Novo Espaço – Matemática A, 10.º ano

Proposta de teste de avaliação global [maio de 2021]

Nome: ____

Ano/Turma: _________ **N.º:** _____ **Data:** _____-___-___

1. Em relação a um referencial o.n. Oxy, considera os pontos:

$$A(-2,1),\ B(-1,3) \text{ e } C(1,2)$$

1.1. O triângulo $[ABC]$ é isósceles? Fundamenta a tua resposta.

1.2. Sabe-se que B, C e D não são vértices de um triângulo.

Em qual das seguintes opções estão apresentadas as coordenadas do ponto D?

(A) $(2,\ 2)$ **(B)** $(-3,\ 4)$ **(C)** $(5,\ -1)$ **(D)** $\left(4,\ \frac{1}{2}\right)$

1.3. A reta r passa no ponto C e é paralela à reta AB.

Representa a reta r por uma equação na forma reduzida.

2. Em relação a um referencial o.n. Oxy, considera a região definida pela condição:

$$(x+2)^2 + y^2 \leq 5 \ \wedge \ x+2 \leq 0$$

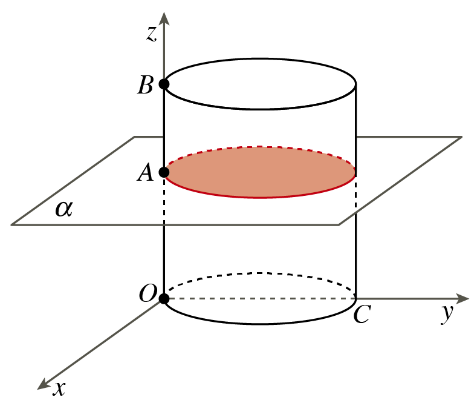
Qual é a medida da área, arredondada às centésimas, dessa região?

(A) $7,85$ **(B)** $7,02$ **(C)** $39,27$ **(D)** $15,71$

3. Na figura, em referencial o.n. $Oxyz$, está representado um cilindro reto.

Sabe-se que:

- a base inferior do cilindro está contida no plano xOy;
- o ponto C tem coordenadas $(0,\ 6,\ 0)$;
- $[OC]$ é um diâmetro da base inferior do cilindro;
- o plano α é paralelo às bases do cilindro e interseta o eixo Oz no ponto A de coordenadas $(0, 0, 5)$;
- o ponto B pertence ao eixo Oz e à base superior do cilindro.

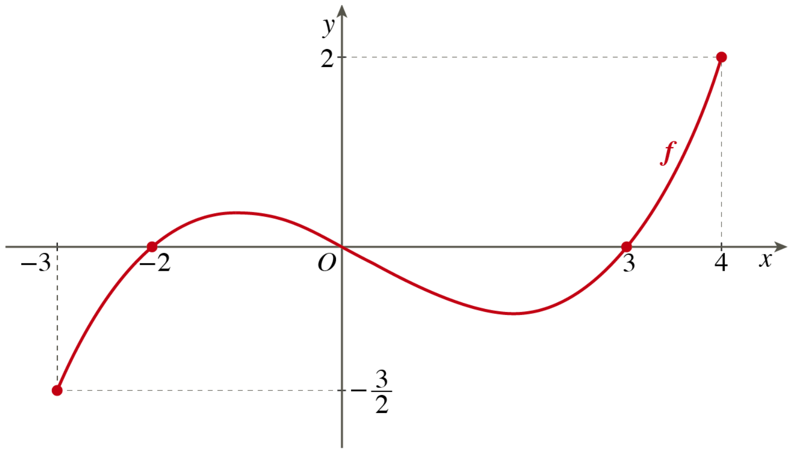


3.1. O segmento de reta $[AC]$ é um diâmetro de uma superfície esférica.

Define por uma equação, na forma reduzida, essa superfície esférica.

3.2. O plano α divide o cilindro em dois, sendo o volume do cilindro inferior igual a $\frac{5}{3}$ do volume do cilindro superior. Determina as coordenadas do ponto B.

4. Na figura, em referencial o.n. Oxy, está representada uma função f.



Sabe-se que:

- o domínio de f é $[-3, 4]$;
- o contradomínio de f é $\left[-\frac{3}{2}, 2\right]$;
- os zeros de f são -2, 0 e 3.

