de Newton. Resolver problemas.
FEL12	Operar com juros compostos e definir o número de Neper. Definir as funções exponenciais e estabelecer as respetivas propriedades principais. Definir as funções logarítmicas e estabelecer as respetivas propriedades principais. Conhecer alguns limites notáveis envolvendo funções exponenciais e logarítmicas. Estudar modelos de crescimento e decrescimento exponencial. Resolver problemas.
PCI12	Definir a noção de primitiva. Abordar intuitivamente a noção de integral definido. Resolver problemas.

Domínios	Metas Curriculares
NC12	Conhecer o contexto histórico do aparecimento dos números complexos e motivar a respetiva construção. Definir o corpo dos números complexos. Operar com números complexos. Definir a forma trigonométrica de um número complexo. Extrair raízes *n*-ésimas de números complexos. Resolver problemas.

Teste n.º 6

Matemática A

12.º ano de Escolaridade

Na resposta aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Escreva na folha de respostas o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Caderno 1
(35 minutos)

É permitido o uso de calculadora.

1. Uma caixa contém oito bolas amarelas, doze bolas brancas e dez bolas vermelhas, indistinguíveis ao tato. Extraem-se ao acaso, sucessivamente e sem reposição, três bolas do saco.
Qual é a probabilidade de as três bolas serem de cores diferentes se a primeira bola tiver sido amarela?

[A] $\frac{16}{203}$ **[B]** $\frac{8}{203}$ **[C]** $\frac{60}{203}$ **[D]** $\frac{30}{203}$

2. A Helena comprou um automóvel novo por 15 700 euros. O valor do automóvel diminui com o passar do tempo e é dado, em milhares de euros, aproximadamente, por $H(t) = 15{,}7e^{-\frac{t}{5}}$, onde t é o número de anos decorridos desde a sua compra.

2.1. Quanto vale, em euros, o automóvel dois anos após a sua compra?
Apresente o resultado com arredondamento às unidades.
Sempre que nos cálculos intermédios proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, três casas decimais.

2.2. Verifique que $\frac{H(t+1)}{H(t)}$ é constante e determine esse valor arredondado às centésimas. Interprete o valor obtido no contexto da situação descrita.

2.3. Qual é a taxa de desvalorização do automóvel no instante em que a Helena sai com ele do *stand* onde o comprou?

2.4. A Margarida comprou, no mesmo dia que a Helena, um automóvel, por 17 200 euros. O valor do automóvel da Margarida também diminui com o passar do tempo e é dado, em milhares de euros, aproximadamente, por $M(t) = 17{,}2e^{-\frac{t}{4{,}6}}$, onde t é o número de anos decorridos desde a sua compra.

Determine o instante após a compra em que ambos os automóveis têm o mesmo valor.
Apresente o resultado em anos e meses, arredondado às unidades.
Sempre que nos cálculos intermédios proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, três casas decimais.

3. Considere a função f, de domínio $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, definida por:

$$f(x) = e^{-2x-2} + \text{sen}(x^2 + 1)$$

Sabe-se que:

- A é um ponto do gráfico de f;
- a reta tangente ao gráfico de f, no ponto A, tem inclinação $\frac{2\pi}{3}$ radianos.

Determine a abcissa do ponto A, recorrendo à calculadora gráfica.
Na sua resposta, deve:

- equacionar o problema;
- reproduzir o gráfico da função ou os gráficos das funções que tiver necessidade de visualizar na calculadora, devidamente identificado(s), incluindo o referencial;
- indicar a abcissa de A com arredondamento às centésimas.

4. Em $\mathbb{C}$, seja $z = i^{2017} + 2i^{2018} - 3i^{2019} + 4i^{2020}$. Então, $\frac{1}{z}$ é igual a:

[A] $\frac{1}{10} - \frac{1}{5}i$

[B] $2 + 4i$

[C] $6 + 2i$

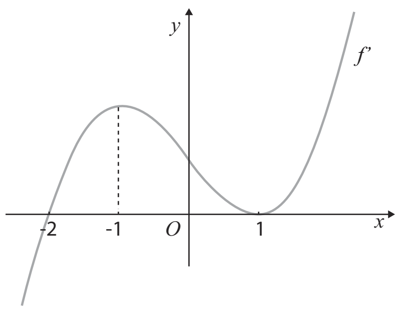
[D] $-\frac{1}{6} + \frac{1}{3}i$

Caderno 2
(55 minutos)

Não é permitido o uso de calculadora.

5. Seja f uma função polinomial de grau 4. Na figura está representada graficamente f', primeira derivada de f.
Sabe-se que:

- $f'(-2) = 0$
- $f'(1) = 0$



Em qual dos conjuntos seguintes o gráfico de f tem a concavidade voltada para baixo?

[A] $]-\infty, 0[$

[B] $]-\infty, -2[$

[C] $]-1, 1[$

[D] $]-2, 1[$

6. Seja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ a função definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 + 2\,\text{sen}\,(3x)}{x} & \text{se } x > 0 \\ \dfrac{\ln\,(-2x+1)}{e^{3x} - 1} & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$$

Estude a função f quanto à existência de assíntotas ao seu gráfico e, caso existam, indique as suas equações.

7. Considere as funções f e g, de domínios $]-1, +\infty[$ e $\mathbb{R}$, definidas, respetivamente, por:

$$f(x) = \log\,(x+1) \text{ e } g(x) = \text{sen}^2\, x$$

7.1. Determine o conjunto-solução da condição $f(x) \geq f(2x) - 1$.

7.2. Seja h a função definida por:

$$h(x) = f \circ g(x)$$

Estude a função h quanto à monotonia e existência de extremos relativos no intervalo $[0, 2\pi]$.

