

Teste N.º 3

**Matemática A**

---

Duração do Teste: 90 minutos

---

**NÃO É PERMITIDO O USO DE CALCULADORA**

---

**10.º Ano de Escolaridade**

---

Nome do aluno: \_\_\_\_\_ N.º: \_\_\_\_ Turma: \_\_\_\_

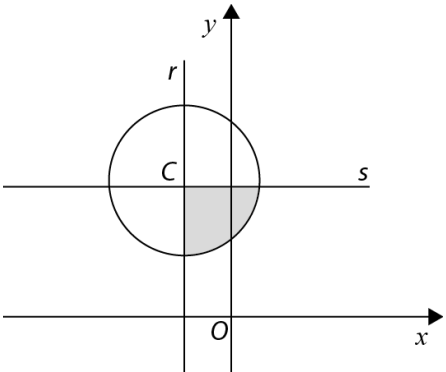
---

---

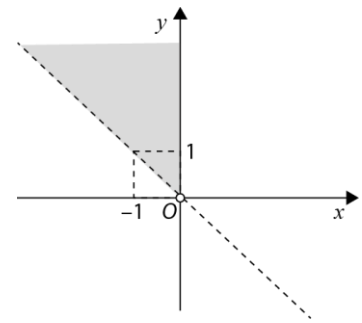
Na resposta aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Na resposta aos restantes itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias. Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

---

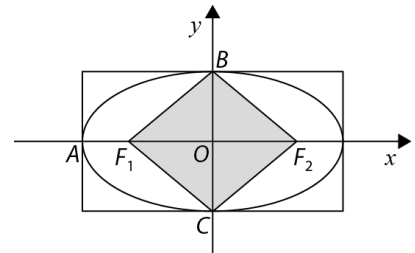
1. Considere o conjunto  $U = \left\{-1, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right\}$ . Qual das seguintes proposições é verdadeira?
- (A)  $\forall x \in U, 3^x > 1$  (B)  $\forall x \in U, 3^x \leq 1$   
 (C)  $\exists x \in U: 3^x = 0$  (D)  $\exists x \in U: 3^x = \frac{\sqrt{3}}{3}$
2. Se  $\{a + b\sqrt{3}\}$ ,  $a, b \in \mathbb{Z}$  é o conjunto-solução da equação  $\sqrt{3}x = 4 + 2x$ , então:
- (A)  $a = 2; b = 1$  (B)  $a = -4; b = 2$   
 (C)  $a = -8; b = -4$  (D)  $a = 8; b = -4$
3. Determine o polinómio  $A(x)$  de grau 3 e apresente-o na forma reduzida e ordenada, sabendo que:
- 1 é uma raiz de multiplicidade dois de  $A(x)$ ;
  - $A(x)$  é divisível por  $x + 2$ ;
  - o resto da divisão inteira de  $A(x)$  por  $x + 3$  é 32.
4. Considere o polinómio  $P(x) = -x^5 + 2x^4 + 5x^3 - 6x^2$ .
- 4.1. Sabendo que 3 é uma raiz simples do polinómio, determine as restantes raízes de  $P(x)$ .
- 4.2. Determine o conjunto-solução da condição  $P(x) < 0$ .
5. Na figura está representada, num referencial o.n.  $xOy$ , a circunferência de centro  $C$  definida pela condição  $x^2 + y^2 + 4x - 10y + 20 = 0$  e duas retas,  $r$  e  $s$ ,  $r$  paralela a  $Oy$  e que contém o ponto  $C$  e  $s$  paralela a  $Ox$  e que também contém o ponto  $C$ .
- 
- 5.1. Defina por uma condição o conjunto de pontos a sombreado na figura, incluindo a fronteira.
- 5.2. Determine as coordenadas dos pontos de interseção da circunferência com a bissetriz dos quadrantes pares.
- 5.3. Considere também os pontos  $A(-2, 1)$  e  $B\left(-\frac{1}{3}, 3\right)$ .
- 5.3.1. Escreva uma equação vetorial da reta paralela à reta  $r$  e que contém o ponto médio de  $[AB]$ .
- 5.3.2. Determine as coordenadas do vetor colinear com  $\overrightarrow{AB}$ , de sentido contrário ao de  $\overrightarrow{AB}$  e de norma  $\sqrt{61}$ .
6. Considere, num plano munido de um referencial o.n.  $xOy$ , os pontos  $Q(1, 2)$ ,  $R(-2, -2)$  e  $P(k, k - 1)$ ,  $k \in \mathbb{R}$ . Qual é o valor de  $k$  de modo que  $P$  pertença à mediatriz de  $[QR]$ ?
- (A)  $-\frac{5}{14}$  (B)  $\frac{5}{14}$  (C)  $-\frac{11}{10}$  (D)  $\frac{11}{10}$