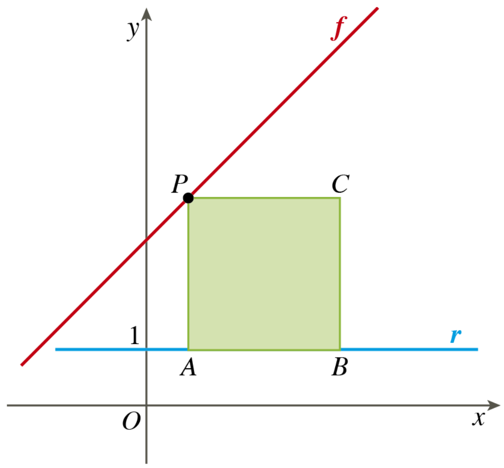
Sejam g e h as funções definidas por $g(x)=\frac{1}{2}f(x+3)$ e $h(x)=-f(2x)$.

4.1. Indica o domínio, o contradomínio e os zeros da função g.

4.2. Qual é o valor da soma dos zeros da função h?

(A) 2 **(B)** $\frac{3}{2}$ **(C)** $\frac{5}{2}$ **(D)** $\frac{1}{2}$

5. Na figura, em referencial o.n. *Oxy*, estão representados o gráfico da função afim *f*, definida por $f(x)=x+3$, e a reta *r*, definida pela equação $y=1$.



Sabe-se que:

- *P* é um ponto, de abcissa positiva, do gráfico de *f*;
- o ponto *A* pertence à reta *r* e tem abcissa igual à do ponto *P*;
- o quadrilátero [*PABC*] é um quadrado.

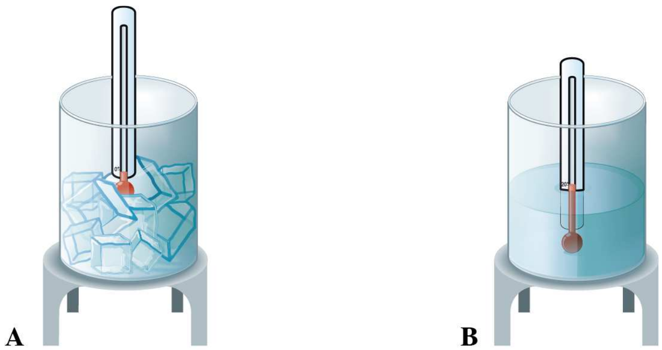
5.1. Determina o perímetro do quadrado, no caso de a abcissa de *P* ser 1.

5.2. Seja *g* a função que a cada valor da abcissa, x, de *P* faz corresponder a medida da área do quadrado [*PABC*].

a) Mostra que $g(x)=x^2+4x+4$.

b) Considera $g(x)=x^2+4x+4$. Determina as coordenadas do ponto *C*, no caso de a medida da área do quadrado ser 81.

6. Duas experiências distintas, A e B, tiveram início no mesmo instante e a duração de 15 minutos.



Em cada experiência foi utilizado um líquido.

- Na **experiência A**, a temperatura do líquido, em graus Celsius, t minutos após o início da experiência, é dada pelo seguinte modelo matemático:

$$f(t) = 3t + 8$$

- Na **experiência B**, a temperatura do líquido, em graus Celsius, t minutos após o início da experiência, é dada pelo seguinte modelo matemático:

$$g(t) = (t-3)^2 + 7\,.$$

6.1. Decorridos cinco minutos de experiência, qual era a diferença entre a temperatura do líquido utilizado na experiência A e a temperatura do líquido utilizado na experiência B?

6.2. Sem recorreres à calculadora, determina durante quanto tempo, em minutos, a temperatura do líquido da experiência B não foi superior à do líquido da experiência A.

7. Considera os polinómios $P(x) = -x^3 + 2x^2 + 5x - 6$ e $T(x) = x^2 - x + 1$.

7.1. Determina o resto da divisão inteira de $P(x)$ por $T(x)$.

7.2. Resolve a equação $P(x) = 0$, sabendo que -2 é raiz de $P(x)$.

FIM

	Cotações														
Questões	**1.1.**	**1.2.**	**1.3.**	**2.**	**3.1.**	**3.2.**	**4.1.**	**4.2.**	**5.1.**	**5.2.a)**	**5.2.b)**	**6.1.**	**6.2.**	**7.1.**	**7.2.**	**Total**
Pontos	12	12	12	12	15	15	12	12	14	12	15	12	15	15	15	**200**

1.1. $\overline{AB}=\sqrt{(-2+1)^2+(1-3)^2}=\sqrt{1+4}=\sqrt{5}$

$\overline{AC}=\sqrt{(-2-1)^2+(1-2)^2}=\sqrt{9+1}=\sqrt{10}$

$\overline{BC}=\sqrt{(-1-1)^2+(3-2)^2}=\sqrt{4+1}=\sqrt{5}$

Resposta: O triângulo [*ABC*] é isósceles, pois $\overline{AB}=\overline{BC}$.