8. Considere a região do plano delimitada pela curva $y = \text{sen}\, x$ e pelas retas de equações $y = 0$ e $y = \pi$.

Considere a reta de equação $x = k$, com $k \in [0, \pi]$.

Esta reta divide a região anterior em duas regiões tais que a área da região para $0 \leq x \leq k$ é o triplo da área da região para $k \leq x \leq \pi$.

Qual dos seguintes é o valor de k?

[A] $\dfrac{\pi}{2}$

[B] $\dfrac{\pi}{3}$

[C] $\dfrac{2\pi}{3}$

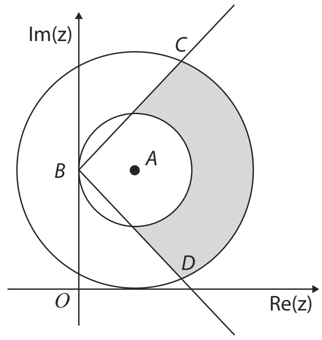
[D] $\dfrac{\pi}{6}$

9. Num jardim há uma árvore cuja taxa de crescimento, t anos após ter sido plantada, é dada por $\dfrac{20}{\sqrt{t}}$ centímetros por ano.

A altura da árvore no momento em que foi plantada era 10 cm.

Determine a altura da árvore, em centímetros, passados nove anos de ter sido plantada.

10. Na figura está representada a sombreado, no plano complexo, parte de uma coroa circular.
Sabe-se que:



- o ponto A é o afixo do complexo $1 + 2i$;
- o ponto B é o afixo do complexo $2i$;
- a reta BC é paralela à bissetriz dos quadrantes ímpares;
- as retas BC e BD são perpendiculares;
- as circunferências têm centro em A e são tangentes, respetivamente, ao eixo imaginário e ao eixo real.

Qual das condições seguintes poderá definir, em $\mathbb{C}$ (conjunto dos números complexos), a região a sombreado, incluindo a fronteira?

[A] $1 \leq |z + 1 + 2i| \leq 2 \ \wedge \ -\frac{\pi}{4} \leq \text{Arg}(z - 2i) \leq \frac{\pi}{4}$

[B] $1 \leq |z - 1 - 2i| \leq 4 \ \wedge \ -\frac{\pi}{4} \leq \text{Arg}(z - 2i) \leq \frac{\pi}{4}$

[C] $1 \leq |z + 1 + 2i| \leq 4 \ \wedge \ -\frac{\pi}{4} \leq \text{Arg}(z + 2i) \leq \frac{\pi}{4}$

[D] $1 \leq |z - 1 - 2i| \leq 2 \ \wedge \ -\frac{\pi}{4} \leq \text{Arg}(z - 2i) \leq \frac{\pi}{4}$

11. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, seja $z_1 = \dfrac{\sqrt{3} + \sqrt{3}i}{\frac{\sqrt{6}}{9}e^{-\frac{\pi}{3}i}}$ e $z_2 = \left(\sqrt{3}e^{\frac{3\pi}{16}i}\right)^4$.

Sabe-se que os afixos dos complexos z_1 e z_2 são vértices consecutivos de um polígono regular de n lados, com centro na origem do referencial.
Determine o valor de n.

12. Considere, em $\mathbb{C}$, $z = e^{2\alpha i}$.

Mostre que $\dfrac{2}{1 + z} = 1 - i \text{ tg } \alpha$.

– FIM –

Cotações

Caderno 1			**80 pontos**
1.			8 pontos
2.			48 pontos
	2.1.	8 pontos	
	2.2.	12 pontos	
	2.3.	14 pontos	
	2.4.	14 pontos	
3.			16 pontos
4.			8 pontos
Caderno 2			**120 pontos**
5.			8 pontos
6.			18 pontos
7.			30 pontos
	7.1.	14 pontos	
	7.2.	16 pontos	
8.			8 pontos
9.			16 pontos
10.			8 pontos
11.			16 pontos
12.			16 pontos
TOTAL			**200 pontos**

Soluções

1. Opção (C)

2.

2.1. O automóvel vale 10 524 euros.

2.2. $\approx 0{,}82$
Em cada ano que passa, o automóvel desvaloriza, aproximadamente, 18%.

2.3. No instante em que a Helena sai com o automóvel do *stand* onde o comprou, o automóvel está a desvalorizar a uma taxa de 314 euros por ano.

2.4. $t \approx 5{,}247$
Os automóveis têm o mesmo valor após, aproximadamente, 5 anos e 3 meses da sua compra.

3. 1,18

4. Opção (A)

5. Opção (C)

6. $y = x$ é assíntota oblíqua ao gráfico de f quando $x \to +\infty$.

7.

7.1. C.S. = $\left]-\frac{1}{2}, +\infty\right[$

7.2. h é estritamente crescente em $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ e em $\left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$ e é estritamente decrescente em $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ e em $\left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$, tem máximos relativos em $x = \frac{\pi}{2}$ e em $x = \frac{3\pi}{2}$ e mínimos relativos em $x = 0$, em $x = \pi$ e em $x = 2\pi$.

8. Opção (C)

9. A árvore mede 130 cm.

10. Opção (D)

11. $n = 12$

12. Ao cuidado do aluno.