7. No plano munido de um referencial o.n.  $xOy$ , considere a região a sombreado da figura.



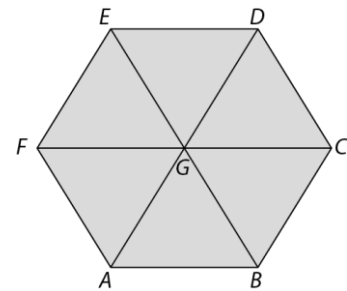
- (A)  $y > -x \vee x \leq 0$                       (B)  $\sim(y \leq -x \vee x > 0)$   
 (C)  $y > x \wedge x < 0$                       (D)  $\sim(y > -x \wedge x > 0)$

8. Na figura encontra-se representada, em referencial o.n.  $xOy$ , uma elipse inscrita num retângulo de perímetro 36. Os pontos  $A(-6, 0)$ ,  $B$  e  $C$  pertencem à elipse e aos lados do retângulo, como ilustra a figura.



- 8.1. Escreva uma equação da elipse.  
 8.2. Determine a área do losango  $[F_1BF_2C]$ , onde  $F_1$  e  $F_2$  são os focos da elipse.  
 Apresente o resultado sob a forma de potência de base 3.

9. Na figura está representado um hexágono regular  $[ABCDEF]$  e o seu centro  $G$ .



- Considere as seguintes proposições:  
 $p: A + 2\overline{FE} = D$   
 $q: \overline{AB} + \overline{AF} = \overline{FE}$   
 $r: G - \overline{AB} = C$

Qual das seguintes proposições é verdadeira?

- (A)  $\sim(p \Leftrightarrow q) \wedge \sim r$                       (B)  $q \vee p \Rightarrow r$   
 (C)  $\sim(p \vee \sim q \vee r)$                       (D)  $q \vee (p \Rightarrow r)$

FIM

### COTAÇÕES

	Item														
	Cotação (em pontos)														
	1.	2.	3.	4.1.	4.2.	5.1.	5.2.	5.3.1.	5.3.2.	6.	7.	8.1.	8.2.	9.	
	8	8	20	15	20	20	15	15	20	8	8	15	20	8	200

## TESTE N.º 3 – Proposta de resolução

### 1. Opção (D)

$$U = \left\{-1, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right\}$$

$$3^{-1} = \frac{1}{3}$$

$$3^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$3^0 = 1$$

$$3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$$

Das opções apresentadas, apenas  $\exists x \in U: 3^x = \frac{\sqrt{3}}{3}$  é verdadeira.

### 2. Opção (C)

$$\sqrt{3}x = 4 + 2x \Leftrightarrow \sqrt{3}x - 2x = 4$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{3} - 2)x = 4$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{4}{\sqrt{3}-2}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{4(\sqrt{3}+2)}{(\sqrt{3}-2)(\sqrt{3}+2)}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{4\sqrt{3}+8}{(\sqrt{3})^2-2^2}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{4\sqrt{3}+8}{3-4}$$

$$\Leftrightarrow x = -8 - 4\sqrt{3}$$

Assim,  $a = -8$  e  $b = -4$ .

3. Como  $A(x)$  tem grau 3, 1 é uma raiz de multiplicidade dois e  $A(x)$  é divisível por  $x + 2$ , então  $A(x)$  é da forma  $A(x) = a(x - 1)(x - 1)(x + 2)$ , com  $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ .

Como o resto da divisão inteira de  $A(x)$  por  $x + 3$  é 32, então:

$$A(-3) = 32$$

Logo:

$$a \times (-3 - 1)(-3 - 1)(-3 + 2) = 32 \Leftrightarrow a \times (-16) = 32$$

$$\Leftrightarrow a = -2$$

Assim:

$$\begin{aligned}
 A(x) &= -2(x-1)^2(x+2) = \\
 &= -2(x^2 - 2x + 1)(x+2) = \\
 &= -2(x^3 + 2x^2 - 2x^2 - 4x + x + 2) = \\
 &= -2(x^3 - 3x + 2) = \\
 &= -2x^3 + 6x - 4
 \end{aligned}$$

4.