1.2. Os pontos *B*, *C* e *D* não são vértices de um triângulo se e só se forem pontos colineares.

Equação da reta *BC*: $y=mx+b$

$\overrightarrow{BC}=C-B=(2,-1)$

Então, $m=-\frac{1}{2}$.

$y=-\frac{1}{2}x+b$

O ponto $C(1,2)$ pertence à reta. Então, $2=-\frac{1}{2}\times 1+b \Leftrightarrow b=\frac{5}{2}$.

Equação da reta *BC*: $y=-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$

O ponto de coordenadas $(-3,\ 4)$ pertence à reta *BC*, pois $4=-\frac{1}{2}\times(-3)+\frac{5}{2}$.

Então, o ponto *D* pode ter coordenadas $(-3,\ 4)$.

Resposta: Opção (B)

1.3. Retas paralelas têm igual declive.

$\overrightarrow{AB}=B-A=(1,2)$

O declive da reta *r* é 2.

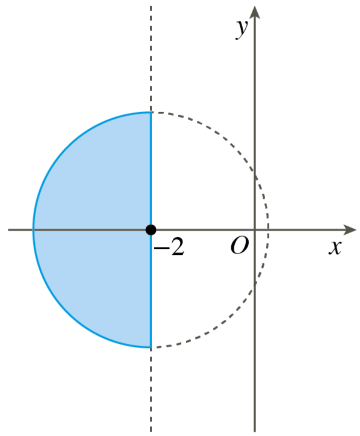
Uma equação da reta *r* é do tipo: $y=2x+b$.

O ponto *C* tem coordenadas $(1,2)$. Então, $2=2\times 1+b$, ou seja, $b=0$.

Uma equação da reta *r*, na forma reduzida, é $y=2x$.

Resposta: $y=2x$

2. Geometricamente, num referencial o.n. Oxy, a condição $(x+2)^2 + y^2 \leq 5 \ \wedge \ x \leq -2$ representa a interseção do círculo cujo centro é o ponto de coordenadas $(-2, 0)$ e que tem raio $\sqrt{5}$, com o semiplano vertical esquerdo (fechado) definido por $x \leq -2$.



A região corresponde a um semicírculo de raio $\sqrt{5}$.

A área dessa região é igual a $\dfrac{\pi \times (\sqrt{5})^2}{2} = \dfrac{5\pi}{2}$.

$\dfrac{5\pi}{2} \approx 7{,}85$

Resposta: Opção (A)

3.1. O centro da superfície esférica é o ponto médio de [AC], ou seja, o ponto de coordenadas $\left(\dfrac{0+0}{2}, \dfrac{0+6}{2}, \dfrac{5+0}{2}\right)$, isto é, $\left(0, 3, \dfrac{5}{2}\right)$.

O raio da superfície esférica é $r = \dfrac{\overline{AC}}{2}$.

Como $\overline{AC} = \sqrt{(0-0)^2 + (0-6)^2 + (5-0)^2} = \sqrt{36+25} = \sqrt{61}$, então $r = \dfrac{\sqrt{61}}{2}$.

Equação da superfície esférica: $x^2 + (y-3)^2 + \left(z - \dfrac{5}{2}\right)^2 = \dfrac{61}{4}$

Resposta: $x^2 + (y-3)^2 + \left(z - \dfrac{5}{2}\right)^2 = \dfrac{61}{4}$

3.2. Volume do cilindro inferior: $\pi\times(3)^2\times\overline{OA}=9\times5\times\pi=45\pi$

Volume do cilindro superior: $\pi\times(3)^2\times\overline{AB}=9\times\overline{AB}\times\pi$

Sabe-se que $45\pi=\frac{5}{3}\left(9\times\overline{AB}\times\pi\right)$.

$45\pi=\frac{5}{3}\left(9\times\overline{AB}\times\pi\right)\Leftrightarrow\overline{AB}=3$

Como $\overline{OB}=\overline{OA}+\overline{AB}$, então $\overline{OB}=5+3=8$.

As coordenadas do ponto *B* são $(0,\ 0,\ 8)$.