4.1.

**Cálculos auxiliares**

3	-1	2	5	-6	0	0
		-3	-3	6	0	0
	-1	-1	2	0	0	0

$P(x) = (x-3)(-x^4 - x^3 + 2x^2) =$   
 $= (x-3) \times x^2 \times (-x^2 - x + 2) =$   
 $-x^2 - x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4 \times (-1) \times 2}}{2 \times (-1)}$   
 $\Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{-2}$   
 $\Leftrightarrow x = \frac{1+3}{-2} \vee x = \frac{1-3}{-2}$   
 $\Leftrightarrow x = -2 \vee x = 1$   
 $= (x-3) \times x^2 \times (-1)(x+2)(x-1) =$   
 $= -x^2(x-3)(x+2)(x-1)$

$$\begin{aligned}
 P(x) = 0 &\Leftrightarrow -x^2 = 0 \vee x-3 = 0 \vee x+2 = 0 \vee x-1 = 0 \\
 &\Leftrightarrow x = 0 \vee x = 3 \vee x = -2 \vee x = 1
 \end{aligned}$$

Assim, além de 3, as raízes do polinómio são 0, -2 e 1.

4.2. Da alínea anterior, sabemos que  $P(x) = -x^2(x-3)(x+2)(x-1)$ .

$x$	$-\infty$	$-2$		$0$		$1$		$3$	$+\infty$
$-x^2$	-	-	-	0	-	-	-	-	-
$x-3$	-	-	-	-	-	-	-	0	+
$x+2$	-	0	+	+	+	+	+	+	+
$x-1$	-	-	-	-	-	0	+	+	+
$P(x)$	+	0	-	0	-	0	+	0	-

$$P(x) < 0 \Leftrightarrow -2 < x < 0 \vee 0 < x < 1 \vee x > 3$$

$$C.S. = ]-2, 0[ \cup ]0, 1[ \cup ]3, +\infty[$$

5.

$$\begin{aligned} 5.1. \quad x^2 + y^2 + 4x - 10y + 20 = 0 &\Leftrightarrow x^2 + 4x + 2^2 + y^2 - 10y + 5^2 = -20 + 2^2 + 5^2 \\ &\Leftrightarrow (x + 2)^2 + (y - 5)^2 = 9 \end{aligned}$$

Centro da circunferência:  $C(-2,5)$

Raio:  $\sqrt{9} = 3$

Uma condição que define o conjunto de pontos a sombreado é:

$$(x + 2)^2 + (y - 5)^2 \leq 9 \wedge x \geq -2 \wedge y \leq 5$$

5.2. Quando  $y = -x$ , vem que:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + 4x - 10y + 20 = 0 &\Leftrightarrow x^2 + (-x)^2 + 4x - 10x \times (-x) + 20 = 0 \\ &\Leftrightarrow x^2 + x^2 + 4x + 10x + 20 = 0 \\ &\Leftrightarrow 2x^2 + 14x + 20 = 0 \\ &\Leftrightarrow x^2 + 7x + 10 = 0 \\ &\Leftrightarrow x = \frac{-7 \pm \sqrt{7^2 - 4 \times 1 \times 10}}{2 \times 1} \\ &\Leftrightarrow x = \frac{-7 \pm \sqrt{9}}{2} \\ &\Leftrightarrow x = \frac{-7+3}{2} \vee x = \frac{-7-3}{2} \\ &\Leftrightarrow x = -2 \vee x = -5 \end{aligned}$$

Os pontos de interseção são, então,  $P_1(-2,2)$  e  $P_2(-5,5)$ .

5.3.

5.3.1. Seja  $M$  o ponto médio de  $[AB]$ :  $M = \left( \frac{-2 - \frac{1}{3}}{2}, \frac{1+3}{2} \right) = \left( -\frac{7}{6}, 2 \right)$

Equação vetorial pretendida:  $(x, y) = \left( -\frac{7}{6}, 2 \right) + k(0,1), k \in \mathbb{R}$

5.3.2.  $\overrightarrow{AB} = B - A = \left( -\frac{1}{3}, 3 \right) - (-2,1) =$   
 $= \left( -\frac{1}{3} + 2, 3 - 1 \right) =$   
 $= \left( \frac{5}{3}, 2 \right)$

Para ser colinear com  $\overrightarrow{AB}$  é da forma  $k\overrightarrow{AB}$ , isto é,  $\left( \frac{5}{3}k, 2k \right), k \in \mathbb{R}$ .

Para que tenha norma  $\sqrt{61}$ :

$$\begin{aligned} \sqrt{\left( \frac{5}{3}k \right)^2 + (2k)^2} = \sqrt{61} &\Leftrightarrow \frac{25}{9}k^2 + 4k^2 = 61 \\ &\Leftrightarrow \frac{61}{9}k^2 = 61 \\ &\Leftrightarrow k^2 = 9 \\ &\Leftrightarrow k = 3 \vee k = -3 \end{aligned}$$

Para que o vetor tenha sentido contrário ao de  $\overrightarrow{AB}$ , tem-se que  $k = -3$ .

Assim, o vetor nas condições pretendidas tem coordenadas  $(-5, -6)$ .

## 6. Opção (B)

Como  $d(P, Q) = d(P, R)$ , vem que:

$$\sqrt{(k-1)^2 + (k-1-2)^2} = \sqrt{(k+2)^2 + (k-1+2)^2}$$

isto é:

$$(k-1)^2 + (k-3)^2 = (k+2)^2 + (k+1)^2 \Leftrightarrow k^2 - 2k + 1 + k^2 - 6k + 9 = k^2 + 4k + 4 + k^2 + 2k + 1$$

$$\Leftrightarrow -8k - 6k = 5 - 10$$

$$\Leftrightarrow -14k = -5$$

$$\Leftrightarrow k = \frac{5}{14}$$

## 7. Opção (B)

O conjunto de pontos do plano representado a sombreado na figura pode ser definido por:

$$y > -x \wedge x \leq 0$$

que é equivalente a:

$$\sim(y \leq -x \vee x > 0)$$

## 8.

**8.1.** Sejam  $a$  o semieixo maior da elipse e  $b$  o semieixo menor.

Como a elipse está inscrita no retângulo e  $A(-6,0)$ , então  $a = 6$ , ou seja, o comprimento do retângulo é 12 e a sua largura,  $2b$ , é  $\frac{36-2 \times 12}{2} = 6$ .

Como  $a = 6$  e  $b = 3$ , então a elipse pode ser definida por  $\frac{x^2}{6^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1$ , ou seja,  $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{9} = 1$ .

**8.2.** Sejam  $F_1(-c, 0)$  e  $F_2(c, 0)$  os focos da elipse.

$$\text{Então, } a^2 = b^2 + c^2.$$

Logo:

$$6^2 = 3^2 + c^2 \Leftrightarrow c^2 = 36 - 9$$

$$\Leftrightarrow c^2 = 27, \text{ pelo que } c = \sqrt{27}$$

Assim, a área do losango é:

$$A = \frac{\sqrt{27} \times 6}{2} = 3\sqrt{3} \times 3 =$$

$$= 3^2 \times 3^{\frac{1}{2}} = 3^{2+\frac{1}{2}} =$$

$$= 3^{\frac{5}{2}}$$



## 9. Opção (D)

Tem-se que:

- $A + 2\overrightarrow{FE} = A + \overrightarrow{AD} = D$ , logo  $p \Leftrightarrow V$ .
- $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BG} = \overrightarrow{AG} = \overrightarrow{FE}$ , logo  $q \Leftrightarrow V$ .
- $G - \overrightarrow{AB} = G + \overrightarrow{BA} = F$ , logo  $r \Leftrightarrow F$ .

Assim:

$$\begin{aligned} \text{(A)} \quad \sim(p \Leftrightarrow q) \wedge \sim r &\Leftrightarrow (\sim(V \Leftrightarrow V) \wedge \sim F) \\ &\Leftrightarrow (\sim V \wedge V) \\ &\Leftrightarrow (F \wedge V) \\ &\Leftrightarrow F \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(B)} \quad q \vee p \Rightarrow r &\Leftrightarrow (V \vee V \Rightarrow F) \\ &\Leftrightarrow (V \Rightarrow F) \\ &\Leftrightarrow F \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(C)} \quad \sim(p \vee \sim q \vee r) &\Leftrightarrow \sim(V \vee F \vee V) \\ &\Leftrightarrow \sim V \\ &\Leftrightarrow F \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(D)} \quad q \vee (p \Rightarrow r) &\Leftrightarrow V \vee (V \Rightarrow F) \\ &\Leftrightarrow (V \vee F) \\ &\Leftrightarrow V \end{aligned}$$