Resposta: $B(0,0,8)$

4.1. Domínio da função *g*: $[-6,\ 1]$

Contradomínio da função *g*: $\left[-\frac{3}{4},\ 1\right]$

Zeros da função *g*: -5; -3 e 0

4.2. Os zeros da função *h* são $\frac{1}{2}\times(-2)$, $\frac{1}{2}\times0$ e $\frac{1}{2}\times3$, ou seja, -1, 0 e $\frac{3}{2}$.

$-1+0+\frac{3}{2}=\frac{1}{2}$

Resposta: Opção (D)

5.1. $P(1,\ f(1))$, ou seja, $P(1,\ 4)$.

O ponto *A* tem coordenadas $(1,\ 1)$.

$\overline{AP}=|4-1|=3$

Perímetro do quadrado: $4\times\overline{AP}=4\times3=12$

Resposta: 12

5.2. **a)** $P(x,\ f(x))$

Como $f(x)=x+3$, as coordenadas do ponto *P*, em função de x, são $(x,\ x+3)$.

O ponto *A* tem coordenadas $(x,\ 1)$.

$\overline{AP}=x+3-1=x+2$

A área do quadrado é dada por $\left(\overline{AP}\right)^2$, ou seja, $(x+2)^2=x^2+4x+4$.

Conclui-se que $g(x)=x^2+4x+4$.

b) $g(x)=81$

$g(x)=81 \Leftrightarrow x^2+4x+4=81 \Leftrightarrow x^2+4x-77=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=\dfrac{-4\pm\sqrt{16+308}}{2} \Leftrightarrow x=\dfrac{-4\pm 18}{2} \Leftrightarrow x=-11 \vee x=7$

Como $x>0$, a solução é 7. Então, $P(7,\,9)$ e $A(7,\,1)$.

$\overline{AP}=|1-9|=8$

Como $[PABC]$ é um quadrado tal que a reta PC é paralela à reta r e, consequentemente, paralela ao eixo Ox, $C(7+8,\,9)$, ou seja, $C(15,\,9)$.

Resposta: $C(15,\,9)$

6.1. $f(t)=3t+8$ e $g(t)=(t-3)^2+7$

$f(5)=3\times5+8=23$

$g(5)=(5-3)^2+7=11$

$f(5)-g(5)=23-11=12$

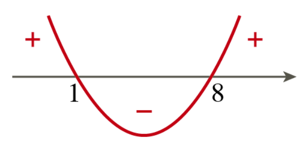
Resposta: Passados cinco minutos de experiência, a diferença entre a temperatura do líquido utilizado na experiência A e a do líquido utilizado na experiência B era 12 ºC.

6.2. $g(t)\le f(t) \;\wedge\; t\in[0,\,15]$

$g(t)\le f(t) \Leftrightarrow (t-3)^2+7\le 3t+8 \Leftrightarrow t^2-6t+9+7\le 3t+8 \Leftrightarrow t^2-9t+8\le 0$

Cálculo auxiliar:

$t^2-9t+8=0 \Leftrightarrow t=\dfrac{9\pm\sqrt{81-32}}{2} \Leftrightarrow t=8 \vee t=1$



$t^2-9t+8\le 0 \Leftrightarrow t\in[1,\,8]$

$g(t)\le f(t) \;\wedge\; t\in[0,\,15] \Leftrightarrow t\in[1,\,8]$

Resposta: A temperatura do líquido da experiência B foi não superior à do líquido da experiência A durante 7 minutos.

7.1.

$$\begin{array}{rrrr|l}
-x^3 & +2x^2 & +5x & -6 & x^2-x+1 \\ \cline{5-5}
x^3 & -x^2 & +x & & -x+1 \\ \cline{1-3}
 & x^2 & +6x & -6 & \\
 & -x^2 & +x & -1 & \\ \cline{2-4}
 & & 7x & -7 &
\end{array}$$

Resposta: O resto da divisão inteira de $P(x)$ por $T(x)$ é o polinómio $7x-7$.

7.2. $P(x) = -x^3 + 2x^2 + 5x - 6$

$$\begin{array}{r|rrr|r} & -1 & 2 & 5 & -6 \\ -2 & & 2 & -8 & 6 \\ \hline & -1 & 4 & -3 & \boxed{0} \end{array}$$

$P(x) = 0 \Leftrightarrow (x+2)(-x^2+4x-3) = 0 \Leftrightarrow x = -2 \;\vee\; -x^2+4x-3 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = -2 \;\vee\; x = \dfrac{-4 \pm \sqrt{16-12}}{-2} \Leftrightarrow x = -2 \vee x = 1 \;\vee\; x = 3$

Resposta: Conjunto-solução: $\{-2, 1, 3\}$